PROBLEME 1 : *Partie 1*, un exercice de géométrie « classique »
Partie 2, un exercice d'analyse de productions d'élèves. *D'après CRPE 2009.*

Partie 1. On considère deux points **A** et **B** du plan distants de 6cm.

1) **a.** Le point **C**$_1$ est sur le segment **[AB]** et vérifie la condition **BC**$_1$=2**AC**$_1$. Quelle est la longueur du segment **[AC**$_1$**]** ? Justifier.

b. Le point **C**$_2$, distinct du point **C**$_1$, est sur la droite **(AB)** et vérifie la condition **BC**$_2$=2**AC**$_2$. Quelle est la longueur du segment **[AC**$_2$**]** ? Justifier.

c. Placer, avec une règle graduée, les points **A**, **B**, **C**$_1$ et **C**$_2$ sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure des questions.

On s'intéresse maintenant aux points **C** du plan n'appartenant pas à la droite **(AB)** et vérifiant la condition **BC** = 2AC. On appelle x la longueur de **[AC]**, l'unité de mesure des longueurs étant le centimètre.

2) **a.** Existe-t-il des points **C** correspondant à la valeur $x = 9$? Justifier la réponse. Dans le cas d'une réponse positive, construire ces points.

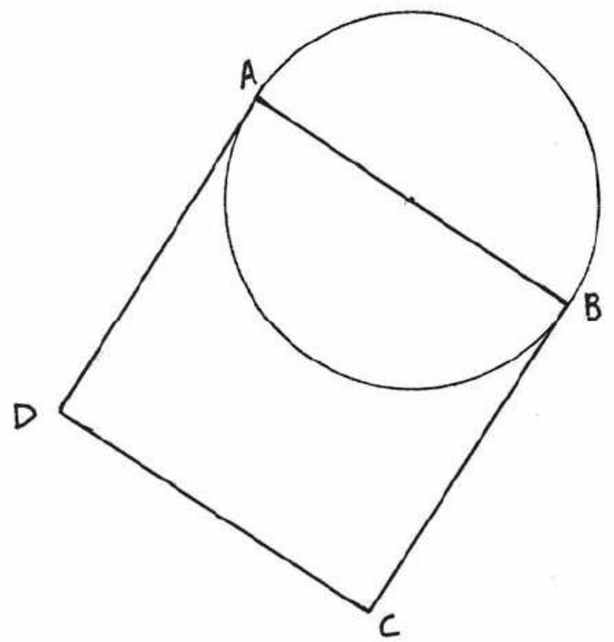
b. Existe-t-il des points **C** correspondant à la valeur $x = 5$? Justifier la réponse. Dans le cas d'une réponse positive, construire ces points.

3) Calculer la valeur de x pour laquelle le triangle **ABC** est rectangle en **C**. Ecrire le résultat sous la forme $a\sqrt{5}$.

4) Montrer qu'il existe une seule valeur de x pour laquelle le triangle **ABC** est isocèle.
Déterminer cette valeur et placer les points correspondants sur la figure en laissant apparents les tracés nécessaires à cette construction.

Partie 2. Dans une classe de cycle III, à deux niveaux (CE2/CM1), une enseignante *PE* (*?*) a proposé, au début du deuxième trimestre, l'activité suivante à l'ensemble de ses élèves afin d'évaluer leurs niveaux respectifs :

Consigne de l'enseignante :
Écris un texte pour permettre à quelqu'un de construire cette figure sans l'avoir vue.



Note 1 : *La figure reproduite ci-dessus n'est pas en vraie grandeur. Sur le modèle fourni aux élèves, le côté du carré a pour longueur 6cm.*

Note 2 : *L'activité de classe est « basée » sur les programmes 2008. Donc, il est indispensable d'y faire référence !*

Trois productions d'élèves sont proposées en *Annexe 1*.

1) On s'intéresse aux productions des élèves de CE2 (élèves A et B).

a. Dans les productions des élèves A et B, du vocabulaire géométrique est utilisé, parfois à bon escient, parfois non. Certains mots, qui seraient pourtant utiles, ne sont pas présents. Relever et classer ces mots dans un tableau comme celui ci-dessous (qu'on aura recopié sur la copie) :

vocabulaire	adapté	mal utilisé	manquant
Elève A			
Elève B			

b. Qu'est-ce qui permet de penser que la notion de cercle n'est pas complètement acquise pour les élèves A et B ?

c. Proposer un exercice qui permettrait à l'enseignante de s'assurer que l'élève B a acquis ou non la compétence « reconnaître un carré ».

2) Il est classique de faire valider les messages rédigés par les élèves en faisant construire la figure obtenue par des élèves qui ne l'auraient pas vue (situation d'émission/réception).
Donner une difficulté à laquelle on doit s'attendre avec cette modalité.

3) On s'intéresse à la production de l'élève C, qui est en CM1.

a. Il n'utilise pas le mot carré mais il en connaît certaines propriétés. Au vu de sa production, citer les propriétés du carré qu'il connaît.

b. Qu'est-ce qui permet de penser que la notion de cercle est, ou n'est pas, acquise par cet élève ?

c. Le texte produit par l'élève C conduit-il à une construction exacte ? Justifier.

PROBLEME 2 : *Partie 1*, un exercice de géométrie « classique »
Partie 2, un exercice d'analyse de documents pédagogiques. *D'après CRPE 2008.*

Partie 1. **ABC** est un triangle dans lequel l'angle de sommet **A** est aigu.
On considère le cercle de diamètre **[BC]**. Il coupe les droites **(AB)** et **(AC)** respectivement en **D** et **E**. Les droites **(BE)** et **(CD)** se coupent en **H**.

1) Faire une figure.

2) Démontrer que les droites **(AH)** et **(BC)** sont perpendiculaires.

3) Construire sur votre figure, avec la règle non graduée et le compas, le point **M**, quatrième sommet du parallélogramme **BCMA** et le point **N**, quatrième sommet du parallélogramme **BCAN**. Laisser les traits de construction apparents.

4) Démontrer que le point **A** est le milieu de **[MN]**.

Partie 2. Vous trouverez en **ANNEXE 2** une collection de six figures, réalisée dans un réseau quadrillé, à partir de laquelle un enseignant propose « ***le jeu du portrait*** » suivant à ses élèves de CM2 :

« J'ai quatre sommets ;
Mes diagonales ne sont pas perpendiculaires ;
Mes côtés n'ont pas tous la même longueur ;
Je possède au moins un angle droit. **Qui suis-je ?** »

Tu dois répondre par une lettre *: « il s'agit de la figure … »*

1) Est-il possible de supprimer une ligne (ou une phrase) dans ce « ***jeu du portrait*** » sans incidence sur la réponse attendue ? Si oui, laquelle ? Justifier.

2) Relever deux difficultés liées à la formulation des phrases utilisées dans ce jeu du portrait.

3) En se référant à l'**annexe 2,** citer une connaissance et une capacité travaillées lors de cette activité.

4) Les figures sont présentées sur un support quadrillé. Indiquer deux conséquences, liées au choix de ce support, sur les procédures des élèves.

ANNEXE 1. Les trois productions d'élèves. Partie 2 du PROBLEME 1

ELEVE A (CE2)

Prend un crayon de papier et une règle.
Fait un carré de 6 cm long et 6 cm de large
et met des lettres.
Ensuite fait un rond qui rentre un peut dans le carré
le rond doit mesuré 6 cm de long et 6 cm de large

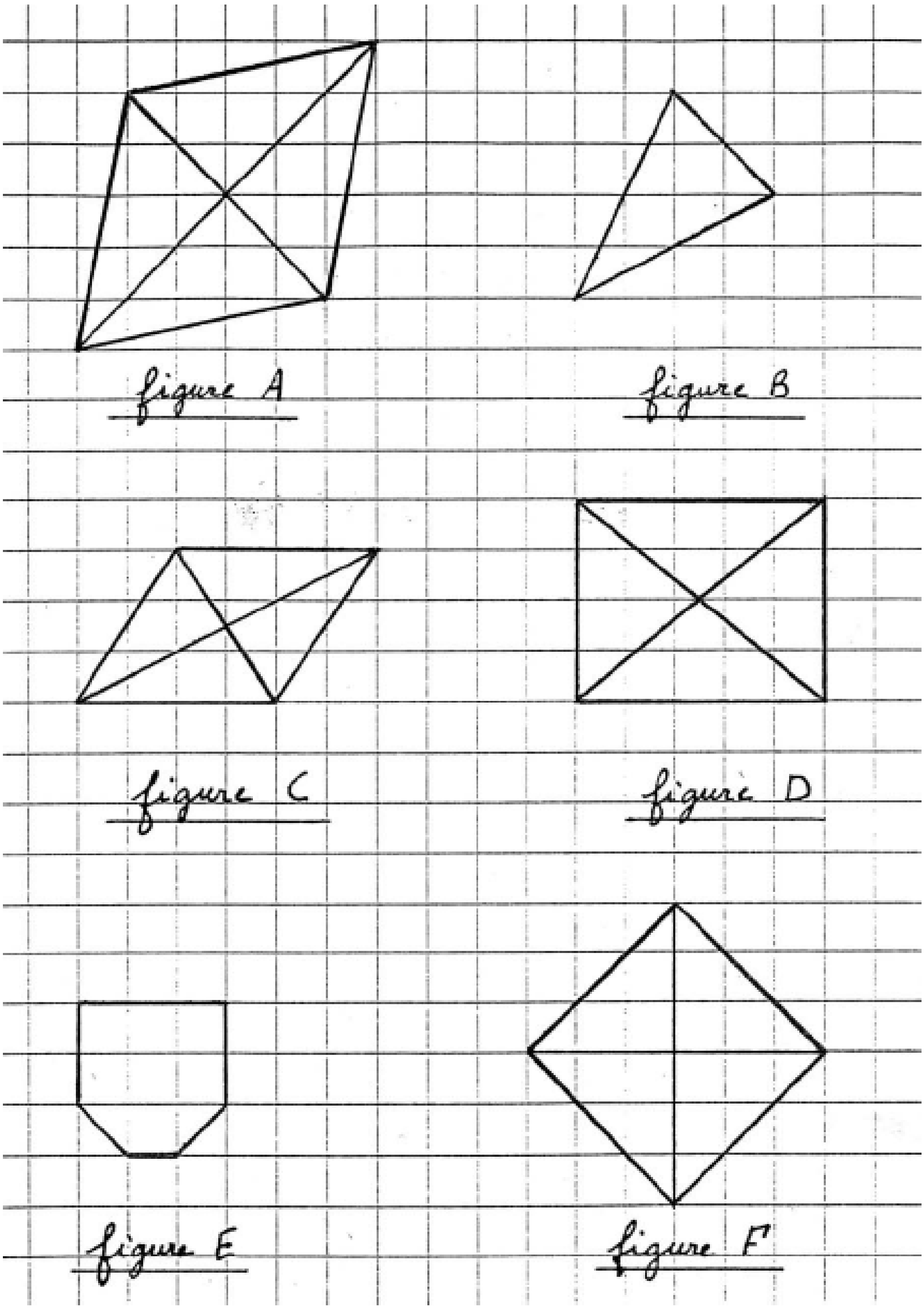
ELEVE B (CE2)

tracer un rectangle de 6 cm sur 6. avec un compas tracer aussi un demi cercle à l'aintérieur du rectangle et son autre moitié à l'extérieur cela va doné une sfère qui doit être posé sur une arête du rectangle.

ELEVE C (CM1)

Trace un segment A-B de 6 cm de longueur.
Puis tracé le segment B-C de 6 cm de longueur en formant un angle droit.
Tacé le segment A-D de 6 cm de longueur formant un angle droit parallèle au segment B.C
Puis rejoindre les points C et D.
Placer la pointe du compas au milieu du segment A.B
Prendre une écartement de 3 cm
Puis tracé le rond.

ANNEXE 2. Les six figures. Partie 2 du PROBLEME 2



« Pistes » de *CORRECTION*, d'après corrigé *COPIRELEM*

<u>*AVERTISSEMENT*</u> : pour ce corrigé, l'accent est surtout mis sur les deuxièmes parties de chacun des deux exercices. Pas de correction détaillée pour les items des parties strictement mathématiques.

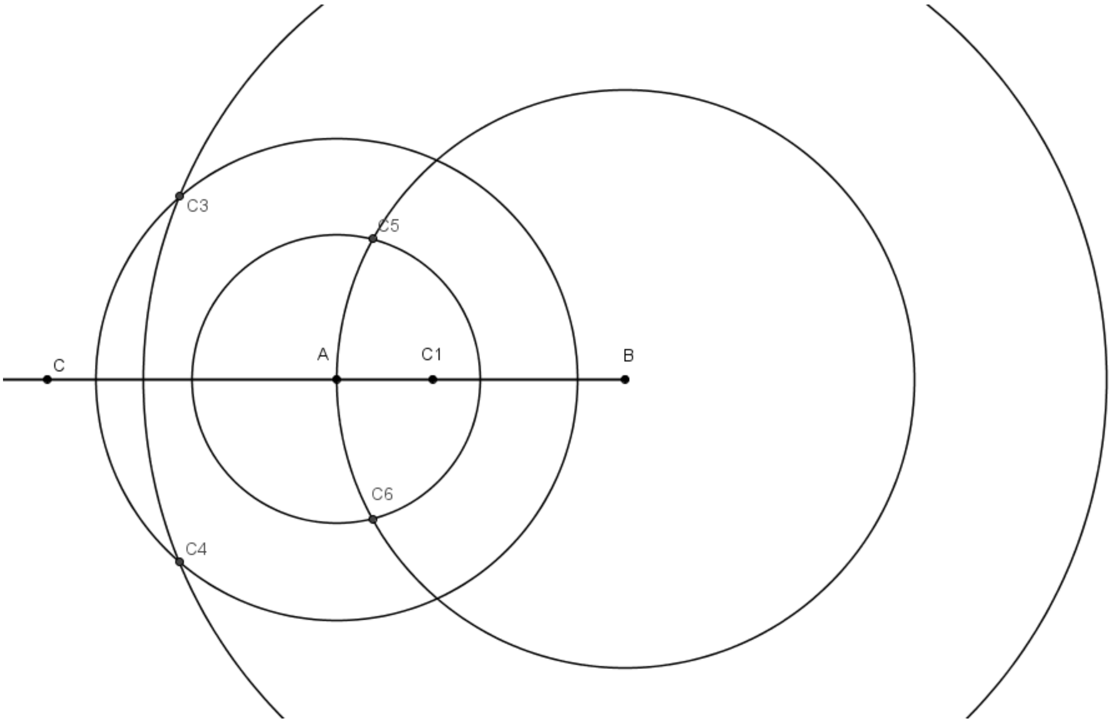
EXERCICE 1

<u>*Partie 1.*</u>

<u>Question 1</u>. ***a***) Le point $\mathbf{C_1}$ appartient au segment **[AB]**, avec **AB** = $\mathbf{AC_1}$ + $\mathbf{C_1B}$ et **AB** = 3 × $\mathbf{AC_1}$, d'où : $\mathbf{AC_1}$ = 2cm.

b) Il faut d'abord justifier que le point $\mathbf{C_2}$ appartient à la demi-droite issue de **A**, ne contenant pas le point **B** ; … ; on trouve $\mathbf{AC_2}$ = 6cm.

c) <u>*Figure*</u> : à compléter au fur et à mesure (*Cf. ci-dessous : version finie de la figure, à l'échelle, mais dimensions non respectées*).



<u>Question 2</u>. ***a***) Existence des points **C** pour $\boldsymbol{x}$ = 9(cm). *Pour cette question, les points **A**, **B** et **C** ne sont plus alignés, ils sont donc les sommets d'un triangle, lorsque le point **C** existe ! (Inégalité triangulaire, ah oui !).*

Pour $\boldsymbol{x}$ = 9, on a : **AB** = 6cm, **AC** = 9cm et **BC** = 18cm ; ce qui implique : **BC** > **AB** + **BC**, contradictoire avec l'inégalité triangulaire. Donc, pas de point **C** répondant à la contrainte $\boldsymbol{x}$ = 9(cm). <u>*Autre piste*</u> : tracer de deux cercles particuliers (*centres et rayons à préciser*) et existence ou pas de points d'intersection de ces deux cercles.

b) Existence de points **C** pour $\boldsymbol{x}$ = 5(cm). Même type de raisonnement que pour l'item ***a***). On trouve deux points $\mathbf{C_3}$ et $\mathbf{C_4}$, symétriques par rapport à **(AB)**. Cf. figure.

<u>Question 3</u>. Valeur de $\boldsymbol{x}$ pour laquelle **(ABC)** est rectangle en **C**. *It smells Pythagore* ! <u>*Rappel*</u> : **(ABC)** est rectangle en **C** ⇔ $\mathbf{AB^2} = \mathbf{AC^2} + \mathbf{BC^2}$. On a : **AB** = 6(cm), **AC** = $\boldsymbol{x}$(cm) et **BC** = 2$\boldsymbol{x}$(cm). *Calculs…* $36 = 5\boldsymbol{x}^2$, d'où $\boldsymbol{x} = \sqrt{(36/5)} = 6/5\sqrt{5} = 1{,}2\sqrt{5}$.

<u>Question 4</u>. Il existe une seule valeur de $\boldsymbol{x}$ pour laquelle **(ABC)** est isocèle en ? Trois cas à étudier : isocèle en **C**, isocèle en **B** ou isocèle en **A**.

(i) Isocèle en **C** ? Dans ce cas, **AC** = **BC**, c'est-à-dire : $\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x}$, d'où $\boldsymbol{x} = 0$, impossible.

(ii) Isocèle en **A** ? Dans ce cas, $\boldsymbol{x}$ = 6(cm), c'est-à-dire : **BC** = **AC** + **AB**, les points sont alignés (car les points **A** et **B** sont distincts), donc cas exclu.

(iii) Isocèle en **B** ? Dans ce cas, $\boldsymbol{x}$ = 3(cm), d'où les trois dimensions : 6(cm), 6(cm) et 3(cm). Cf. figure et les points $\mathbf{C_5}$ et $\mathbf{C_6}$.

Partie 2.

Question 1-***a***) Etude des productions des élèves $\boxed{A}$ et $\boxed{B}$. *Un conseil* : rédiger ***UN*** programme de construction possible. *Cela a essentiellement pour fonction d'apporter une aide dans toutes les analyses qui vont suivre.*

1) Tracer un carré de côté 6cm. (Inutile de détailler la construction du carré).
2) Appeler **A**, **B**, **C** et **D** les sommets de ce carré (*Nommer les sommets va faciliter la suite de la rédaction du programme, non exigible au primaire*).
3) Marquer le point **M**, milieu du côté **[AB]**.
4) Tracer le cercle de centre **M** et de rayon à préciser (*soit en précisant la valeur du rayon, soit en utilisant une expression de la forme « passant par », soit en donnant un diamètre, soit…*).

Vocabulaire	*Adapté*	*Mal utilisé*	*Manquant*
Elève $\boxed{A}$	carré	long, large	côté, sommet, cercle, centre, milieu, rayon ou diamètre, expression idoine…
Elève $\boxed{B}$	rectangle, demi-cercle, intérieur et extérieur	sphère, arête	côté, sommet, centre, milieu, rayon, ou diamètre, expression idoine…

Question 1-***b***) Sur les productions produites, la « notion » de cercle n'est pas encore acquise pour les élèves $\boxed{A}$ et $\boxed{B}$. L'objet cercle n'est pas caractérisé par le « bon » vocabulaire (*centre, rayon, diamètre, « passant par », …*). De plus, l'élève $\boxed{A}$ est encore dans une approche perceptive : il parle encore de « rond » ; quant à l'élève $\boxed{B}$, sa production relève d'un « effet contrat » : il emploie du « bon » vocabulaire géométrique (*sphère et arête*), mais pas dans le bon domaine. Débat en ***TD*** sur cette affaire de vocabulaire !

Question 1-***c***) Incontournable : une question sur une compétence !
Compétence en jeu : évaluer la compétence « reconnaître un carré ». Un contre-sens à éviter : reconnaître ≠ construire ou tracer, donc, pas d'exercice ou d'activité avec les verbes « construire » ou « tracer » ou des tâches s'y reportant…

Un exemple : A partir d'une fiche où plusieurs quadrilatères sont représentés, extraire les carrés et les rectangles. Les variables didactiques : support de travail, instruments autorisés, validations possibles, … *Consigne(s) de la forme* : « Parmi les quadrilatères suivants, quels sont ceux qui sont des carrés ? » ; « comment peut-on reconnaître un carré, expliquer… ».

Question 2. La situation « émetteur-récepteur » est un dispositif adapté pour de genre de tâche. Mais, ce dispositif contient des difficultés propres. C'est l'objet de la question.

(i) Message de l'émetteur mathématiquement correct et production du récepteur « fausse », car difficultés. Quelques une de ces difficultés : « lecture » (*bon, encore et toujours, mais DEBAT !!!*), non-maîtrise des notions mathématiques en jeu ; difficultés pour enchaîner les étapes de construction relatives à un programme de construction ; difficultés dans l'utilisation des instruments.

(ii) Message de l'émetteur incorrect, mais la figure est suffisamment connue, voire, emblématique pour que le récepteur en réalise une correctement. Difficulté pour le *PE* : quoi évaluer ? D'où l'argument fort pour le *PE* : proposer des (constructions de) figures où l'implicite est minoré et où le *PE* peut valider des « passages » obligés.

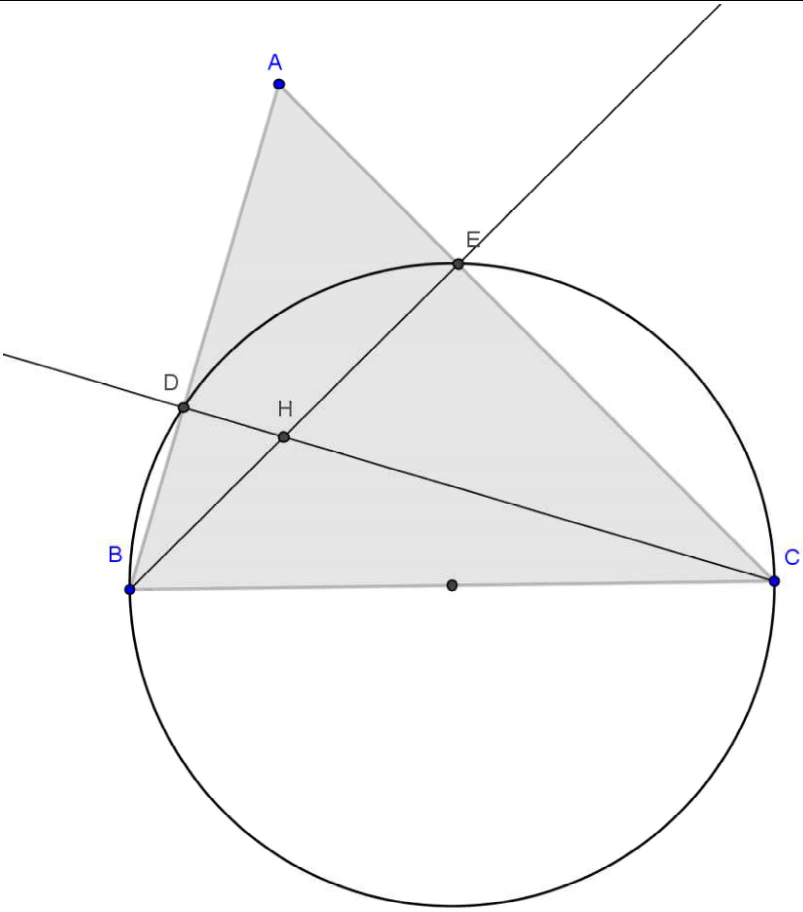
Question 3-***a***) il faut s'appuyer sur la production de l'élève $\boxed{C}$ pour répondre à cette question. Attention, pas de liste « *au petit bonheur la chance* », c'est-à-dire, donner TOUTES les propriétés, alors qu'elles ne sont pas toutes en jeu. Justement lesquelles pour l'élève $\boxed{C}$: *au mois trois côtés de même longueur, au moins deux angles droits et deux côtés parallèles.*

Question 3-***b***) L'objet cercle est connu par l'élève $\boxed{C}$. Procédure de construction correcte, mais vocabulaire défaillant. Ce qui est pourtant attendu à ce niveau de classe.

Question 3-***c***) le texte produit par l'élève $\boxed{\text{C}}$ peut conduire à une figure non convexe (obtention d'un quadrilatère croisé, à tracer (les sommets **C** et **D** pas dans le même demi-plan de frontière **(AB)**). *Un petit bémol* : les élèves rencontrant peu de figures non-convexes dans les tâches de construction peuvent quand même produire la bonne figure, car l'idée de construire un quadrilatère croisé n'est pas « automatique » !)

EXERCICE 2

Partie 1.



1) *Figure* : Cf. ci-contre. L'angle de sommet **A** est aigu, donc sa mesure est strictement inférieure à 90°. (Rien n'est précisé sur ∠**B** ou sur ∠**C**, l'un des deux peut être obtus).

2) **(AH)** ⊥ **(BC)** ?
Piste de démonstration à rédiger…
(a) Le point **D** appartient au cercle, donc **(BDC)** est **…** en **?** Idem pour le point **E**, donc **(BEC)** rectangle en **?**
(b) Les droites **(CD)** et **(BE)** sont des **…** du triangle **ABC**, car **…**
(c) Dans un triangle, les **…** sont *concourantes*, le point **H** est donc **…** de ce triangle ; conclure**…**

3) Il s'agit de construire des parallélogrammes, *non croisés !* : sur quelle « *bonne* » propriété s'appuyer ? Côtés opposés de même longueur, ça peut le faire… Constructions au compas par report de longueurs déjà connues. Figure ci-dessus à compléter.

Note de ***PW***. Il y a d'autres constructions possibles, en utilisant d'autres propriétés du parallélogramme. A chercher…

4) Le point **A** est le milieu de **[MN]** ?
Piste de démonstration… (i) Montrer que **(AN)**//**(BC)**. (ii) En déduire que les points **M**, **A** et **N** sont alignés. (iii) (*Propriétés des longueurs des côtés d'un parallélogramme*), on a : **AM** = **BC** et **NA** = **BC**. (iv) Conclure…

Partie 2.

Quelques remarques et observations. « *Phrase* » = ligne du programme ; « *mes diagonales ne sont pas perpendiculaires* » doit se lire « *quelque soient deux de mes diagonales, elles ne sont pas …* » ; réponse à ce jeu du portrait : la figure $\boxed{\text{D}}$.

1) Etude de chaque ligne : le but est de vérifier si une suppression a une influence sur la réponse. Etudier chaque cas, mettre en forme les invalidations possibles et conclure. Correction en détails en ***TD***. *Conclusion* : chacune des trois premières lignes peut être supprimée (en gardant les trois autres !), sans incidence sur la « bonne » réponse.

2) Difficultés liées à la formulation des phrases. Classique au CRPE !

Quatre sources de difficultés, il n'y a pas exhaustivité !

- On commence par l'usuel : le VOCABULAIRE géométrique enseigné, et oui… *Une remarque* : le mot diagonale n'est pas explicitement au programme du primaire, mais…
- *Plus subtil* ! Sens de l'expression « au moins un » = « un ou plus ».
- *Plus subtil, bis* ! « Mélange » de l'emploi des deux formes affirmatives et négatives dans le même texte support. Nécessité de compétences implicites, mais réelles, en logique mathématique. Par exemple, un élève peut « sélectionner » avec des phrases affirmatives et « éliminer » avec des phrases négatives.
- L'emploi du « *je* » oblige à un effort de décentration. A débattre…

3) Connaissances et capacités : et oui, encore et toujours incontournable… Référence directe et explicite aux programmes !

Connaissance(s) : connaître (et utiliser « correctement ») le vocabulaire : droites perpendiculaires, angle droit, sommet, côté.

Capacités : reconnaître perceptivement une figure plane ; vérifier des propriétés (perpendicularité, égalité de longueurs) à l'aide des instruments usuels.

4) Variable didactique, choix du support « papier quadrillé » : conséquences ou incidences sur les procédures.

- Le papier quadrillé permet de se passer de certains instruments : qualité intrinsèque du quadrillage (*parallélisme, perpendicularité, égalité de longueurs*). Débat…
- Un point faible : des éléments particuliers d'une figure peuvent être mal « vus » par les élèves : confondance (*ça existe ?*) d'un côté ou d'une diagonale avec les traits du quadrillage. Débat en ***TD***.

Il reste de la place : on va en profiter pour faire une belle construction et « remarquer » une belle « concourance » : le point de Fermat-Torricelli d'un triangle.

Programme de construction, à partir d'un triangle scalène (= quelconque) **(ABC)**.

i. Sur le côté **[AB]**, construire, « à l'extérieur » de **(ABC)**, le point **W** tel que **(AWB)** soit équilatéral.
ii. Idem sur les côté **[BC]**, appeler **L** le troisième sommet du triangle équilatéral.
iii. Idem sur les côté **[AC]**, appeler **J** le troisième sommet du triangle équilatéral.

Tracer les segments **[WC]**, **[LA]** et **[JB]**. Montrer, *if possible !*, que ces segments sont concourants en un point **M**, appelé point de Fermat-Torricelli de **(ABC)**.