POLYTECH
ORLÉANS

DOCUMENT C
EXERCICES

2021

I Dérivées de sommes, produits et quotients

Calculer $h'(x)$ où h' désigne la fonction dérivée de h :

[1] $h(x) = 7 \times \cos x + \dfrac{3}{x}$

[2] $h(x) = \mathrm{e}^{x} \times x^{4}$

[3] $h(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

[4] $h(x) = x^{1,5} + \sqrt[4]{x}$

II Dérivées de fonctions composées

Calculer $f'(x)$, où f' désigne la dérivée de f, dans chacun des exemples suivants.

[5] $f(x) = \mathrm{e}^{\cos x}$

[6] $f(x) = \ln(3\,x + 7)$

[7] $f(x) = \cos^{5}(x)$

[8] $f(x) = \cos\left(x^{5}\right)$

[9] $f(x) = \left(x^{2} - 3\,x + 1\right)^{4}$

[10] $f(x) = \ln\left(8 - x^{2}\right)$

[11] $f(x) = \sqrt[3]{1 + x^{2}}$

[12] $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

[13] $f(x) = \sqrt{1 + \ln(x)}$

[14] $f(x) = \ln(\ln x)$

III Calculer une intégrale en utilisant une primitive

[15] $\displaystyle\int_0^1 x^3 - 7\,x + 4\,dx$

[16] $\displaystyle\int_{-2}^2 \mathrm{e}^{3\,x+2}\,dx$

[17] $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(3\,x)\,dx$

[18] $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx$

[19] $\displaystyle\int_1^{64} \sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}\,dx$

IV Effectuer une intégration par parties

[20] $\displaystyle\int_1^e x^2 \ln x\,dx$

[21] $\displaystyle\int_0^{\pi} x \cos(3\,x)\,dx$

[22] $\displaystyle\int_0^5 x\,e^{2\,x}\,dx$

[23] $\displaystyle\int \ln x\,dx$

[24] $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

[25] $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x} \times \ln x\,dx$

V Intégration par substitution

[26] $\displaystyle\int \frac{1}{x} \times \ln x\,dx$

[27] $\displaystyle\int (\cos\,x)^5 \sin(x)\,dx$

[28] $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$

[29] $\displaystyle\int \frac{1}{x \times \ln(x)}\,dx$

[30] $\displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

[31] $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^{12}}{x}\,dx$

Indications

I Dérivées de sommes, produits et quotients

[1] On dérive une *combinaison linéaire* :

{D1*} λ et μ étant deux réels : $(\lambda \times f + \mu \times g)' = \lambda \times f' + \mu \times g'$.

Ici, cela donne : $h'(x) = 7 \times [\cos x]' + 3 \times [\frac{1}{x}]'$

[2] On dérive le *produit* de deux fonctions :

{D2} $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$

Ici, on obtient $h'(x) = [\mathrm{e}^x]' \times x^4 + \mathrm{e}^x \times [x^4]'$.

[3] On reconnaît un *quotient* de deux fonctions :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$$

Ici, $h'(x) = \dfrac{[\ln x]' \times \sqrt{x} - \ln x \times [\sqrt{x}]'}{(\sqrt{x})^2}$

[4] On écrit $\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$: h est la somme de deux fonctions puissances dont les dérivées sont données par la formule (26) du précis de calcul différentiel et intégral.

II Dérivée d'une fonction composée

[5] Il s'agit d'une composée de fonctions : $f(x) = \exp(\cos x) = (\exp \circ \cos)(x)$. On utilise la formule :

{D3} $(H \circ \psi)' = (H' \circ \psi) \times \psi'$

avec ici, $H = \exp$ et $\psi = \cos$. Cela donne : $f'(x) = \exp'(\cos x) \times \cos'(x)$.

[6] $f(x) = H(\psi(x))$ où $H(x) = \ln(x)$ et $\psi(x) = 3\,x + 7$.

[7] $f = H \circ \psi$ où : $H(x) = x^5$ et $\psi(x) = \cos x$.

[8] $f = H \circ \psi$ où : $H(x) = \cos x$ et $\psi(x) = x^5$.

[9] $f = H \circ \psi$ où : $H(x) = x^4$ et $\psi(x) = x^2 - 3\,x + 1$.

[10] $f = H \circ \psi$ où : $H(x) = \ln x$ et $\psi(x) = 8 - x^2$.

[11] $f = H \circ \psi$ où : $H(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ et $\psi(x) = 1 + x^2$.

[12] $f = H \circ \psi$ où : $H(x) = \frac{1}{x}$ et $\psi(x) = \ln x$.

[13] $f = H \circ \psi$ où : $H(x) = \sqrt{x}$ et $\psi(x) = 1 + \ln(x)$.

[14] $f = H \circ \psi$ où : $H = \ln$ et $\psi = \ln$.

III Intégration avec une primitive

[15] Une primitive de $f : x \mapsto x^3 - 7\,x + 4$ est $F : x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^2 + 4\,x$.

[16] Une primitive de $f : x \mapsto \mathrm{e}^{3\,x+2}$ est $F : x \mapsto \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3\,x+2}$.

[17] Une primitive de $f : x \mapsto \cos(3\,x)$ est $F : x \mapsto \frac{1}{3}\sin(3\,x)$.

[18] On écrit $\tan^2 x = \left(1 + \tan^2 x\right) - 1$ et on reconnait la dérivée de la fonction tangente.

[19] On écrit $\sqrt{x^3}$ et $\sqrt[3]{x^2}$ comme des puissances de x :

$$\sqrt{x^3} = \left(x^3\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}} \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{x^2} = \left(x^2\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}}.$$

On trouve ensuite des primitives comme avec les fonctions puissances entières.

IV Intégration par parties

[20] On intègre par parties en posant $\begin{cases} g'(x) = x^2 & ; \quad g(x) = \frac{1}{3}x^3 \\ f(x) = \ln x & ; \quad f'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

On obtient :

$$\begin{aligned} \int_1^e x^2 \ln x \, dx &= \left[\ln(x) \times \frac{1}{3}x^3\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times \frac{1}{3}x^3 \, dx \\ &= \left(1 \times \frac{e^3}{3} - 0\right) - \int_1^e \frac{1}{3}x^2 \, dx \end{aligned}$$

[21] On pose : $\begin{cases} g'(x) = \cos(3\,x) & ; \quad g(x) = \frac{1}{3}\sin(3\,x) \\ f(x) = x & ; \quad f'(x) = 1 \end{cases}$

[22] Poser : $f(x) = x$ et $g'(x) = \mathrm{e}^{2\,x}$

[23] Poser : $f(x) = \ln x$ et $g'(x) = 1$

[24] Poser : $f(x) = \ln x$ et $g'(x) = \frac{1}{x^2}$

[25] Poser : $f(x) = \ln x$ et $g'(x) = \frac{1}{x}$

V Intégration par substitution

[26] La fonction à intégrer s'écrit sous la forme $h(\ln x) \cdot \ln' x$. On pose $u = \psi(x) = \ln x$

[27] Au signe près, l'intégrale s'écrit $\int h(\psi(x)) \cdot \psi'(x)\, dx$. Poser $u = \psi(x) = \cos x$

[28] L'intégrande s'écrit $\dfrac{1}{\sqrt{\psi(x)}} \cdot \psi'(x)$ avec $\psi(x) = 1 + \mathrm{e}^x$. On pose alors $u = \mathrm{e}^x$.

[29] Poser $u = \ln x$

[30] Poser $u = \sqrt{x}$

[31] Poser $u = \ln x$

I Dérivées de sommes, produits et quotients

[1] Pour tout $x \neq 0$, on a : $[\cos x]' = -\sin x$ et $\left[\dfrac{1}{x}\right]' = -\dfrac{1}{x^2}$ donc

$$h'(x) = -7\,\sin x - \frac{3}{x^2}$$

[2] Pour tout réel x, on a : $[\mathrm{e}^x]' = \mathrm{e}^x$ et $[x^4]' = 4\,x^3$ donc

$$h'(x) = \mathrm{e}^x \times x^4 + \mathrm{e}^x \times 4\,x^3 = \mathrm{e}^x \cdot x^3 \cdot (x+4)$$

[3] Pour tout $x > 0$, on a : $[\ln x]' = \dfrac{1}{x}$ et $[\sqrt{x}]' = \dfrac{1}{2\,\sqrt{x}}$ donc

$$h'(x) = \frac{\dfrac{1}{x} \times \sqrt{x} - \ln x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2} = \frac{\sqrt{x}(2 - \ln x)}{2x^2}$$

[4] On a $h(x) = x^{1,5} + x^{\frac{1}{4}}$. h est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a

$$h'(x) = 1,5\,x^{-0,5} + \frac{1}{4}\,x^{-\frac{3}{4}} = \frac{3}{2\,x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4\,x^{\frac{3}{4}}}.$$

II Dérivée d'une fonction composée

[5] f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \exp(\cos x) \times (-\sin x) = -\sin x\,\mathrm{e}^{\cos x}$$

[6] f est définie et dérivable sur l'intervalle $]-\frac{7}{3};+\infty[$ et on a :

$$f'(x) = \ln'(3\,x+7) \times [3\,x+7]' = \frac{1}{3\,x+7} \times 3 = \frac{3}{3\,x+7}$$

[7] La dérivée de la fonction « puissance 5 » est 5 × « puissance 4 ». Ainsi, on a

$$f'(x) = 5 \times (\cos x)^4 \times \cos'(x) = 5\,\cos^4 x \times (-\sin x) = -5\sin x \cdot \cos^4 x$$

[8]

$$f'(x) = \cos'(x^5) \times [x^5]' = -\sin(x^5) \times 5\,x^4 = -5x^4 \cdot \sin(x^5)$$

[9]

$$f'(x) = 4 \times (x^2 - 3\,x + 1)^3 \times [x^2 - 3\,x + 1]' = 4\,(x^2 - 3\,x + 1)^3\,(2\,x - 3)$$

[10] f est définie et dérivable sur l'intervalle $]-2\sqrt{2};+2\sqrt{2}[$ et on a :

$$h'(x) = \ln'(8 - x^2) \times [8 - x^2]' = \frac{1}{8 - x^2} \times (-2\,x) = \frac{-2\,x}{8 - x^2}$$

[11] $f = H \circ \psi$ où $\psi(x) = 1 + x^2$ et $H(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $H'(x) = \frac{1}{3}\,x^{-\frac{2}{3}}$.
f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f'(x) = \frac{1}{3}\,\left(1 + x^2\right)^{-\frac{2}{3}} \times \left[1 + x^2\right]' = \frac{2\,x}{3\,(1 + x^2)^{\frac{2}{3}}}$$

[12] f est définie et dérivable sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$ et on a :
$f'(x) = H'(\ln x) \times [\ln x]'$ avec $H'(x) = \frac{-1}{x^2}$, c'est-à-dire :

$$f'(x) = \frac{-1}{(\ln x)^2} \times \frac{1}{x} = \frac{-1}{x\,\ln^2 x}$$

[13] f est définie sur $\left[\frac{1}{\mathrm{e}};+\infty\right[$ et est dérivable sur $\left]\frac{1}{\mathrm{e}};+\infty\right[$. Pour $x > \frac{1}{\mathrm{e}}$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 + \ln x}} \times [1 + \ln x]' = \frac{1}{2\sqrt{1 + \ln x}} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{2\,x\,\sqrt{1 + \ln x}}$$

[14] f est définie et dérivable sur l'intervalle $]1;+\infty[$, et on a :

$$f'(x) = \ln'(\ln x) \times [\ln x]' = \frac{1}{\ln x} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln x}$$

III Calculer une intégrale en utilisant une primitive

[15]

$$\int_0^1 x^3 - 7\,x + 4\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^2 + 4\,x\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{7}{2} = -\frac{13}{4}$$

[16]

$$\int_{-2}^{2} \mathrm{e}^{3\,x+2}\,dx = \left[\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3\,x+2}\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^8 - \mathrm{e}^{-4}\right)$$

[17]

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(3\,x)\,dx = \left[\frac{1}{3}\sin(3\,x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

[18]

$$\int_0^1 2\,x^3 - 6\,x^2 + \frac{3}{1+x^2}\,dx = \left[2\,\frac{x^4}{4} - 6\,\frac{x^3}{3} + 3\arctan(x)\right]_0^1 = -\frac{3}{2} + \frac{3\pi}{4}$$

[19]

$$\begin{aligned}\int_1^{64} \sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}\,dx &= \int_1^{64} x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{2}{3}}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right]_1^{64} \\ &= \frac{2}{5}\left(64^{\frac{1}{2}}\right)^5 + \frac{3}{5}\left(64^{\frac{1}{3}}\right)^5 - \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right) = \frac{2}{5}\,8^5 + \frac{3}{5}\,4^5 - 1 = 13\,720,6\end{aligned}$$

IV Effectuer une intégration par parties

[20] On pose : $\begin{cases} g'(x) &= x^2 \quad ; \quad g(x) &= \frac{1}{3}x^3 \\ f(x) &= \ln x \quad ; \quad f'(x) &= \frac{1}{x}\end{cases}$

On obtient :

$$\begin{aligned}\int_1^e x^2\,\ln x\,dx &= \left[\ln(x) \times \frac{1}{3}x^3\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times \frac{1}{3}x^3\,dx \\ &= (1 \times \frac{e^3}{3}) - \int_1^e \frac{1}{3}x^2\,dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \left[\frac{1}{9}x^3\right]_1^e \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2\,e^3+1}{9}\end{aligned}$$

[21] On pose : $\begin{cases} g'(x) &= \cos(3\,x) \quad ; \quad g(x) &= \frac{1}{3}\sin(3\,x) \\ f(x) &= x \quad ; \quad f'(x) &= 1\end{cases}$

On obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\,\cos(3\,x)\,dx &= \left[x \times \frac{1}{3}\sin(3\,x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi 1 \times \sin(3\,x)\,dx \\ &= (0-0) - \left[-\frac{1}{9}\cos(3\,x)\right]_0^\pi \\ &= +\left[\frac{1}{9}\cos(3\,x)\right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{9}(-1-1) = -\frac{2}{9}\end{aligned}$$

[22] On pose : $\left\{\begin{array}{llll} g'(x) & = \mathrm{e}^{2\,x} & ; \quad g(x) & = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\,x} \\ f(x) & = x & ; \quad f'(x) & = 1 \end{array}\right.$

On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^5 x \cdot \mathrm{e}^{2\,x}\,dx &= \left[x \times \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\,x}\right]_0^5 - \int_0^5 1 \cdot \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\,x}\,dx \\ &= \frac{5\mathrm{e}^{10}}{2} - \left[\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\,x}\right]_0^5 \\ &= \frac{5\mathrm{e}^{10}}{2} - \left(\frac{\mathrm{e}^{10}}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{9\mathrm{e}^{10}+1}{4} \end{aligned}$$

[23] On pose : $\left\{\begin{array}{llll} g'(x) & = 1 & ; \quad g(x) & = x \\ f(x) & = \ln x & ; \quad f'(x) & = \frac{1}{x} \end{array}\right.$

On obtient :

$$\begin{aligned} \int \ln x \cdot 1\,dx &= \ln(x) \times x - \int \frac{1}{x} \times x\,dx \\ &= x \cdot \ln x - \int 1\,dx \\ &= x \cdot \ln x - x \end{aligned}$$

[24] On pose : $\left\{\begin{array}{llll} g'(x) & = \frac{1}{x^2} & ; \quad g(x) & = -\frac{1}{x} \\ f(x) & = \ln x & ; \quad f'(x) & = \frac{1}{x} \end{array}\right.$

On obtient :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2} \cdot \ln x\,dx &= -\frac{1}{x} \cdot \ln x - \int -\frac{1}{x} \times \frac{1}{x}\,dx \\ &= -\frac{1}{x} \cdot \ln x - \int -\frac{1}{x^2}\,dx \\ &= -\frac{1}{x} \cdot \ln x - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

[25] On pose : $\left\{\begin{array}{llll} g'(x) & = \frac{1}{x} & ; \quad g(x) & = \ln x \\ f(x) & = \ln x & ; \quad f'(x) & = \frac{1}{x} \end{array}\right.$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx &= \ln x \cdot \ln x - \int \ln x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\
\text{d'où} \quad 2 \times \int \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx &= \ln^2 x \\
\text{soit} \quad \int \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx &= \frac{1}{2} \ln^2 x
\end{aligned}$$

V Intégration par substitution

[26] On pose : $u = \psi(x) = \ln x$. On a alors $du = \psi'(x) \, dx = \dfrac{1}{x} \, dx$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x} \times \ln x \, dx &= \int u \, du \\
&= \frac{1}{2} u^2 \\
&= \frac{1}{2} \ln^2 x
\end{aligned}$$

[27] On pose : $u = \psi(x) = \cos x$. On a alors $du = \psi'(x) \, dx = -\sin x \, dx$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\int (\cos x)^5 \sin(x) \, dx &= \int -u^6 \, du \\
&= -\frac{1}{6} u^6 \\
&= -\frac{(\cos x)^6}{6}
\end{aligned}$$

[28] On pose : $u = \psi(x) = 1 + \mathrm{e}^x$. On a alors $du = \psi'(x) \, dx = \mathrm{e}^x \, dx$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^x}{\sqrt{1 + e^x}} \, dx &= \int \frac{1}{\sqrt{u}} \, du \\
&= 2 \sqrt{u} \\
&= 2 \sqrt{1 + \mathrm{e}^x}
\end{aligned}$$

[29] On pose : $u = \psi(x) = \ln x$. On a alors $du = \psi'(x)\,dx = \dfrac{1}{x}\,dx$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x \times \ln(x)}\,dx &= \int \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x}\,dx \\
&= \int \frac{1}{u}\,du \\
&= \ln|u| \\
&= \ln|\ln x|
\end{aligned}$$

[30] On pose : $u = \psi(x) = \sqrt{x}$. On a alors $du = \psi'(x)\,dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx &= \int \left(1-\sqrt{x}\right) \cdot 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \\
&= \int 2 - 2\,u\,du
\end{aligned}$$

Lorsque $x = 1$ et $x = 4$, on a respectivement $u = 1$ et $u = 2$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx &= \int_1^2 2 - 2\,u\,du \\
&= \left[2\,u - u^2\right]_1^2 = 0 - 1 = -1
\end{aligned}$$

[31] On pose : $u = \psi(x) = \ln x$. On a alors $du = \psi'(x)\,dx = \dfrac{1}{x}\,dx$. Lorsque $x = 1$ on a $u = 0$ et pour $x = \mathrm{e}$ on a $u = 1$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\int_1^e \frac{(\ln x)^{12}}{x}\,dx &= \int_0^1 u^{12}\,du \\
&= \left[\frac{1}{13}u^{13}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{13}
\end{aligned}$$