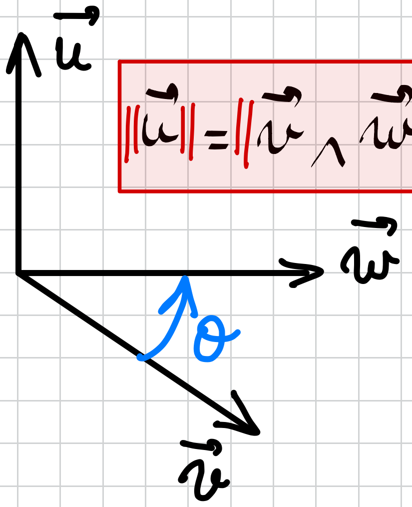
Produit vectoriel

Soient $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteur de $\mathbb{R}^3$.

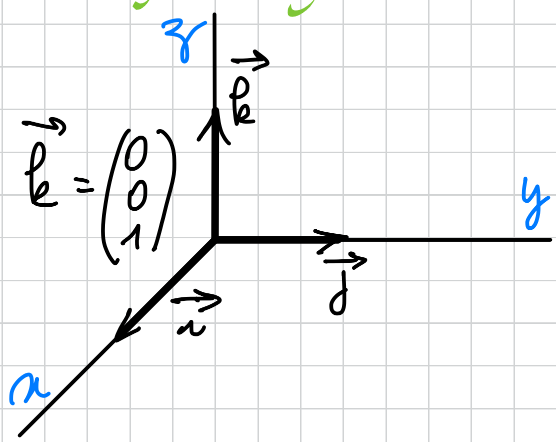
$$\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w} = \vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - y'z \\ zx' - z'x \\ xy' - x'y \end{pmatrix}$$



$$\boxed{\|\vec{u}\| = \|\vec{v} \wedge \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \times \sin\theta}$$

$\|\vec{v}\|$: norme de $\vec{v}$ (sa longueur ≥ 0)

$$\begin{pmatrix} \cancel{x} \\ y \\ z \\ x \\ y \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \cancel{x'} \\ y' \\ z' \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \times z' - y' \times z \\ z x' - z' x \\ x y' - x' y \end{pmatrix}$$



Exemple : $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{k}$$

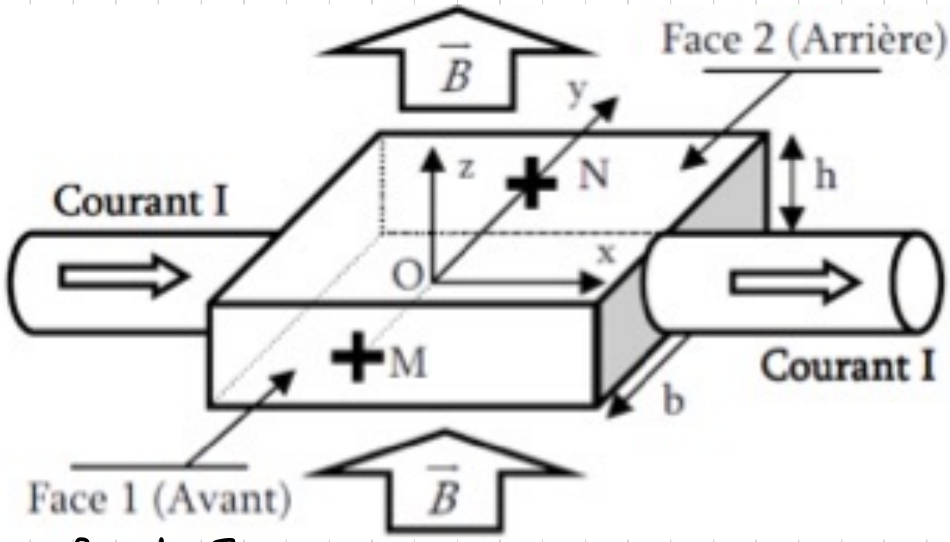
* Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$

$$\vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)(-5) - (-3)(3) \\ 3 \times 1 - (-5) \times 2 \\ 2 \times (-3) - (-1) \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{14^2 + 13^2 + (-5)^2} = \sqrt{14^2 + 13^2 + 5^2} = \sqrt{390} \simeq \underline{\underline{19{,}75}}$$

$\vec{u} \perp \vec{v}$ et $\vec{u} \perp \vec{w}$

TD 4



- n : Nb d'électrons mobiles / unité de Volume

n : $[1/m^3] = [m^{-3}]$

I [Ampère] $= \dfrac{dQ}{dt}$

Q : charge électrique [Coulombs]

$\dfrac{d\bullet}{dt}$ est la vitesse de $\bullet$ $\qquad$ Ampère $= \dfrac{\text{Coulomb}}{\text{seconde}}$

$\vec{J}$: densité de courant $[\text{Ampère}/m^2] = [A \cdot m^{-2}] = [C \cdot s^{-1} \cdot m^{-2}]$

- $\vec{J} = J\vec{e}_x$; $\vec{B} = B \cdot \vec{e}_z$; $J > 0$, $B > 0$

$\vec{v}$: vecteur vitesse des électrons $[m \cdot s^{-1}]$

Q.1 : Champ électrique de Hall

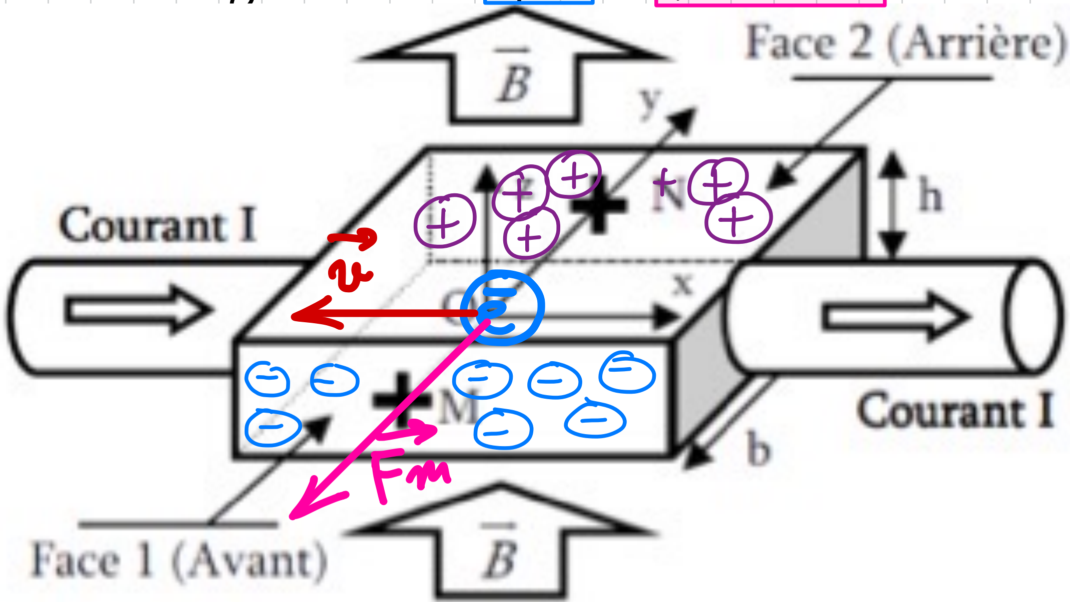
$$\underset{C \cdot m^{-2} s^{-1}}{J} = \underset{m^{-3}}{n}\ \underset{C}{e}\ \underset{m \cdot s^{-1}}{v}$$

1) $\vec{J} = -en\vec{v}$ (le signe $-$ la charge des électrons est négative)

$$\vec{J} = -en\vec{v} \Leftrightarrow \boxed{\vec{v} = -\frac{1}{en}\vec{J}}$$

2) Force de Lorentz : $\vec{F} = \underbrace{\boxed{q\vec{E}}}_{\vec{F_e}} + \underbrace{\boxed{q\vec{v} \wedge \vec{B}}}_{\vec{F_m}}$

$\vec{F_m} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$
$= -ne\,\vec{v} \wedge \vec{B}$



* Quand un champs magnétique $\vec{B}$ est appliqué, une force magnétique $\vec{F_m} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$ est appliquée aux charges <u>en mouvement</u> (vitesse $\vec{v}$).
Cette force est perpendiculaire à $\vec{B}$ et à $\vec{v}$ et elle est de sens opposé à $\vec{v} \wedge \vec{B}$ car la charge q est négative (électrons). Sa direction est donc $-\vec{e_y}$.

* L'accumulation de charges est créé sur les faces avant et arrière de la plaque à cause de cette force $\vec{F_m}$.

3) * Cette accumulation de charge génère un champs électrique $\vec{E_H}$ et les porteurs sont soumis à la force électrique $\vec{F_e}$ qui vient donc s'opposer à la force magnétique : $\vec{F_e} = q\vec{E_H}$

* A l'équilibre, les deux forces s'annulent :

$$\vec{F_m} + \vec{F_e} = \vec{0} \Leftrightarrow q\,\vec{v} \wedge \vec{B} + q\vec{E_H} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{q}\,\vec{E_H} = -\cancel{q}\,\vec{v} \wedge \vec{B} \Leftrightarrow \vec{E_H} = -\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Or, en 1) on a trouvé $\vec{v} = -\frac{1}{ne}\vec{J}$ donc

$$E_H = -\left(-\frac{1}{ne}\vec{J}\right) \wedge \vec{B} \Leftrightarrow \boxed{E_H = \frac{1}{ne}\vec{J} \wedge \vec{B}}$$

4) $$\vec{E_H} = \frac{1}{ne} J\vec{e_x} \wedge B\vec{e_z} = \begin{pmatrix} \frac{J}{ne} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{JB}{ne} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou

$$\vec{E_H} = \frac{1}{ne} JB\, \vec{e_x} \wedge \vec{e_z} = \frac{1}{ne} JB\,(-\vec{e_y})$$

$$\boxed{E_H = \frac{JB}{ne}}$$ 1

Q.2) 1) La tension de Hall est créée par la différence de charge ($\Longleftrightarrow$ diff. de potentiel) entre les plaques M et N : $\boxed{U_H = -E_H\, b}$ 2

2) Montrons que $U_H = \frac{\boxed{C_H}}{h} I B = C_H \frac{IB}{h}$

1 $\Leftrightarrow \vec{E}_H = -\frac{\boxed{J}B}{ne}\vec{e}_y$ or $\boxed{J = \frac{I}{hb}}$ car J est la densité de courant traversant la section de la plaque : $b \times h$

2 $\Leftrightarrow U_H = -(-E_H b) = \boxed{J} \times \frac{B}{ne} \times b$

$U_H = \boxed{\frac{I}{h\cancel{b}}} \times \frac{B}{ne} \times \cancel{b} = \underbrace{\boxed{\frac{1}{ne}}}_{C_H} \cdot \frac{IB}{h}$ avec $\boxed{C_H = \frac{1}{ne}}$ $[m^3.C^{-1}]$ 3

3) $U_H = C_H \frac{IB}{h} \Longleftrightarrow \boxed{B = \frac{U_H h}{I C_H}}$ 4

Pour mesurer un champ magnétique B, on utilise ce dispositif dans lequel on mesure la tension U_H entre les plaques M et N puis on calcule B en utilisant la relation 4 ci-dessus.

$\hookrightarrow$ Il s'agit d'un capteur très simple pour le champ magnétique

Application numérique : Pour une plaque InSb :

$C_H = 375 \times 10^{-6}\ m^3.C^{-1}$. Données expérimentales :

$I = 0{,}1\ A$; $h = 0{,}3\ mm = 0{,}3 \times 10^{-3}\ m$;

on mesure : $U_H = 88\ mV = 88 \times 10^{-3}\ V$.

1) Le champ magnétique se calcule par la relation 4 : $B = \frac{U_H h}{I C_H} = \frac{88 \times \cancel{10^{-3}} \times 0{,}3 \times \cancel{10^{-3}}}{0{,}1 \times 375 \times \cancel{10^{-6}}} = \boxed{0{,}704\ T}$

2) Calcul de la densité volumique des porteurs :

3 $\Leftrightarrow C_H = \frac{1}{ne} \Longleftrightarrow n = \frac{1}{C_H e} = \frac{1}{375 \times 10^{-6} \times 1{,}60218 \times 10^{-19}} \simeq \boxed{1{,}66 \times 10^{22}\ \bar{e}.m^{-3}}$