POLYTECH
ORLÉANS

DOCUMENT B
MÉTHODES

2021

Sommaire

1 Dérivée d'une somme et d'un produit

On considère la fonction

$$f : x \longmapsto x^4\,\mathrm{e}^x + 3\,\sin x.$$

f est la somme des deux fonctions : $x \mapsto x^4\,\mathrm{e}^x$ et $x \mapsto 3\,\sin x$; d'après la formule {D1}, sa dérivée est la somme des dérivées $\left[x^4\,\mathrm{e}^x\right]'$ et $[3\,\sin x]'$.

On dérive le produit $x^4 \times \mathrm{e}^x$ en appliquant la formule {D2}, et le produit $3 \times \sin x$ en appliquant la formule {D1*}.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[\underbrace{x^4}_{u(x)} \times \underbrace{\mathrm{e}^x}_{v(x)}\right]' + \left[\underbrace{3}_{\text{constante}} \times \underbrace{\sin x}_{w(x)}\right]' \\
&= \underbrace{4\,x^3}_{u'(x)} \times \underbrace{\mathrm{e}^x}_{v(x)} + \underbrace{x^4}_{u(x)} \times \underbrace{\mathrm{e}^x}_{v'(x)} + \underbrace{3}_{\text{constante}} \times \underbrace{\cos x}_{w'(x)} \\
&= \left(x^4 + 4\,x^3\right)\mathrm{e}^x + 3\,\cos x
\end{aligned}$$

Comme dans cet exemple, on utilisera dans ce document la notation "simplifiée" $\sin x$ pour $\sin(x)$. Il en sera de même pour $\cos x$, $\ln x$ ou encore $\arccos x$ ... Attention toutefois à ce qu'il n'y ait pas d'ambiguité. Par exemple, on n'écrira pas : $\cos 2\,x + \frac{\pi}{2}$ pour $\cos\left(2\,x + \frac{\pi}{2}\right)$ ou encore $\ln(3\,x+2)\sin x$ pour $\ln\left((3\,x+2)\sin x\right)$

2 Dérivée d'une fonction composée

On se propose de dériver la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln\left(x^2 - 4\,x + 3\right)$$

On reconnait un "enchaînement" de deux fonctions, et on dessine un diagramme qui met en évidence cette composition :

$$f : x \xmapsto{\ \psi\ } x^2 - 4\,x + 3 \xmapsto{\ H\ } \ln\left(x^2 - 4\,x + 3\right)$$

On a ici (formule (4)) :

$$f(x) = (H \circ \psi)(x) = \ln\left(\psi(x)\right).$$

Les deux fonctions que l'on compose sont ainsi mises en évidence.

- **Le domaine**

  $$f(x) = \ln\left(x^2 - 4\,x + 3\right).$$

  La fonction $\psi : x \mapsto x^2 - 4\,x + 3$ est définie sur $\mathbb{R}$. Pour que $\ln\left(\psi(x)\right)$ existe, $\psi(x)$ doit être strictement positif.

  Le domaine de f, que l'on notera $\mathscr{D}_f$, est donc l'ensemble des réels x tels que $\psi(x) > 0$. Comme $\psi(x) = (x-1)(x-3)$, on a :

  $$\mathscr{D}_f =]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[.$$

- **Dérivabilité**
  Le théorème de dérivabilité d'une fonction composée dit la chose suivante :
  Si ψ est dérivable en a et H est dérivable en $b = \psi(a)$, alors la composée $H \circ \psi$ est dérivable en a.

  Dans notre exemple, ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en tout point $a \in]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[$, et la fonction $H = \ln$ est dérivable en $b = \psi(a) > 0$.
  L'application du théorème nous permet d'affirmer que la composée $H \circ \psi$ est dérivable sur l'ensemble $]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[$.

- **Calcul de** $f'(x) = \left[\ln\left(x^2 - 4\,x + 3\right)\right]'$ [1]

  On applique la formule {D3} :

$$(H \circ \psi)'(x) = H'(\psi(x)) \times \psi'(x) \quad \text{avec ici} \quad H'(X) = \frac{1}{X}.$$

  Pour tout x de $]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$ on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= H'(\underbrace{x^2 - 4\,x + 3}_{(\psi(x))}) \times \underbrace{\left[x^2 - 4\,x + 3\right]'}_{\psi'(x)} \\ &= \frac{1}{x^2 - 4\,x + 3} \times (2\,x - 4) \\ &= \frac{2(x-2)}{(x-1)(x-3)} \end{aligned}$$

3 Intégration par parties

On se propose de calculer une primitive de la fonction $x \mapsto x\,\cos x$, c'est-à-dire l'intégrale indéfinie :

$$\int x\,\cos x\,dx$$

Le produit $x \times \cos x$ ne s'intègre pas directement. Essayons alors une intégration par parties. On rappelle la formule [2] {P2} :

$$\int f(x) \times g'(x)\,dx = f(x) \times g(x) - \int f'(x) \times g(x)\,dx$$

Deux choix possibles

On peut naïvement envisager deux possibilités : poser $g'(x) = x$ et $f(x) = \cos x$ ou encore $g'(x) = \cos x$ et $f(x) = x$

Premier choix

$$\text{Posons} \quad \begin{cases} g'(x) = x\ ; & g(x) = \frac{1}{2}x^2 \\ f(x) = \cos x\ ; & f'(x) = -\sin x \end{cases}$$

L'application de la formule nous donne :

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{g'(x)}\,\underbrace{\cos x}_{f(x)}\,dx &= \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{g(x)} \times \underbrace{(\cos x)}_{f(x)} - \int \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{g(x)}\,\underbrace{(-\sin x)}_{f'(x)}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\,x^2\,\cos x + \frac{1}{2}\int x^2 \times \sin x\,dx \end{aligned}$$

Le calcul est juste, mais il ne permet pas d'aboutir : la primitive $\int x^2 \times \sin x\,dx$ est plus difficile à calculer que $\int\,x\,\cos x\,dx$.

1. Il ne faut pas confondre la notation (abusive) $[ln(\psi(x))]'$ avec $ln'(\psi(x))$. La première désigne la dérivée $(ln \circ \psi)'$ appliquée à x alors que la seconde désigne la dérivée ln', appliquée à $\psi(x)$: $(ln \circ \psi)'(x) \neq \ln'(\psi(x))$.
2. On peut utiliser une intégration par parties pour intégrer un produit. La formule nécessite de savoir intégrer au moins l'un des deux facteurs. Mais il reste toujours une intégrale à calculer. On espère simplement que celle-ci sera plus facilement calculable que la première.

Le bon choix[3]

$$\text{Posons} \quad \begin{cases} g'(x) = \cos x \ ; & g(x) = \sin x \\ f(x) = x \ ; & f'(x) = 1 \end{cases}$$

L'application de la formule {P2} nous donne :

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{\cos x}_{g'(x)} \, dx &= \underbrace{x}_{f(x)} \times \underbrace{\sin x}_{g(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)} \underbrace{\sin x}_{g(x)} \, dx \\ &= x \sin x + \int -\sin x \, dx \\ &= x \sin x + \cos x \end{aligned}$$

4 Intégration par substitution (1)

On choisit comme exemple l'intégrale définie

$$\int_0^1 x\,(x^2+5)^7 dx$$

qui est, à un coefficient près, de la forme $\displaystyle\int_0^1 \psi'(x) \times H(\psi(x))\, dx$ où $\psi(x) = x^2 + 5$.

L'idée est d'introduire une nouvelle *variable* en posant $u = \psi(x) = x^2 + 5$. La différentielle de u est $du = \psi'(x)\, dx = 2\, x\, dx$. On écrit alors :

$$\int x\,(x^2+5)^7 dx = \int \underbrace{(x^2+5)^7}_{u^7} \underbrace{x \ dx}_{\frac{1}{2}\, du} = \frac{1}{2} \int u^7 \, du$$

Lorsque $x = 0$, $u = 5$ et lorsque $x = 1$, $u = 6$: on obtient l'égalité

$$\begin{aligned} \int_0^1 x\,(x^2+5)^7 dx &= \frac{1}{2} \int_5^6 u^7 \, du \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} \left[u^8\right]_5^6 = \frac{1\,288\,991}{16} \end{aligned}$$

Il ne faut pas confondre avec l'intégration par parties. Dans une intégration par parties, il s'agit d'intégrer un produit de la forme $u'(x) \times v(x)$ où les deux facteurs n'ont pas de lien, alors que dans une intégration par substitution, on intègre un produit de la forme $u'(x) \times H(u(x))$ où les deux facteurs sont liés.

5 Intégration par substitution (2)

On applique la méthode de substitution pour calculer l'intégrale indéfinie (primitive)

$$F(x) = \int \sin x \, \mathrm{e}^{\cos x} \, dx$$

On pose ici $u = \cos x$. On a alors $du = -\sin x\, dx$ et on obtient l'égalité :

$$\int \sin x \, \mathrm{e}^{\cos x} \, dx = \int -\mathrm{e}^u \, du = -\mathrm{e}^u$$

d'où

$$F(x) = -\mathrm{e}^{\cos x}$$

3. Dans cet exemple, que l'on intègre ou que l'on dérive $\cos x$, on obtient, au signe près, $\sin x$. On voit donc que le bon choix consiste à « descendre » le degré de x. Ce sera le choix à faire pour calculer les intégrales de la forme $\int x^n \mathrm{e}^x \, dx$, $\int x^n \sin x \, dx$ et $\int x^n \cos x \, dx$.

6 Avec les deux méthodes

On se propose de calculer l'intégrale indéfinie

$$F(x) = \int e^{\sqrt{x}}\, dx$$

On commence par une substitution en posant $u = \sqrt{x}$.

La différentielle de u est $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$ et on écrit

$$\begin{aligned}\int e^{\sqrt{x}}\, dx &= \int 2\sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx \\ &= \int 2\, u\, e^{u}\, du \\ &= 2 \int u\, e^{u}\, du\end{aligned}$$

On calcule ensuite $\int u\, e^{u}\, du$ en intégrant par parties.

$$\text{Posons} \quad \begin{cases} f'(u) = e^{u}\ ; & f(u) = e^{u} \\ g(u) = u\ ; & g'(u) = 1 \end{cases}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}\int u\, e^{u}\, du &= u\, e^{u} - \int e^{u}\, du \\ &= u\, e^{u} - e^{u} \\ &= (u-1)e^{u}\end{aligned}$$

On en déduit

$$F(x) = 2\left(\sqrt{x} - 1\right)\, e^{\sqrt{x}}$$

7 Puissances rationnelles d'un réel positif

1. **Racines n-ièmes**

   Pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction $x \mapsto x^n$ définit une bijection (relation biunivoque) :

   – de $[0; +\infty[$ sur $[0; +\infty[$ si n est pair ;

   – de $]-\infty; +\infty[$ sur $]-\infty; +\infty[$ si n est impair.

   Sa fonction réciproque est appelée *racine n-ième* et est notée $x \mapsto \sqrt[n]{x}$. Pour $n = 2$, $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$.

2. **Puissances rationnelles d'un réel positif**

   Pour tous $x \in]0; +\infty[$, $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$x^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x} \quad \text{et, plus généralement,} \quad x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}.$$

Remarques :

- Pour tout réel $x > 0$, on a clairement les égalités $\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^q = x$ et $\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^q = x^p$.
- Si $p > 0$, on peut définir $0^{\frac{p}{q}}$ $(= 0)$.
- L'écriture d'un nombre rationnel n'étant pas unique, on doit vérifier que pour tous $x \in]0; +\infty[$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $p' \in \mathbb{Z}$ et $q' \in \mathbb{N}^*$, si $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$, alors on a : $x^{\frac{p}{q}} = x^{\frac{p'}{q'}}$.

  On note $a = x^{\frac{p}{q}}$ et $b = x^{\frac{p'}{q'}}$.

  On a alors $a^{q \cdot q'} = (a^q)^{q'} = (x^p)^{q'} = x^{p \cdot q'}$ et $b^{q \cdot q'} = \left(b^{q'}\right)^q = \left(x^{p'}\right)^q = x^{p' \cdot q}$. Si $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$, alors $p \cdot q' = p' \cdot q$ et alors $a^{q \cdot q'} = b^{q \cdot q'}$ soit $a = b$ (car $a > 0$ et $b > 0$).

  Cette propriété permet de définir x^r où $r \in \mathbb{Q}$: $x^r = x^{\frac{p}{q}}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $r = \frac{p}{q}$, le résultat ne dépendant pas du choix des entiers p et q.
- Considérer des réels x négatifs pose problème.

  Par exemple, on aurait $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$ et aussi $(-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = +2$
- L'égalité $\ln(x^n)$ connue pour tout réel $x > 0$ et tout entier n est encore vraie pour un exposant rationnel $r = \frac{p}{q}$:

  Pour tous $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on a $q \cdot \ln\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = q \cdot \ln\left(\sqrt[q]{x^p}\right) = \ln(x^p) = p \cdot \ln x$ d'où $\ln\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{p}{q} \ln x$ c'est-à-dire $x^{\frac{p}{q}} = \exp(\frac{p}{q} \ln x)$.

  Ainsi, une puissance rationnelle d'un réel positif peut être définie avec les deux fonctions logarithme et exponentielle. Cette écriture peut être efficace dans les démonstrations, comme celles proposées ci-après.

• En utilisant les propriétés des fonctions exp et ln, vérifier pour tous $x > 0$, $y > 0$, $r \in \mathbb{Q}$, $s \in \mathbb{Q}$, on a les égalités :

$$x^r \times x^s = x^{r+s} \qquad x^r \times y^r = (x \cdot y)^r \qquad (x^r)^s = x^{r \times s}$$

$$\begin{aligned} x^r \times x^s &= \exp(r \ln x) \cdot \exp(s \ln x) \\ &= \exp(r \ln x + s \ln x) \\ &= \exp((r+s) \ln x) \\ &= x^{r+s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^r \times y^r &= \exp(r \ln x) \cdot \exp(r \ln y) \\ &= \exp(r \ln x + r \ln y) \\ &= \exp(r(\ln x + \ln y)) \\ &= \exp(r \ln(x \cdot y)) \\ &= (x \cdot y)^r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x^r)^s &= \exp(s \ln(x^r)) \\ &= \exp(s \ln(\exp(r \ln x)) \\ &= \exp(s \cdot r \ln x) \\ &= x^{s \cdot r} \end{aligned}$$

Les propriétés bien connues pour les exposants entiers se généralisent aux exposants rationnels et seront utilisées sans démonstration.

3. **Dérivées des fonctions puissances rationnelles**

Pour tout nombre rationnel r, la fonction $f : x \mapsto x^r$ est dérivable sur $]0;+\infty[$, et sa dérivée est $f' : x \mapsto r\,x^{r-1}$:

La fonction f est la composée :

$$x \mapsto r\,\ln x \mapsto \exp\left(r\,\ln x\right).$$

En appliquant la formule {D3} on obtient la dérivée :

$$\begin{aligned}
[x^r]' &= \left[\underbrace{\exp}_{H}\left(\underbrace{r\,\ln x}_{\psi(x)}\right)\right]' \\
&= \underbrace{\exp'}_{H'}\left(\underbrace{r\,\ln x}_{\psi(x)}\right) \times \underbrace{[r\,\ln x]'}_{\psi'(x)} \\
&= \exp\left(r\,\ln x\right) \times r \cdot \frac{1}{x} \\
&= x^r \cdot r \cdot \frac{1}{x} \\
&= r\,x^r \cdot x^{-1} \\
&= r\,x^{r-1}
\end{aligned}$$

La formule de dérivation valable pour les exposants entiers se généralise aux exposants rationnels : c'est la formule (26) qui sera utilisée directement dans les calculs de dérivées ou de primitives, comme dans les exemples suivants.

- Calculer la dérivée de la fonction $g : x \mapsto \sqrt[4]{x}$.

La fonction g peut s'écrire comme la fonction « puissance 1/4 » : $g(x) = x^{\frac{1}{4}}$. En appliquant la formule (26), on obtient sa fonction dérivée :

$$g'(x) = \frac{1}{4}\,x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4}\,x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\,x^{\frac{3}{4}}}$$

- Calculer la primitive $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}\,dx$.

La fonction à intégrer s'écrit en fait comme une fonction puissance : $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^5}} = \dfrac{1}{x^{\frac{5}{3}}} = x^{-\frac{5}{3}}$. On obtient la puissance $-\frac{5}{3}$ en dérivant la puissance $-\frac{5}{3}+1$:

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}\,dx = \frac{1}{-\frac{5}{3}+1}\,x^{-\frac{5}{3}+1} = -\frac{3}{2}\,x^{-\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2\,x^{\frac{2}{3}}}$$