POLYTECH
ORLÉANS

DOCUMENT B
MÉTHODES

2021

1 Algèbre vectorielle

1.1 Opérations

On se propose dans cette section de pratiquer l'*addition* et la *multiplication par un réel* de vecteurs du plan ou de l'espace.

• On considère les trois vecteurs $\vec{u}\binom{-2}{3}$, $\vec{v}\binom{1}{5}$ et $\vec{w}\binom{0}{2}$. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{a} = 2\,\vec{u} - \vec{v} - 5\,\vec{w}$.

Le vecteur $\vec{a}$ est une *combinaison linéaire* des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Son abscisse (resp. ordonnée) se calcule en remplaçant dans cette combinaison linéaire les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ par leurs abscisses (resp. ordonnées) :

$$\begin{array}{rcl} x_{\vec{a}} & = & 2\,x_{\vec{u}} - x_{\vec{v}} - 5\,x_{\vec{w}} = 2(-2) - 1 - 5 \cdot 0 = -5 \\ y_{\vec{a}} & = & 2\,y_{\vec{u}} - y_{\vec{v}} - 5\,y_{\vec{w}} = 2 \cdot 3 - 5 - 5 \cdot 2 = -9 \end{array}$$

Les coordonnées du vecteur $\vec{a}$ sont $\binom{-5}{-9}$.

• On considère les trois points $A\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}2\\-3\\-3\end{pmatrix}$. Déterminer le point M qui vérifie l'égalité

$$\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} + 2\,\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

On pourrait traduire cette « équation » vectorielle par un système de trois équations portant sur les coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ du point M, mais ce n'est pas la meilleure idée. On privilégie le calcul vectoriel le plus longtemps possible.

En utilisant la relation de Chasles, on exprime le vecteur $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} + 2\,\overrightarrow{MC}$ en fonction des seuls vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} + 2\,\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AM} - \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}\right) + 2\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}\right) = -\overrightarrow{BA} + 2\,\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{AC} = -2\,\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC}.$$

L'équation vectorielle s'écrit alors

$$-2\,\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}, \quad \text{soit} \quad -2\,\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AC}.$$

Un seul point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ vérifie cette égalité, il est défini par $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et on calcule alors ses coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2 & = & \frac{1}{2} \cdot 4 \\ y+1 & = & \frac{1}{2}(-2) \\ z-1 & = & \frac{1}{2}(-4) \end{array}\right. \qquad \text{soit} \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & -2 \\ z & = & -1 \end{array}\right.$$

1.2 Familles de vecteurs

On utilise dans ce paragraphe la notion de déterminant, notion qui sera reprise plus loin dans ce document.

1.2.1 Colinéarité de deux vecteurs du plan

Deux vecteurs $\vec{a}\binom{a}{a'}$ et $\vec{b}\binom{b}{b'}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$. On dit alors que la famille $\left\{\vec{a}, \vec{b}\right\}$ est une famille *liée*. Dans le cas contraire elle est dite *libre*.

• Pour savoir si les vecteurs $\vec{a}\binom{2}{5}$ et $\vec{b}\binom{4}{6}$ sont colinéaires, on calcule le déterminant

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -8.$$

Celui-ci est non nul, ces vecteurs ne sont donc pas colinéaires.

• Pour trouver la condition à laquelle les trois points $A\binom{1}{2}$, $B\binom{-2}{3}$ et $M\binom{x}{y}$ sont alignés, on calcule le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}\binom{-3}{1}$ et $\overrightarrow{AM}\binom{x-1}{y-2}$:

$$\begin{vmatrix} -3 & x-1 \\ 1 & y-2 \end{vmatrix} = -3(y-2) - 1(x-1) = -x - 3y + 7.$$

Le point $M\binom{x}{y}$ est aligné avec les points A et B lorsque $x + 3y = 7$. On obtient ainsi une équation de la droite (AB).

1.2.2 Coplanarité de trois vecteurs de l'espace

Trois vecteurs $\vec{a}\begin{pmatrix} a \\ a' \\ a'' \end{pmatrix}$, $\vec{b}\begin{pmatrix} b \\ b' \\ b'' \end{pmatrix}$ et $\vec{c}\begin{pmatrix} c \\ c' \\ c'' \end{pmatrix}$ sont coplanaires si, et seulement si, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$. On dit dans ce cas que la famille de vecteurs $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$ est *liée*. Dans le cas contraire, elle est dite *libre*.
Le déterminant se développe suivant la première ligne :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}$$

• Les trois vecteurs $\vec{a}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{c}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ sont coplanaires car

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-2) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 0 + 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2)(-3) + 2(-3) = 0.$$

2 Produit scalaire

2.1 Avec la définition

• ABC est un triangle équilatéral de côté 5. Pour calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Il suffit d'appliquer la définition (formule 10) :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 25\,\cos(60) = 12,5.$$

2.2 Avec les coordonnées dans une base orthonormée

• On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. On calcule leur produit scalaire à partir de leurs coordonnées (formule 18) :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times (-2) + (-1) \times 4 + 5 \times 3 = 5.$$

En appliquant la formule (18), on peut également calculer la norme de ces vecteurs :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x_{\vec{u}}^2 + y_{\vec{u}}^2 + z_{\vec{u}}^2} = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{35} \quad \text{et} \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{29}.$$

Dès lors, il est possible de calculer l'angle non orienté α que forment ces deux vecteurs :

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{5}{\sqrt{35} \times \sqrt{29}} \quad \text{d'où} \quad \alpha \approx 79.$$

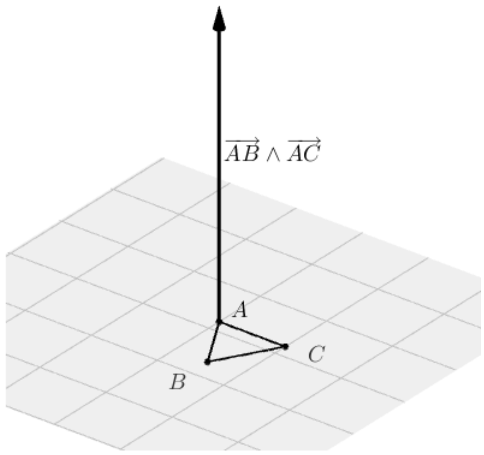
3 Produit vectoriel

3.1 Avec la définition

• ABC est un triangle équilatéral de côté 5. Pour calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. On applique la définition :

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est *directement* perpendiculaire au plan ABC : le triplet $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)$ est direct. On a ainsi la direction et le sens du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

La formule (22) donne ensuite la norme de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$: $AB \times AC \times \sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = 25\ \sin(60) = 12,5\sqrt{3} \approx 21,65$.



3.2 Avec les coordonnées dans une base orthonormée directe

On peut calculer un produit vectoriel comme on calcule un déterminant.

• Considérons par exemple les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$. On peut abusivement écrire :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \vec{i} \\ 3 & 7 & \vec{j} \\ 4 & -5 & \vec{k} \end{vmatrix}$$

puis développer suivant la troisième colonne :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \vec{k} = -43\,\vec{i} + 13\,\vec{j} + \vec{k}.$$

4 Déterminants

Les déterminants servent à résoudre des systèmes (formules de Cramer), savoir si deux vecteurs sont colinéaires ou non (dans le plan), si trois vecteurs sont coplanaires ou non (dans l'espace) ou encore à calculer l'inverse d'une matrice.

4.1 Calcul d'un déterminant d'ordre 2

On calcule ici les déterminants $A = \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} -3 & 8 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ et $D = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$ en appliquant la formule $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = a\,b' - a'\,b$, et on relève quelques propriétés.

• $A = \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 8 \times (-1) - 4 \times (-3) = 4.$

• $B = \begin{vmatrix} -3 & 8 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = (-3) \times 4 - 8 \times (-1) = -4.$ On constate que le déterminant change de signe lorsque l'on permute les deux colonnes.

• $C = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times (-1) - 1 \times (-3) = 1$. On remarque que $\begin{vmatrix} 4 \times 2 & -3 \\ 4 \times 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \times \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$.

• $D = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = (-1) \times 6 - 3 \times (-2) = 0$. Lorsque les deux colonnes (ou les deux lignes) sont proportionnelles, le déterminant est nul.

4.2 Calcul d'un déterminant d'ordre 3

On montre ici comment calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ en développant suivant une ligne ou une colonne.

Il faut bien faire attention aux signes, et pour cela garder en tête le tableau : $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

• On développe suivant la première colonne. Les facteurs 1, 3 et -5 sont associés aux cofacteurs

$$+\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \qquad -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + (-5)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 3 \cdot 8 - 5 \cdot 2 = -38$$

• On peut développer suivant la première ligne :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = -4 - 2 \cdot 11 - 12 = -38.$$

• En développant suivant la deuxième colonne, les facteurs 2, 0 et 4 sont associés aux cofacteurs

$$-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} \qquad +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 11 - 4 \cdot 4 = -38$$

4.3 Utilisation des propriétés

Claculer la valeur de $A = \begin{vmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 4 & 6 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$, puis en déduire celles de $B = \begin{vmatrix} 9 & 1 & -3 \\ 6 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix}$ et de $C = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 6 \\ 4 & 6 & 4 \\ -3 & 1 & -10 \end{vmatrix}$.

• On développe A suivant la première colonne :

$$A = 1\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 9 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 9 & -3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 32 - 4 \cdot 48 - 3 \cdot 0 = -160.$$

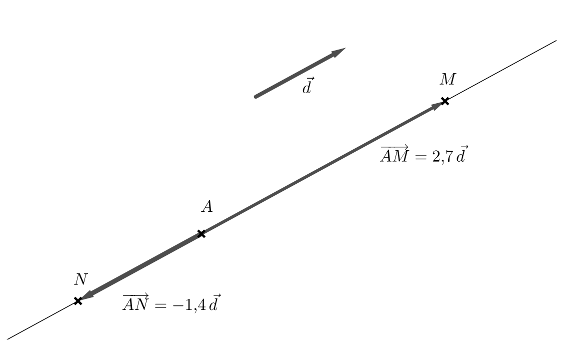
• B est l'opposé de A (les colonnes 1 et 2 sont permutées) : $B = 160$.

• La troisième colonne de C est la troisième colonne de A multipliée par -2 : $C = -2 \times A = 320$.

5 Géométrie analytique dans le plan

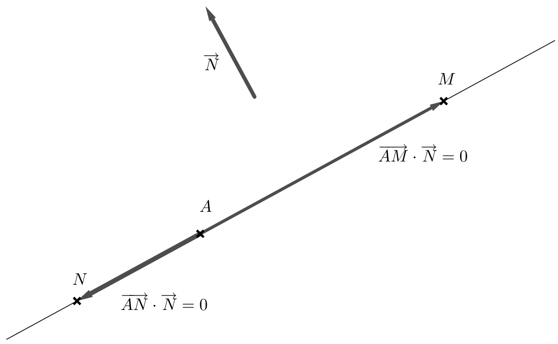
Dans toute cette section, le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R} = \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

5.1 Caractérisations vectorielles d'une droite



La droite $\mathscr{D}$ est constituée des points M tels que

$$\overrightarrow{AM} = t\,\vec{d} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$



La droite $\mathscr{D}$ est constituée des points M tels que

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{N} = 0.$$

5.2 Représentations d'une droite

• On considère les deux points $A\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$. La droite (AB) est l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$ où le *paramètre* t décrit $\mathbb{R}$ (formulle 33). Cette égalité vectorielle se traduit par les équations :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x - x_A & = & t\,(x_B - x_A) \\ y - y_A & = & t\,(y_B - y_A) \end{array} \right. \;;\quad t \in \mathbb{R}. \qquad \text{soit ici} \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -1 - 3\,t \\ y & = & 4 + 2\,t \end{array} \right. \;;\quad t \in \mathbb{R}.$$

On obtient un système d'équations paramétriques de la droite (AB) (formule 35) où les coefficients $(-3, 2)$ du paramètre t sont les coordonnées du vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ de cette droite.

• On considère les mêmes points A et B que précédemment. La droite (AB) est l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ soient colinéaires, ce qui se traduit par les équations :

$$\begin{array}{rcl} \begin{vmatrix} x+1 & -3 \\ y-4 & 2 \end{vmatrix} & = & 0 \\ 2\,(x+1) + 3\,(y-4) & = & 0 \\ 2\,x + 3\,y - 10 & = & 0 \end{array}$$

On obtient une équation cartésienne de la droite (AB) (formule 36) où les coefficients $(2, 3)$ de x et y sont les coordonnées d'un vecteur normal $\vec{N}$ à la droite (AB). (On peut le vérifier en calculant $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{N}$.)

• On considère la droite passant par le point $A\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et orthogonale au vecteur $\vec{N}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$. Cette droite est l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-4 \end{pmatrix}$ et $\vec{N}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ soient orthogonaux, ce qui se traduit par les équations :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{N} &= 0 \quad \text{(formule 34)} \\ 5\,(x+1) + (-4)(y-4) &= 0 \\ 5\,x - 4\,y + 17 &= 0 \quad \text{(formule 36)} \end{aligned}$$

Les coefficients $(5, -4)$ sont bien les coordonnées du vecteur normal $\overrightarrow{N}$.

5.3 Calculs de distances

• On considère les deux points $A\binom{3}{2}$ et $B\binom{-1}{4}$. Calculer la distance AB.

Dans le repère orthonormé, on applique la formule (21), dans le plan :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

• La distance d'un point P à une droite $\mathscr{D}$ est la distance PH où H est le projeté orthogonal de P sur $\mathscr{D}$. Nous allons voir comment calculer cette distance en justifiant la formule (38) du précis.
On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x + 3\,y - 9 = 0$ et le point $P\binom{5}{-1}$. On note H le projeté orthogonal de P sur $\mathscr{D}$.

Le vecteur $\overrightarrow{PH}$ est orthogonal à $\mathscr{D}$, et donc $\overrightarrow{PH}$ est colinéaire au vecteur normal à $\mathscr{D}$: $\overrightarrow{N}\binom{1}{3}$.

On a donc $\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{N} = PH\,\|\overrightarrow{N}\|\,\cos(\overrightarrow{PH}, \overrightarrow{N}) = \pm PH\,\|\overrightarrow{N}\|$ d'où $|\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{N}| = PH\,\|\overrightarrow{N}\|$. La distance de P à $\mathscr{D}$ est donc :

$$d(P, \mathscr{D}) = PH = \frac{|\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{N}|}{\|\overrightarrow{N}\|}.$$

Il reste à calculer $\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{N}$, sans connaître le point H. On considère un point particulier A de $\mathscr{D}$, par exemple $A\binom{3}{2}$. On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{N} = \left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AH}\right) \cdot \overrightarrow{N} &= \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{N} + \underbrace{\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{N}}_{0 \text{ car } \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{N}} \\ &= 1\,(x_A - x_P) + 3\,(y_A - y_P) \\ &= \underbrace{x_A + 3\,y_A - 9}_{0 \text{ car } A \in \Delta} + 9 - x_P - 3\,y_P \\ \text{d'où} \quad |\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{N}| &= |x_P + 3\,y_P - 9| \end{aligned}$$

La distance du point P à $\mathscr{D}$ est

$$d(P, \mathscr{D}) = \frac{|x_P + 3\,y_P - 9|}{\|\overrightarrow{N}\|} = \frac{|5 + 3\,(-1) - 9|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{10}} \approx 2,21.$$

On retiendra la formule et on l'appliquera directement sans la redémontrer :

La distance d'un point P à la droite $\mathscr{D} : a\,x + b\,y + c = 0$ est

$$d(P, \mathscr{D}) = \frac{|a\,x_P + b\,y_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{(formule 38).}$$

5.4 Calculs d'angles

• Calculer l'angle $\widehat{BAC}$ où $A\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$.

On utilise la formule $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$. Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$. Dès lors, on calcule $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$:

$$\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \frac{2\cdot 6+5\cdot 1}{\sqrt{2^2+5^2}\,\sqrt{6^2+1^2}} = \frac{17}{\sqrt{29}\,\sqrt{37}} \approx 0,52.$$

On en déduit $\widehat{BAC}\approx 59$.

• Calculer l'angle des deux droites $\mathscr{D}:\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -7+4\,t\\ y &=& 2+3\,t\end{array}\right.\ ;\ t\in\mathbb{R}$ et $\mathscr{D}':\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+2\,t\\ y &=& 4-t\end{array}\right.\ ;\ t\in\mathbb{R}$

Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont respectivement dirigées par les vecteurs $\vec{d}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{d'}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$. Le cosinus de l'angle aigu α formé par ces deux droites est donné par la formule (39) :

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{d}\cdot\vec{d'}|}{\|\vec{d}\|\,\|\vec{d'}\|} = \frac{4\cdot 2+3\cdot(-1)}{\sqrt{4^2+3^2}\,\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{5}{5\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

On en déduit $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\approx 63$.

• Calculer l'angle des deux droites $\mathscr{D} : -2\,x+5\,y+4=0$ et $\mathscr{D}' : 5\,x+12\,y-8=0$.

Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ admettent pour vecteurs normaux respectivement $\overrightarrow{N}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{N'}\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix}$. On applique la formule (39), valable aussi avec deux vecteurs normaux, en utilisant les notations "matricielles" :

$$\cos\,\alpha = \frac{\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}\right\|\times\left\|\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix}\right\|} = \frac{-10+50}{\sqrt{29}\,\sqrt{169}} = \frac{50}{13\sqrt{29}},$$

d'où $\alpha\approx 44$.

5.5 Intersection de deux droites

• On considère les deux droites $\mathscr{D} : -x+y-3=0$ et $\mathscr{D}' : 2\,x+3\,y-21=0$. Étudier l'intersection de ces droites revient à résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} -x &+& y &=& 3\\ 2\,x &+& 3\,y &=& 21\end{array}\right. \qquad \text{(formule 40)}$$

Ce système peut s'écrire vectoriellemnt sous la forme :

$$x\,\vec{a}+y\,\vec{b}=\vec{s} \qquad \text{où} \quad \vec{a}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix},\quad \vec{b}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{s}\begin{pmatrix}3\\21\end{pmatrix} \quad \text{(formule 41).}$$

On peut considérer le produit vectoriel de deux vecteurs du plan :

$$\vec{a}\wedge\vec{b} = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}-1 & 1 & \vec{i}\\ 2 & 3 & \vec{j}\\ 0 & 0 & \vec{k}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}\,\vec{k} = \det(\vec{a},\vec{b})\,\vec{k}.$$

On se contentera donc de la troisième composante comme il est remarqué dans le précis à propos de la formule (23).

Partant de l'égalité $x\,\vec{a}+y\,\vec{b}=\vec{s}$, on peut écrire :

$$\left(x\,\vec{a}+y\,\vec{b}\right)\wedge\vec{b}=\vec{s}\wedge\vec{b}\quad\text{et}\quad\vec{a}\wedge\left(x\,\vec{a}+y\,\vec{b}\right)=\vec{a}\wedge\vec{s}$$

soit

$$x\,\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{s}\wedge\vec{b}\quad\text{et}\quad y\,\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{a}\wedge\vec{s}$$

d'où

$$x\det(\vec{a},\vec{b})=\det(\vec{s},\vec{b})\quad\text{et}\quad y\det(\vec{a},\vec{b})=\det(\vec{a},\vec{s})$$

On calcule le *déterminant du système* : $\delta=\det(\vec{a},\vec{b})=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-5$. Ce déterminant étant non nul, on calcule la solution unique :

$$x=\frac{\det(\vec{s},\vec{b})}{\delta}=\frac{\begin{vmatrix}3 & 1\\ 21 & 3\end{vmatrix}}{\delta}=\frac{-12}{-5}=2,4\quad\text{et}\quad y=\frac{\det(\vec{a},\vec{s})}{\delta}=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & 21\end{vmatrix}}{\delta}=\frac{-27}{-5}=5,4$$

Les droites Δ et Δ' sont sécantes au point de coordonnées $\binom{2,4}{5,4}$.

On retiendra la technique pour calculer la solution d'un système

$$\left\{\begin{array}{rcl} a\,x+b\,y &=& s\\ a'\,x+b'\,y &=& s'\end{array}\right.\qquad\text{dans le cas où le déterminant }\delta=\begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}\neq 0:$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}s & b\\ s' & b'\end{vmatrix}}{\delta}\qquad\text{et}\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}a & s\\ a' & s'\end{vmatrix}}{\delta}\qquad\text{(formules de Cramer).}$$

• On considère les deux droites définies par des équations paramétriques :

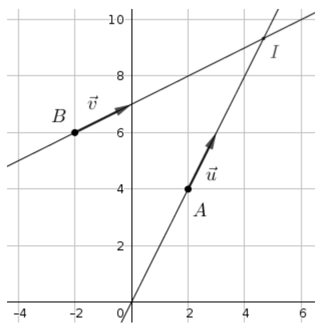
$$\Delta:\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+t\\ y &=& 4+2\,t\end{array}\right.\;;\;t\in\mathbb{R}\quad\text{et}\quad\Delta':\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2+2\,t\\ y &=& 6+t\end{array}\right.\;;\;t\in\mathbb{R}.$$

Δ est la droite passant par le point $A\binom{2}{4}$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\binom{1}{2}$ et Δ' est la droite passant par $B\binom{-2}{6}$ et dirigée par $\vec{v}\binom{2}{1}$. Le paramètre t d'un point M dans la représentation paramétrique de Δ correspond à l'abscisse de M dans le repère $(A,\vec{u})$ de Δ. De même, le paramètre t d'un point de Δ' est l'abscisse de ce point dans le repère $(B,\vec{v})$ de Δ'.

Les deux vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'étant pas colinéaires, les deux droites Δ et Δ' se coupent en un point I.

Comme on peut le voir sur la figure ci-contre, le point I a une abscisse inférieure à 3 dans le repère $(A,\vec{u})$ de Δ, et une abscisse supérieure à 3 dans le repère $(B,\vec{v})$ de Δ'. Le point I n'a donc pas le même paramètre t dans les deux représentations paramétriques des droites Δ et Δ'.

Pour calculer les coordonnées de I, on doit noter différemment les paramètres des deux systèmes d'équations.



On résout donc le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2+t &=& -2+2\,t'\\ 4+2\,t &=& 6+t'\end{array}\right.$$

qui s'écrit également :

$$\begin{cases} t - 2t' & = & -4 \\ 2t - t' & = & 2 \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est $\delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3$. En appliquant les formules de Cramer, on obtient

$$t = \frac{\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{8}{3} \quad \text{et} \quad t' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{10}{3}.$$

Un seul des deux calculs est nécessaire, et on retrouve bien $t < 3$ et $t' > 3$. Il reste à reporter la valeur $t = \frac{8}{3}$ dans la représentation de Δ pour obtenir les coordonnées du point I :

$$\begin{cases} x_I & = & 2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3} \\ y_I & = & 4 + 2\,\frac{8}{3} = \frac{28}{3} \end{cases}$$

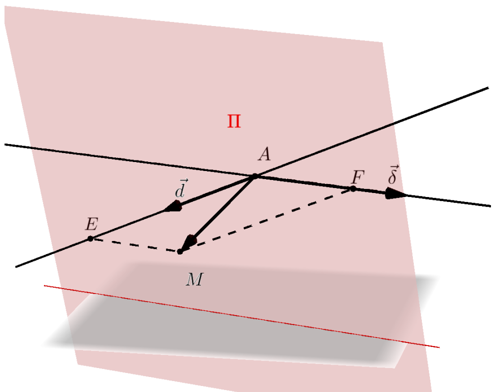
6 Géométrie analytique dans l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\mathscr{R} = \left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

6.1 Caractérisation vectorielle d'un plan

On considère le plan $\mathscr{P}$ passant par un point A et de vecteurs directeurs $\vec{d}$ et $\vec{\delta}$. Ce plan est constitué des points M tels que

$$\overrightarrow{AM} = \underbrace{t\,\vec{d}}_{\overrightarrow{AE} \text{ sur la figure}} + \underbrace{\tau\,\vec{\delta}}_{\overrightarrow{AF} \text{ sur la figure}} \qquad \text{où} \quad t \in \mathbb{R} \text{ et } \tau \in \mathbb{R} \quad \text{(formule 44)}$$



Le vecteur $\overrightarrow{N} = \vec{d} \wedge \vec{\tau}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$. Ce plan est l'ensemble des points M tels que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{N}$, d'où la caractérisation (45) :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{N} = 0.$$

6.2 Représentations d'un plan ou d'une droite

- On considère la droite $\mathscr{D}$ passant par le point $E\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et dirigée par le vecteur $\vec{d}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule (46), on obtient la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x & = & 4 - t \\ y & = & -2 + t \\ z & = & 1 + 3\,t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

où on reconnait les coordonnées du point E, $(4,-2,1)$ et les coordonnées du vecteur directeur, $(-1,1,3)$, comme coefficients du paramètre t.

• On considère le plan $\mathscr{P}$ passant par le point $A\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et de vecteurs directeurs $\vec{d}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{\delta}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$. Ce plan est l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tels que $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{d} + \tau\,\vec{\delta}$ où les paramètres t et τ parcourent $\mathbb{R}$. Cette caractérisation vectorielle se traduit par le système d'équations paramétriques (formule 47) :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-2t+3\tau \\ y & = & -2+t-\tau \\ z & = & 3-t \end{array}\right. \quad ; \quad t\in\mathbb{R}\ ;\ \tau\in\mathbb{R},$$

où les coefficients de t, $(-2,1,-1)$ et ceux de τ, $(3,-1,0)$, sont les coordonnées des deux vecteurs directeurs de $\mathscr{P}$.

• On considère le plan défini précédemment :

$$\mathscr{P}:\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-2t+3\tau \\ y & = & -2+t-\tau \\ z & = & 3-t \end{array}\right. \quad ; \quad t\in\mathbb{R}\ ;\ \tau\in\mathbb{R}.$$

Ce plan, dirigé par les vecteurs $\vec{d}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{\delta}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ admet pour vecteur normal

$$\overrightarrow{N} = \vec{d}\wedge\vec{\delta} = \begin{vmatrix} -2 & -2 & \vec{i} \\ 1 & 1 & \vec{j} \\ -1 & 0 & \vec{k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} = \vec{i}+2\,\vec{j}.$$

Le plan $\mathscr{P}$ est alors l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tels que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ soit orthogonal au vecteur $\overrightarrow{N}$, ce qui se traduit par l'égalité : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{N} = 0$.

On traduit analytiquement cette égalité dans le repère orthonormé :

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix}x-1\\y+2\\z-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} & = & 0 \\ (x-1)+2(y+2)+0(z-3) & = & 0 \\ x+2\,y+0\,z+3 & = & 0 \end{array}$$

On obtient une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ (formule 48) où les coefficients de x, y et z sont les coordonnées du vecteur normal $\overrightarrow{N}$. On notera que, dans l'espace, l'équation $x+2\,y+3=0$ caractérise un plan et non une droite.

• On considère le plan $\mathscr{P}$ passant par le point $A\begin{pmatrix}-3\\2\\4\end{pmatrix}$ et dirigé par les deux vecteurs $\vec{d}\begin{pmatrix}2\\-1\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{\delta}\begin{pmatrix}5\\-5\\1\end{pmatrix}$. Un point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ appartient à $\mathscr{P}$ si, et seulement si, les trois vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+3\\y-2\\z-4\end{pmatrix}$, $\vec{d}$ et $\vec{\delta}$ sont coplanaires, c'est-à-dire si, et seulement si, le produit mixte $\left(\overrightarrow{AM},\vec{d},\vec{\delta}\right)$ est nul. Ce produit mixte n'est autre que le déterminant des trois vecteurs. Le plan $\mathscr{P}$ est donc caractérisé par les équations :

$$
\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{AM},\vec{d},\vec{\delta}\right) &= 0\\
\begin{vmatrix} x+3 & 2 & 5\\ y-2 & -1 & -5\\ z-4 & -4 & 1\end{vmatrix} &= 0\\
(x+3)\begin{vmatrix} -1 & -5\\ -4 & 1\end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 2 & 5\\ -4 & 1\end{vmatrix} + (z-4)\begin{vmatrix} 2 & 5\\ -1 & -5\end{vmatrix} &= 0\\
-21(x+3)-22(y-2)-5(z-4) &= 0\\
-21\,x-22\,y-5\,z+1 &= 0
\end{aligned}
$$

On obtient une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ où les coefficients $(-21,-22,-5)$ sont les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{N}$ normal à ce plan.

6.3 Intersection d'une droite et d'un plan

• On considère la droite $\mathscr{D}$ et le plan $\mathscr{P}$ définis par

$$
\mathscr{D} : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 4-t\\ y &=& -2+t\\ z &=& 1+3\,t\end{array}\right. \quad ; \quad t\in\mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{P} : x+2\,y+3=0.
$$

La droite $\mathscr{D}$, dirigée par le vecteur $\vec{d}\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$ lorsque $\vec{d}$ est orthogonal au vecteur normal $\overrightarrow{N}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ de $\mathscr{P}$.

On calcule le produit scalaire $\vec{d}\cdot\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = 1 \neq 0$. La droite $\mathscr{D}$ est donc sécante au plan $\mathscr{P}$. On note I le point d'intersection. Il existe alors un réel t tel que :

$$
\left\{\begin{array}{rl} x_I = & 4-t\\ y_I = & -2+t\\ z_I = & 1+3\,t\end{array}\right. \quad \text{et} \quad x_I+2\,y_I+3=0.
$$

On a donc $(4-t)+2\,(-2+t)+3=0$ soit $t=-3$; on en déduit $I\begin{pmatrix}7\\-5\\-8\end{pmatrix}$.

6.4 Calculs de distances et d'angles

A. Distance d'un point à une droite

• On considère la droite $\mathscr{D}$: $\left\{\begin{array}{l} x = -3 \ -2\,t\\ y = \ 4 \ \ +tt\\ z = \ 5 \ \ +t\end{array}\right.$; $t\in\mathbb{R}$ et le point $P\begin{pmatrix}-4\\-1\\-1\end{pmatrix}$. La distance du point P à la droite $\mathscr{D}$ est la longueur PH où H est le projeté orthogonal de P sur la droite $\mathscr{D}$. Avant d'appliquer la formule (50), justifions cette formule.

⋆ La droite $\mathscr{D}$ est dirigée par le vecteur $\vec{d}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$. On part de l'égalité (formule 22) :

$$
\|\overrightarrow{PH}\wedge\vec{d}\| = \|\overrightarrow{PH}\|\,\|\vec{d}\|\,\sin\varphi \quad \text{où} \quad \varphi = (\overrightarrow{PH},\vec{d}) \in [0,\pi],
$$

qui nous donne :

$$
PH = \frac{\|\overrightarrow{PH}\wedge\vec{d}\|}{\|\vec{d}\|} \quad \text{car} \quad \overrightarrow{PH}\perp\vec{d} \quad \text{et donc} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.
$$

- $\star$ Il reste à justifier que $\|\overrightarrow{PH}\wedge\vec{d}\| = \|\overrightarrow{PA}\wedge\vec{d}\|$ où A est un point quelconque de la droite $\mathscr{D}$. On utilise pour cela la bilinéarité du produit vectoriel :

$$\overrightarrow{PH}\wedge\vec{d} = \left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AH}\right)\wedge\vec{d} = \overrightarrow{PA}\wedge\vec{d} + \underbrace{\overrightarrow{AH}\wedge\vec{d}}_{\vec{0}\text{ car }\overrightarrow{AH}=\lambda\vec{d}} \quad \text{d'où} \quad \|\overrightarrow{PH}\wedge\vec{d}\| = \|\overrightarrow{PA}\wedge\vec{d}\|.$$

On peut donc calculer la distance d'un point à une droite, dans l'espace comme dans le plan, en appliquant la formule (50) ou (37) :

$$d(P,\mathscr{D}) = \frac{\|\overrightarrow{PA}\wedge\vec{d}\|}{\|\vec{d}\|} \quad \text{où} \quad A\in\mathscr{D}.$$

Ici, un point de $\mathscr{D}$ est $A\begin{pmatrix}-3\\4\\5\end{pmatrix}$. On calcule alors le produit vectoriel :

$$\overrightarrow{PA}\wedge\vec{d} = \begin{pmatrix}1\\5\\6\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}1 & -2 & \vec{i}\\5 & 1 & \vec{j}\\6 & 1 & \vec{k}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}5 & 4\\6 & 5\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}1 & -3\\6 & 5\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}1 & -3\\5 & 4\end{vmatrix}\vec{k} = \vec{i} - 23\,\vec{j} + 19\,\vec{k}.$$

On en déduit

$$d(P,\mathscr{D}) = \frac{\|\vec{i}-23\,\vec{j}+19\,\vec{k}\|}{\|-2\,\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\|} = \frac{\sqrt{1^2+(-23)^2+19^2}}{\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}} \approx 12,19.$$

B. Distance d'un point à un plan

• On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $3\,x+3\,y+2\,z-5=0$ et le point $P\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}$. Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est $\overrightarrow{N}\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$. La distance du point point P au plan $\mathscr{P}$ se calcule en appliquant la formule (51) :

$$d(P,\mathscr{P}) = \frac{|3\,x_P+3\,y_P+2\,z_P-5|}{\|3\,\vec{i}+3\,\vec{j}+2\,\vec{k}\|} = \frac{|3(4)+3(-2)+2(1)-5|}{\sqrt{3^2+3^2+2^2}} = \frac{3}{\sqrt{22}} \approx 0,64.$$

C. Angle de deux plans

• On considère les deux plans $\mathscr{P} : x+2\,y-3\,z+4=0$ et $\mathscr{P}' : 5\,x-3\,y+4\,z-22=0$. L'angle α entre ces deux plans est l'angle aigu associé à leurs vecteurs normaux $\overrightarrow{N}$ et $\overrightarrow{N'}$, c'est-à-dire :

$$\alpha = \begin{cases}\left(\overrightarrow{N},\overrightarrow{N'}\right) & \text{si } \left(\overrightarrow{N},\overrightarrow{N'}\right)\leqslant\frac{\pi}{2},\\ \pi-\left(\overrightarrow{N},\overrightarrow{N'}\right) & \text{si } \left(\overrightarrow{N},\overrightarrow{N'}\right)>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Pour calculer cet angle, on applique la formule (52).

- $\star$ Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ admettent pour vecteurs normaux respectivement $\overrightarrow{N}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{N'}\begin{pmatrix}5\\-3\\4\end{pmatrix}$.
- $\star$ On calcule leur produit scalaire et leurs normes :

  $$\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{N'} = 1\cdot5+2\cdot(-3)+(-3)\cdot4 = -13, \quad \|\overrightarrow{N}\| = \sqrt{1^2+2^2+(-3)^2} = \sqrt{14} \quad \text{et}$$

  $$\|\overrightarrow{N'}\| = \sqrt{5^2+(-3)^2+4^2} = \sqrt{50}.$$

- $\star$ La formule (52) donne alors :

  $$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{N'}|}{\|\overrightarrow{N}\|\,\|\overrightarrow{N'}\|} = \frac{13}{\sqrt{14}\,\sqrt{50}} \quad \text{d'où} \quad \alpha\approx 61.$$

6.5 Intersection de plans

A. Intersection de deux plans

- On considère les deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ définis par

$$\mathscr{P} : \begin{cases} x = & t \ -2\tau \\ y = 1 +3t \ +\tau \\ z = 2 -5t \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathscr{P}' : \begin{cases} x = -2 -3t \ -\tau \\ y = \ 2 \ -2t +4\tau \\ z = \ 2 \ +5t -5\tau \end{cases}$$

$\star$ Le plan $\mathscr{P}$ est dirigé par $\vec{d}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{\delta}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et le plan $\mathscr{P}'$ par $\vec{d'}\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{\tau'}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$. On peut calculer des vecteurs $\overrightarrow{N}$ et $\overrightarrow{N'}$ normaux à ces plans :

$$\overrightarrow{N} = \vec{d} \wedge \vec{\delta} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & \vec{i} \\ 3 & 1 & \vec{j} \\ -5 & 0 & \vec{k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = 5\,\vec{i} + 10\,\vec{j} + 7\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{N'} = \vec{d'} \wedge \vec{\delta'} = \begin{vmatrix} -3 & -1 & \vec{i} \\ -2 & 4 & \vec{j} \\ 5 & -5 & \vec{k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \vec{k} = -10\,\vec{i} - 20\,\vec{j} - 14\,\vec{k}$$

Les deux vecteurs $\overrightarrow{N}$ et $\overrightarrow{N'}$ étant colinéaires ($\overrightarrow{N'} = 2\,\overrightarrow{N}$), les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles.

$\star$ Reste à voir s'ils sont confondus ou disjoints. Choisissons un point du plan $\mathscr{P}$, $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, et regardons si ce point appartient ou non à $\mathscr{P}'$. Il s'agit de résoudre le système :

$$\begin{cases} 0 = -2 -3t \ -\tau \\ 1 = \ 2 \ -2t +4\tau \\ 2 = \ 2 \ +5t -5\tau \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} -3t \ -\tau \ = \ 2 \\ -2t +4\tau = -1 \\ 5t \ -5\tau = \ 0 \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} t \ = \tau \\ -4t = \ 2 \\ 2t \ = -1 \end{cases},$$

qui admet pour solution $t = \tau = -\frac{1}{2}$. Le point A appartient également au plan $\mathscr{P}'$.

$\star$ En conlusion, les deux plans sont confondus.

- Étudier la position relative des deux plans $\mathscr{P} : 3\,x + y - 5\,z + 12 = 0$ et $\mathscr{P}' : 5\,x + 10\,y + 7\,z - 55 = 0$.

$\star$ Ces plans admettent pour vecteurs normaux respectivement $\overrightarrow{N}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{N'}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires car $\overrightarrow{N} \wedge \overrightarrow{N'} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & \vec{i} \\ 1 & 10 & \vec{j} \\ -5 & 7 & \vec{k} \end{vmatrix} = 57\,\vec{i} - 46\,\vec{j} + 25\,\vec{k} \neq \vec{0}$. Les deux plans se coupent suivant une droite $\mathscr{D}$.

$\star$ Cette droite, incluse dans chacun des deux plans, est orthogonale à chacun des vecteurs $\overrightarrow{N}$ et $\overrightarrow{N'}$. Elle est donc dirigée par le vecteur $\vec{d} = \overrightarrow{N} \wedge \overrightarrow{N'}$.

$\star$ Pour avoir une représentation paramétrique, il reste à déterminer un point particulier de $\mathscr{D}$, c'est-à-dire une solution particulière au système

$$\begin{cases} 3\,x + y - 5\,z + 12 = 0 \\ 5\,x + 10\,y + 7\,z - 55 = 0 \end{cases}$$

Comme $\mathscr{D}$ n'est pas parallèle au plan d'équation $z = 0$ (la troisième composante du vecteur directeur $\vec{d}$ n'est pas nulle), on peut déterminer son point d'intersection avec ce plan. En posant $z = 0$, le système précédent s'écrit :

$$\begin{cases} 3\,x \ +y \ = -12 \\ 5\,x +10\,y = \ 55 \end{cases}.$$

Son déterminant est $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 25$ et ce système admet pour solution

$$x = \frac{1}{25}\begin{vmatrix} -12 & 1 \\ 55 & 10 \end{vmatrix} = -\frac{175}{25} = -7 \qquad \text{et} \qquad y = \frac{1}{25}\begin{vmatrix} 3 & -12 \\ 5 & 55 \end{vmatrix} = \frac{225}{25} = 9.$$

⋆ Les deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ se coupent suivant la droite

$$\mathscr{D} : \begin{cases} x = -7 + 57\,t \\ y = 9 - 46\,t \ ; \ t \in \mathbb{R}. \\ z = 25\,t \end{cases}$$

B. Intersection de trois plans

• On considère les trois plans $\mathscr{P} : x + 3\,y - 2\,z - 10 = 0$, $\mathscr{P}' : 2\,x - 4\,y + 5\,z + 8 = 0$ et $\mathscr{P}'' : 3\,x - y + 2\,z - 4 = 0$. Déterminer les points communs à ces trois plans revient à résoudre le système

$$\begin{cases} x + 3\,y - 2\,z = 10 \\ 2\,x - 4\,y + 5\,z = -8 \\ 3\,x - y + 2\,z = 4 \end{cases}$$

⋆ Le déterminant du système est

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \underbrace{\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}_{-3} - 2 \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}_{4} + 3 \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}}_{7} = 10.$$

⋆ Ce déterminant n'est pas nul : les vecteurs normaux aux trois plans, $\overrightarrow{N}$, $\overrightarrow{N'}$ et $\overrightarrow{N''}$, ne sont donc pas coplanaires. Les deux plans $\mathscr{P}'$ et $\mathscr{P}''$ se coupent alors suivant une droite $\mathscr{D}$ dirigée par le vecteur $\vec{d} = \overrightarrow{N'} \wedge \overrightarrow{N''}$.

⋆ Cette droite n'est pas parallèle à $\mathscr{P}$ car son vecteur directeur $\vec{d}$ n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{N}$. En effet, le produit scalaire $\overrightarrow{N} \cdot \vec{d}$ est égal au produit mixte $\overrightarrow{N} \cdot \left(\overrightarrow{N'} \wedge \overrightarrow{N''}\right)$ qui n'est autre que le déterminant non nul δ.

⋆ La droite coupe donc le plan $\mathscr{P}$ en un point I, qui est donc le point d'intersection des trois plans.

⋆ Comme dans le cas de deux droites sécantes dans le plan, les coordonnées du point I sont données par les formules de Cramer :

$$x_I = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 3 & -2 \\ -8 & -4 & 5 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\delta}, \quad y_I = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 10 & -2 \\ 2 & -8 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{\delta} \quad \text{et} \quad z_I = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 10 \\ 2 & -4 & -8 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{\delta}$$

soit

$$x_I = \frac{30}{10} = 3, \quad y_I = \frac{10}{10} = 1 \quad \text{et} \quad z_I = \frac{-20}{10} = -2.$$