

Corrigé détaillé de la première partie du TD4 à compléter (Q. 3–5) et à rendre le 20/02/2026

1. Capacité à la position initiale ($x = 0$)

Idée physique. On a deux condensateurs plans identiques. Pour un condensateur plan idéal,

$$C = \frac{\varepsilon A}{e}, \text{ avec } \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

où A est l'aire commune des armatures (m^2), e l'entrefer (m), et ε la permittivité du milieu ($\text{F}\cdot\text{m}^{-1}$). Ici, une partie de la surface est remplie d'air (ou vide) de permittivité ε_0 , et l'autre partie par le diélectrique de permittivité $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$. Comme ces deux zones sont **côte à côte entre les mêmes armatures** et soumises à la **même tension**, elles équivalent à **deux condensateurs en parallèle** : C_a et C_d .

À $x = 0$ (diélectrique centré) : Chaque condensateur C_1 (idem C_2) voit la moitié de sa surface $A/2$ occupée par l'air, et l'autre moitié $A/2$ par le diélectrique :

$$C_0 = C_1(0) = C_2(0) = \underbrace{C_a}_{\text{zone air}} + \underbrace{C_d}_{\text{zone diélectrique}} = \underbrace{\varepsilon_0 \frac{A/2}{e}}_{\text{zone air}} + \underbrace{\varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A/2}{e}}_{\text{zone diélectrique}} \iff \boxed{C_0 = \frac{\varepsilon_0}{2e} A(1 + \varepsilon_r)}$$

Application numérique. Données : $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$, $\varepsilon_r = 3$, $e = 1 \text{ mm} = 1 \times 10^{-3} \text{ m}$, $A = 6 \text{ cm}^2 = 6 \times 10^{-4} \text{ m}^2$.

$$C_0 = 8,85 \times 10^{-12} \times \frac{6 \times 10^{-4}}{2 \times 10^{-3}} (1 + 3) = 8,85 \times 10^{-12} \times (0,3) \times 4 = 1,062 \times 10^{-11} \text{ F}.$$

Donc

$$\boxed{C_0 \simeq 1,062 \times 10^{-11} \text{ F} = 10,62 \text{ pF}.}$$

2. Expression de $C_1(x)$ et $C_2(x)$

Géométrie (aire efficace). On note l la longueur totale (selon x) d'un condensateur (projection de l'aire A dans la direction x). L'aire totale vaut A , donc l'aire par unité de longueur (selon x) vaut A/l .

Quand le noyau est déplacé de x (positif vers la droite), la fraction de surface remplie par le diélectrique augmente dans C_1 et diminue dans C_2 (fonctionnement push-pull).

Pour $C_1(x)$:

$$\text{Zone air : } A_{a,1}(x) = \frac{A}{l} \left(\frac{l}{2} - x \right), \quad \text{zone diélectrique : } A_{d,1}(x) = \frac{A}{l} \left(\frac{l}{2} + x \right).$$

Pour $C_2(x)$ (symétrie inverse) :

$$\text{Zone air : } A_{a,2}(x) = \frac{A}{l} \left(\frac{l}{2} + x \right), \quad \text{zone diélectrique : } A_{d,2}(x) = \frac{A}{l} \left(\frac{l}{2} - x \right).$$

(Validité : $x \in [-l/2, l/2]$ pour que les aires restent positives.)

Capacités comme somme de deux zones en parallèle.

$$\begin{aligned}
 C_1(x) &= \frac{\varepsilon_0}{e} A_{a,1}(x) + \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{e} A_{d,1}(x) = \frac{\varepsilon_0 A}{e l} \left(\frac{l}{2} - x \right) + \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{e l} \left(\frac{l}{2} + x \right) \\
 &= \frac{\varepsilon_0 A}{e l} \left[\left(\frac{l}{2} - x \right) + \varepsilon_r \left(\frac{l}{2} + x \right) \right] \\
 &= \frac{\varepsilon_0 A}{e l} \left[\frac{l}{2} - x + \varepsilon_r \frac{l}{2} + \varepsilon_r x \right] = \frac{\varepsilon_0 A}{e l} \left[\frac{l}{2} + \varepsilon_r \frac{l}{2} + \varepsilon_r x - x \right] \\
 &= \frac{\varepsilon_0 A}{e l} \left[\frac{l}{2} (1 + \varepsilon_r) + x (\varepsilon_r - 1) \right] \\
 &= \frac{\varepsilon_0 A}{e l} \left[\frac{l}{2} (1 + \varepsilon_r) + x (\varepsilon_r - 1) \right] \times \frac{\varepsilon_r + 1}{\varepsilon_r + 1} \\
 &= \frac{\varepsilon_0 A}{e l} (1 + \varepsilon_r) \left[\frac{l}{2} + x \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} \right] \\
 &= \frac{\varepsilon_0 A}{e l} (1 + \varepsilon_r) \left[\frac{l}{2} \left(1 + \frac{2x}{l} \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} \right) \right] \\
 &= \underbrace{\frac{\varepsilon_0 A}{2e} (1 + \varepsilon_r)}_{C_0} \left[1 + \frac{2x}{l} \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} \right].
 \end{aligned}$$

Or $C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{2e} (1 + \varepsilon_r)$, donc

$$C_1(x) = C_0 \left[1 + \frac{2x}{l} \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} \right].$$

$$\Delta C_1(x) = C_0 \times \frac{2x}{l} \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r + 1}$$

De même :

$$C_2(x) = \frac{\varepsilon_0 A}{e l} \left(\frac{l}{2} + x \right) + \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{e l} \left(\frac{l}{2} - x \right) = C_0 \left[1 - \frac{2x}{l} \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} \right].$$

Donc

$$C_2(x) = C_0 \left[1 - \frac{2x}{l} \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} \right].$$

$$\Delta C_2(x) = -C_0 \times \frac{2x}{l} \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r + 1} = -\Delta C_1(x)$$

Écriture $C_1(x) = C_0 + \Delta C_1(x)$ et $C_2(x) = C_0 + \Delta C_2(x)$:

$$\Delta C_1(x) = C_0 \left(\frac{2x}{l} \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} \right), \quad \Delta C_2(x) = -C_0 \left(\frac{2x}{l} \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} \right).$$

On voit bien le mode **push-pull** :

$$\Delta C_2(x) = -\Delta C_1(x).$$

Mode push-pull

Le noyau diélectrique se déplace :

- Il pénètre davantage dans un condensateur (augmentation de capacité).
- Il sort de l'autre (diminution de capacité).

L'un « pousse » pendant que l'autre « tire », d'où l'appellation *push-pull*.

Un fonctionnement en mode *push-pull* signifie que deux grandeurs évoluent de manière opposée autour d'une valeur d'équilibre commune.

Dans le cas du capteur capacitif étudié, les deux capacités s'écrivent :

$$C_1(x) = C_0 + \Delta C(x), \quad C_2(x) = C_0 - \Delta C(x).$$

Lorsque le déplacement x augmente :

- C_1 augmente,
- C_2 diminue,

et inversement si x diminue.

Propriétés importantes :

La somme reste constante :

$$C_1(x) + C_2(x) = C_0 + \Delta C(x) + C_0 - \Delta C(x) = 2C_0 \text{ (ne dépend pas du déplacement } x \text{)}.$$

La différence est proportionnelle au déplacement :

$$C_1(x) - C_2(x) = C_0 + \Delta C(x) - (C_0 - \Delta C(x)) = C_0 + \Delta C(x) - C_0 + \Delta C(x) = 2 \Delta C(x).$$

Ainsi, toute variation est symétrique et opposée.

Conséquence sur la mesure :

Dans un montage différentiel, la tension mesurée dépend de la différence. En effet, elle est proportionnelle à $\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}$.

Comme la somme est constante et que la différence est proportionnelle à x , la tension mesurée est proportionnelle au déplacement x .

La sortie (tension mesurée) est donc linéaire par rapport au mesurande (déplacement).

Intérêt du mode push-pull :

- Amélioration de la linéarité.
- Rejet des variations communes (température, dérives, vieillissement).
- Augmentation de la sensibilité différentielle.
- Meilleur rapport signal/bruit.

3. Tension différentielle V_{mes} du pont (à faire)

Montage. Les deux condensateurs forment un diviseur capacitif alimenté par V_g . On mesure la tension au point milieu (entre C_1 et C_2) et on la compare à $V_g/2$ (référence médiane). On note Z_1 l'impédance de $C_1(x)$ et Z_2 celle de $C_2(x)$.

Impédance d'un condensateur.

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} \quad (\text{unité : } \Omega).$$

Utiliser la formule du diviseur de tension (du point milieu) pour exprimer V_{mes} en fonction de x , V_g , l et ε_r . Montrer que la sortie du capteur (V_{mes}) est linéaire par rapport à déplacement mesuré (x).

4. Sensibilité de la mesure S

Définition de la sensibilité : Ici, la sensibilité (statique) de la mesure est la dérivée de la sortie (tension mesurée) par rapport à l'entrée (déplacement x) :

$$S = \frac{dV_{\text{mes}}}{dx}.$$

Comme V_{mes} est linéaire en x (résultat de 3), S est une constante. Déterminer sa valeur en fonction de V_g , l et ε_r puis donner sa valeur numérique en V/cm puis en V/m.

5. Étendue de mesure (E.M.) et excursion de V_{mes}

L'étendue de mesure (E.M.) est le domaine admissible du mesurande (ici, le déplacement x).

$$\text{Excursion} = \text{valeur maximale} - \text{valeur minimale}$$

Déterminer l'étendue de mesure (E.M.) (en cm) puis en déduire l'excursion de la tension V_{mes} (en V).