

TD4 : Prédicats

Exercice 1 Formules et variables libres Parmi les propositions suivantes, trouvez lesquelles sont des formules incorrectes (qui ne respectent pas la définition du cours). Sur les formules correctes, entourez les variables libres.

1. $\forall x P(y)$
2. $\exists x \exists x \exists y (\forall z Q(x) \rightarrow Q(y))$
3. $\exists x P(x) \rightarrow (\forall x \rightarrow Q(x))$
4. $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x) \wedge Q(y))$
5. $\forall x P(x) \rightarrow Q(x)$
1. $Q(y) \wedge (\forall x P(x) \rightarrow \exists y P(x)) \wedge Q(z)$
2. $\neg \forall x \neg \exists y (P(x_1) \vee Q(y)) \rightarrow P(x)$
3. $\neg (P(x) \wedge \forall x Q(x \wedge P(y)) \rightarrow R(y))$
4. $\forall xy, P(x) \rightarrow Q(y)$
5. $P(x_1) \vee P(x_2) \vee P(x_3) \vee P(x_4) \vee \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \exists x_4 Q(x_1) \vee Q(x_2) \vee Q(x_3) \vee Q(x_4)$

Exercice 2 Traduction (version)

- P : « Mammifère »
- Q : « Ovipare »
- R : « Volants »

Le domaine de définition est celui des animaux.

1. Il existe au moins un mammifère ovipare¹, mais qui n'est pas volant.
2. Tous les animaux volants ne sont pas ovipares.
3. Un animal volant qui n'est pas ovipare est forcément un mammifère².
4. Si tous les mammifères sont volants et si tous les animaux volants sont ovipares, alors tous les mammifères sont ovipares.

Exercice 3 Traduction (version) On considère deux symboles de prédicats : P : « Pair », Q : « Premier »
Le domaine de définition est celui des entiers naturels $\mathbb{N}$. Traduisez les phrases suivantes.

1. Il existe un nombre pair qui est premier.
2. Tous les nombres premiers ne sont pas des nombres impairs.
3. Si un nombre est pair et impair, alors il est premier.
4. Si tous les nombres premiers sont pairs, alors les nombres impairs ne sont pas premiers.

Exercice 4 Traduction (thème) Pour les formules suivantes, donnez une traduction en français. L'interprétation est la suivante, où le domaine est celui des êtres humains.

- P = « Artistes »
 - Q = « Sérieux »
1. $\forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$
 2. $\forall x (Q(x) \rightarrow \neg P(x))$
 3. $\neg \forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x)) \wedge \exists y \neg (Q(y) \wedge P(y))$
 4. $\forall y P(y) \rightarrow \exists x (Q(x) \wedge P(y))$

1. C'est le cas de l'ornithorynque ou de l'échidné australien.
2. C'est le cas de la chauve-souris.

Exercice 5 Rappel Rappelez la définition d'une interprétation pour le calcul des prédicats.

Exercice 6 Sémantique Considérons un langage avec les symboles de prédicats, P, Q , et R , et deux interprétation pour ce langage :

- $I_1 : D = \{\star, \bullet, \diamond\}, \llbracket P \rrbracket = \{\star, \diamond\}, \llbracket Q \rrbracket = \{\star\}, \llbracket R \rrbracket = \{\bullet, \diamond\}$
- $I_2 : D = \{\star, \bullet, \diamond, \circ\}, \llbracket P \rrbracket = D, \llbracket Q \rrbracket = \{\star, \circ\}, \llbracket R \rrbracket = \{\bullet, \diamond\}$
- $I_3 : D = \mathbb{N}, \llbracket P \rrbracket = \{k \mid k \in \mathbb{N} \text{ et } k \text{ premier}\}, \llbracket Q \rrbracket = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}, \llbracket R \rrbracket = \{2\}$.
- $I_4 : D = \{1, 2, 3\}, \llbracket P \rrbracket = \emptyset, \llbracket Q \rrbracket = \llbracket P \rrbracket, \llbracket R \rrbracket = \{2, 4, 6, 8\}$

Pour chacune des interprétations, déterminez et démontrez la vérité ou fausseté des formules suivantes :

1. $\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \vee R(x)))$
2. $\forall z(Q(z) \rightarrow P(z)) \wedge \exists y \neg(Q(y) \vee R(y))$
3. $\exists x(R(x) \wedge P(x) \wedge Q(x)) \vee \forall x P(x)$

Exercice 7 Vérité des formules dans une interprétation fixée On fixe une interprétation pour un langage avec deux symboles de prédicats P, Q . Domaine = $\mathbb{R}$, $\llbracket P \rrbracket = \mathbb{N}$, $\llbracket Q \rrbracket = \mathbb{Q}^3$.

Pour chacune des formules suivantes, déterminez elle est vraie dans l'interprétation ou non. Rédigez une démonstration précise.

1. $\exists x \neg Q(x)$
2. $\forall x(P(x) \vee Q(x))$
3. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$
4. $\forall x Q(x) \rightarrow \exists y \neg P(y)$
5. $\forall x \forall y ((\neg Q(x) \vee \neg Q(y)) \rightarrow (\neg P(x) \vee \neg P(y)))$

Exercice 8 Interprétations des formules Pour chacune des formules suivantes, proposez une interprétation dans laquelle elle est vraie, et une interprétation dans laquelle elle est fausse (cherchez les exemples les plus simples possibles)

1. $\forall x P(x) \wedge \exists y \neg Q(y)$
2. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$
3. $\exists y(\neg P(y) \vee \neg Q(y))$
4. $\exists x \forall y(P(y) \rightarrow Q(x))$

Exercice 9 Théorèmes Pour chacune des formules suivantes, déterminez si c'est un théorème du calcul des prédicats, en justifiant précisément votre réponse.

1. $\forall x(P(x) \vee Q(x))$
2. $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\forall y P(y) \wedge \forall z Q(z))$
3. $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall y P(y) \vee \forall z Q(z))$
4. $\exists x(P(x) \vee \neg P(x))$
5. $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y P(y))$
6. $\exists x(P(x) \rightarrow \forall y P(y))$
7. $\exists x P(x) \rightarrow \forall y P(y)$

Exercice 10 Modèles minimaux (avancé) Pour une formule avec un seul symbole de prédicat P , une interprétation avec deux éléments est toujours suffisante pour la rendre vraie ou fausse. Pourquoi ?

Si l'on a plus de prédicats, ça devient faux (par exemple pour valider la formule $\exists x \exists y \exists z (P(x) \wedge Q(x) \wedge \neg P(y) \wedge \neg Q(y) \wedge P(z) \wedge \neg Q(z))$, il faut au moins trois éléments dans le domaine). Si l'on a n prédicats, donnez une borne supérieure au nombre d'éléments du domaine nécessaires à une interprétation qui valide ou qui invalide une formule.

3. On rappelle que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. C'est en fait tout ce que nous avons besoin de savoir...