ANNEXE (1) au CM de GEOMETRIE, Master Meef M1

DEFINITION DU PARTAGE EN “ EXTREME ET MOYENNE RAISON ”

Dans le livre VI de ses “ ***Eléments*** ”, Euclide définit un certain ***rapport*** entre les segments d’une droite « partagée » par un point. Cela lui permet, entre autres, **de construire** « plus facilement » (***à la règle et au compas***) **le pentagone régulier et le décagone régulier**.

On retrouve en 1498 ce “ **partage** ” dans le livre “ ***la divine proportion*** ” de Fra Lucas Pacioli. (Un moine italien de la Renaissance qui popularisa les œuvres d’Euclide).

Plus tard, lui sera attribué le nom de “ ***section d’or*** ” et « ***ce nombre*** » qui mesure ce rapport aura, pour la beauté des œuvres des hommes, une importance extrême.

Il suscitera chez les architectes, les peintres, les sculpteurs, une fascination et jouera un rôle fondamental. Il s’appellera “ ***nombre d’or*** ”. Sa valeur exacte est :

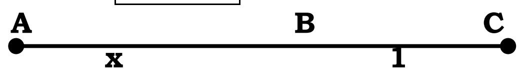
$$\boxed{\textbf{\textit{phi}} = \varphi = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}}$$

Mais que disait Euclide ?

C’est simple : pour partager la portion de droite **(AC)** en “ ***extrême et moyenne raison*** ”, il faut déterminer un certain point **B** placé entre **A** et **C**. Ce point doit être situé de telle façon que :

> « ***Le rapport grand segment sur petit segment soit égal au rapport (petit + grand) segment sur grand segment*** ».

Autrement dit, tel que : $\boxed{\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{AB}}$ Schéma : voir ci-dessous :



Bref, *le “ partage ” d’Euclide, c’est de la géométrie élémentaire*. Mais où sont les nombres là-dedans ?

Si on pose que le « petit » segment **[BC]** est de longueur **1**, quelle est la longueur x du « grand » segment **[AB]** ?

Si **AB** = x et **BC** = 1 alors **AC** = x + 1. Et, par définition, $\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{AB}$.

Remplaçons ces quatre segments de droite par leurs équivalents “ en x ”.

$\frac{AB}{BC}$ devient $\frac{x}{1}$ et $\frac{AC}{AB}$ devient $\frac{(x+1)}{x}$. Donc $\frac{x}{1} = \frac{(x+1)}{x}$ d’où $x^2 = x + 1$ et enfin $\boxed{x^2 - x - 1 = 0}$.

Cette équation admet deux solutions dont l’une est : $\boxed{x = \frac{(\sqrt{5}+1)}{2}}$, soit le célébrissime nombre d’or baptisé **φ** (lettre grecque lue : ***phi***) et dont la valeur décimale arrondie à 10^{-20} est : ***1,61803398874989484820***. (Ouf !).

(EXTRAIT du DOSSIER : « ***RALLYE MATHEMATIQUE du CENTRE*** », ***année scolaire 1999/2000.***
Classe de 2nde 9 du lycée RONSARD de VENDOME (41100)).

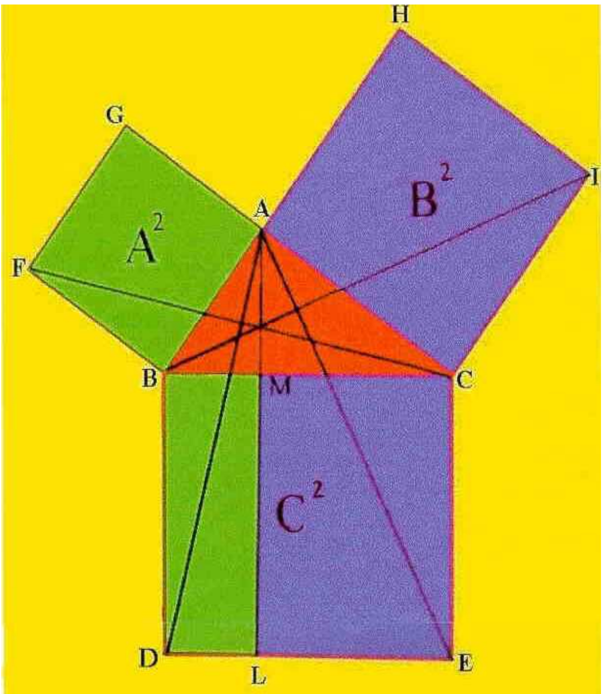
ANNEXE (2)

Le théorème de PYTHAGORE : la démonstration D'EUCLIDE.

Bien qu'il ne soit pas habituellement formulé ainsi, voici le problème le plus célèbre de la « **Géométrie Alexandrine** ».

« L'an dernier, je possédais deux petits carrés au bord du Nil ; je voudrais cette année n'en avoir qu'un, de surface équivalente au total des deux premiers »

Vous avez reconnu ***le théorème de Pythagore*** ! En voici une démonstration selon Euclide.



PREMIER livre, proposition XLVII :

Enoncé : « ***Dans les triangles rectangles, le carré du côté opposé à l'angle droit est égal aux carrés des cotés qui comprennent l'angle droit*** ».

Démonstration :

❋ Puisque chacun des angles $\widehat{\mathbf{BAC}}$, $\widehat{\mathbf{BAG}}$ sont droits, alors les droites **(AC)**, **(AG)** (*placées du même « côté »*) font avec la droite **(BA)** au point **A** de cette droite, deux angles égaux et droits. Donc, la droite **(CA)** est dans la *direction* de **(AG)**.

❋ Par démonstration semblable, **(BA)** est dans la direction de **(AH)**.

❋ Chacun des angles $\widehat{\mathbf{DBC}}$ et $\widehat{\mathbf{FBA}}$ est égal à l'angle droit.

❋ La somme des angles $\widehat{\mathbf{DBC}}$ et $\widehat{\mathbf{ABC}}$ vaut celle des angles $\widehat{\mathbf{FBA}}$ et $\widehat{\mathbf{ABC}}$.

❋Puisque **DB** = **BC** et **FB** = **BA**. L'angle $\widehat{\mathbf{DBA}}$ est égal à l'angle $\widehat{\mathbf{FBC}}$, alors **DA** = **CF**.
Les aires des triangles **(ABD)** et **(FBC)** sont donc égales.

❋L'aire de **(BDLM)** est égale à deux fois celle du triangle **(ABD)** (*Car lorsque le sommet d'un triangle se déplace parallèlement au côté opposé, l'aire du triangle ne change pas*).

❋ De façon semblable celle de (**BFGA**) vaut deux fois celle triangle **(FBC)**.

❋Donc, les parallélogrammes **(BDLM)** et **(GFBA)** ont même aire (*Puisque les triangles **(ABD)** et **(FBC)** également*).

❋En joignant **A** à **E** et **B** à **I**, nous démontrons de façon semblable que les parallélogrammes **(CMLE)** et **(HACI)** ont même aire.

❋**Le carré (BDEC) est de surface égale à la somme des surfaces des carrés (GFBA) et (HACI)**, c'est à dire en reprenant les notations de la figure : $\boxed{\textbf{aire } (A^2) + \textbf{aire } (B^2) = \textbf{aire } (C^2)}$.

❋**Le carré du côté [BC] est donc égal à la somme des carrés des côtés [BA] et [AC]**, c'est à dire :

$$\boxed{AB^2 + AC^2 = BC^2}.$$

DOSSIER « **RALLYE MATHEMATIQUE du CENTRE** ».
CLASSE de SECONDE du LYCEE RONSARD, VENDOME, 41100, année 1999/2000.

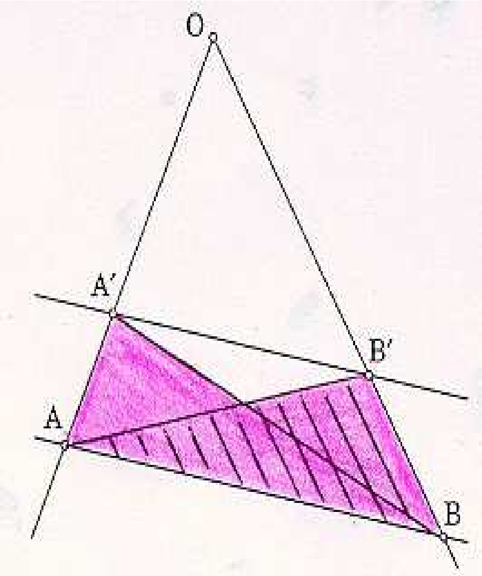
ANNEXE (3)

Le théorème de THALES : La démonstration D'EUCLIDE.

Sixième livre proposition II :

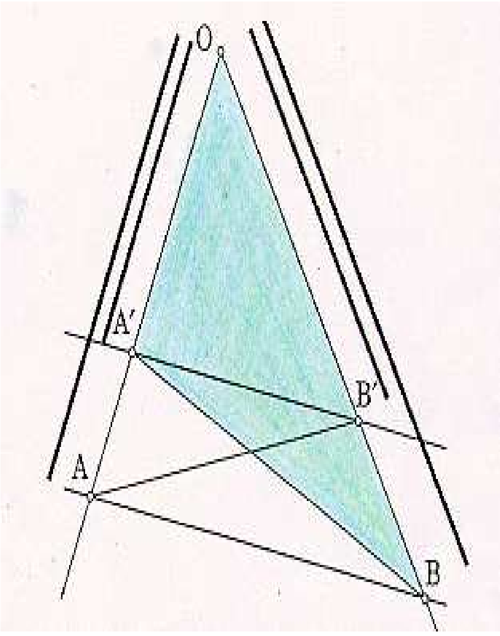
« **Que l'on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle et si les côtés du triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle**. »

Démonstration (selon Euclide) :



1. La « figure » de Thalès est formée par un triangle **(OAB)** et une parallèle **(A'B')** au côté **[AB]** de ce triangle.

2. Lorsque le sommet d'un triangle se déplace parallèlement au côté opposé, l'aire du triangle ne change pas. *Pourquoi* ? Les aires des triangles **(A'AB)** et **(B'AB)** sont donc égales.



3. Considérons le triangle **(AOB)**, par soustraction des aires précédentes, on en déduit que les aires des triangles **(OA'B)** et **(OB'A)** sont égales.

4. Dans le triangle **(OAB)**, le rapport des aires de **(OA'B')** à celle de **(OA'B)** est égal au rapport des longueurs de **[OB']** à celle de **[OB]**. Mais ce même rapport des aires de **(OA'B')** à **(OA'B)** vaut celui de **(OA'B')** à **(OB'A)**, et dans ce dernier triangle, ce rapport est égal au rapport des longueurs de **[OA']** à celle de **[OA]**. Finalement :

$$\boxed{\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}}$$

DOCUMENT extrait du DOSSIER « **RALLYE MATHEMATIQUE du CENTRE** ».
CLASSE de SECONDE du LYCEE RONSARD, VENDOME, 41100, année 1999/2000.

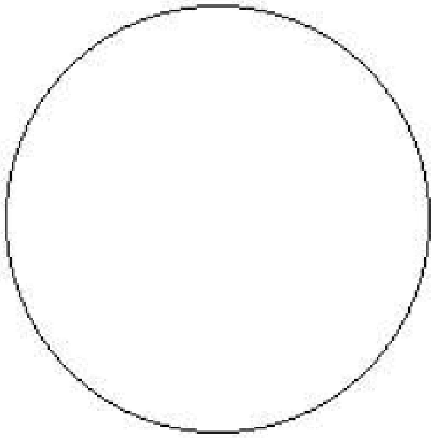
Note de ***PW***. il manque un rapport dans l'égalité ci-dessus, c'est : $\frac{A'B'}{AB}$. Le théorème de Thalès enseigné en France donne trois rapports égaux. Il y a d'autres versions de ce théorème ; en effet, il y a d'autres « façons » de décrire mathématiquement la « dynamique » qui se cache derrière ***la configuration de Thalès***.

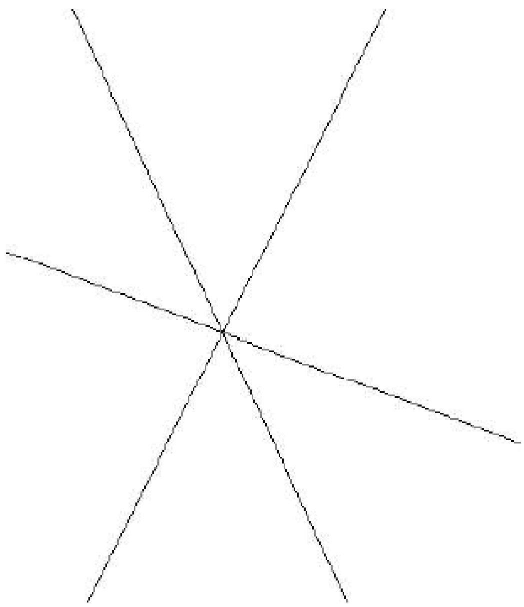
ANNEXE (4) : des exercices « au format » du CRPE

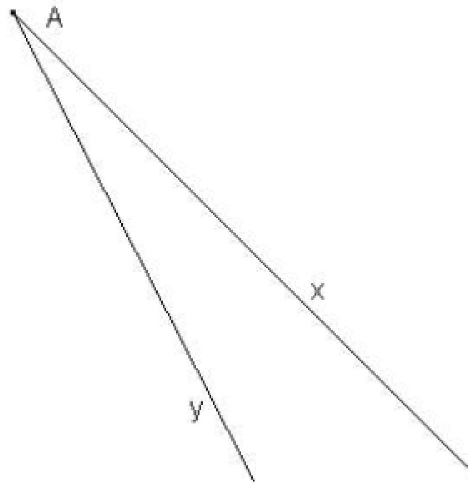
Constructions dites « à la règle et au compas ».

Remplir les trois tableaux ci-dessous en complétant chaque fois la figure et en laissant visibles tous les traits de construction.

Indiquer brièvement dans la troisième colonne les étapes de la construction, préciser en particulier s'il y a plusieurs figures solutions possibles.

Question	Figure à compléter	Étapes de la construction
1/ Construire le centre O de ce cercle		

2/ Construire un triangle ABC tel que les trois droites ci-contre soient ses trois hauteurs.		

3/ Construire un triangle ABC, tel que [Ax) soit une bissectrice et (Ay) une hauteur.		

Les constructions. Pistes de solution : quelques étapes de la construction.

1. Placer trois points (distincts) A, B et C sur le cercle. Le centre O est le point d'intersection de la médiatrice de [AB] et de celle de [BC]. Il n'y a qu'un seul point O. *Une question : pourquoi les deux médiatrices sont-elles « obligatoirement » sécantes ?*

2. Choisissons une des trois hauteurs, appelons-la (***h***). Tracer une droite perpendiculaire à (***h***). Cette droite coupe les deux autres hauteurs en A et en B. À partir du point A, tracer la perpendiculaire à la hauteur passant par B. Cette droite coupe (***h***) au point C. (ABC) est un triangle solution.

Ce n'est pas le seul. En effet, nous avons le choix de la hauteur (***h***) et de la perpendiculaire à (***h***).

3. Tracer une demi-droite [Az). Tracer la demi-droite [At), symétrique de [Az) par rapport à (Ax). Tracer une droite perpendiculaire à (Ay). Cette droite coupe [Az) et [At) aux points C et B. (ABC) est un triangle solution.

Ce n'est pas le seul. En effet, nous avons tracé arbitrairement [Az) et la perpendiculaire à (Ay).