DOCUMENT C
EXERCICES

2021

I Algèbre vectorielle

[1] On considère les points $A(-3;3)$, $B(5;2)$ et $C(2;1)$.

a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Ces deux vecteurs sont-ils colinéaires ? Que peut-on dire des trois points A, B et C ?

[2] On considère les trois points du plan $A\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$.

a) Déterminer le point M tel que $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{0}$.

b) Calculer les coordonnées du milieu I du segment $[BC]$.

c) Vérifier que les trois points A, M et I sont alignés.

[3] On considère les trois vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$.

a) Calculer les coordonnées du vecteurs $2\,\overrightarrow{u}+3\,\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}$.

b) Deux des trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont-ils colinéaires ?

c) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{a}\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

d) Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ forment-ils une base de l'espace ?

II Produit scalaire

Le plan et l'espace sont munis de repère orthonormés.

[4] On considère les deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$. Calculer $\|\overrightarrow{u}\|$, $\|\overrightarrow{v}\|$, $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ puis une mesure approchée de l'angle $\varphi=(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.

[5] A, B, C et D sont quatre points de l'espace. Montrer l'égalité :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0.$$

(Écrire par exemple $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$.)

En déduire que dans un quadrilatère plan $ABCD$, si les côtés opposés $[AB]$ et $[CD]$ ainsi que $[AD]$ et $[BC]$ sont orthogonaux, alors ses diagonales sont orthogonales. Dessiner un tel quadrilatère.

[6] On considère les deux points du plan $A\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$. Déterminer une équation du cercle de centre A et passant par B.

III Produit vectoriel

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct.

[7] On considère les trois vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u}\wedge(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w})$ et $(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})\wedge\overrightarrow{w}$.

[8] On considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$, et on note $\mathscr{F}$ le parallélogramme construit sur ces deux vecteurs.

a) Calculer $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$, et en déduire l'aire du parallèlogramme $\mathscr{F}$.

b) On peut considérer $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ comme deux vecteurs du plan (xOy), dont les coordonnées sont $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$. Vérifier que l'aire de $\mathscr{F}$ est $|\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})|$.

[9] On considère les quatre points $P\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $Q\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $R\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $S\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

a) Montrer que le volume du tétraèdre $PQRS$ est égal au sixième du volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{PS}$.

b) Calculer le volume du parallélépipède et en déduire celui du tétraèdre $PQRS$.

IV Déterminants

[10] **a)** Calculer les déterminants d'ordre 2 : $\begin{vmatrix}2&2\\1&3\end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix}5&3\\-1&2\end{vmatrix}$.

b) Calculer les déterminants d'ordre 3 : $\begin{vmatrix}1&1&1\\3&3&2\\2&3&1\end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix}5&0&-2\\1&2&1\\-3&1&4\end{vmatrix}$.

[11] Calculer les produits vectoriels en les considérant abusivement comme des déterminants :

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}.$$

V Géométrie analytique dans le plan

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

[12] On considère les deux points $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$.

a) Déterminer un vecteur directeur de la droite (AB).

b) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

c) Déterminer une représentation cartésienne de la droite (AB).

[13] Déterminer une représentation cartésienne de la droite Δ passant par $A\binom{-2}{5}$ et parallèle à la droite $\mathscr{D} : x - 2\,y + 5 = 0$.

[14] Déterminer l'intersection des deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ dans chacun des cas suivants :

a) $\mathscr{D} : 3\,x + 5\,y - 2 = 0$ et $\mathscr{D}' : 2\,x - y + 3 = 0$

b) $\mathscr{D} : x - 2\,y + 4 = 0$ et $\mathscr{D}' : \begin{cases} x &= 2 + t \\ y &= 3 - 2\,t \end{cases}$

[15] Calculer l'angle aigu φ entre les deux droites $\mathscr{D} : 2\,x + y - 1 = 0$ et $\mathscr{D}' : 3\,x - 2\,y + 4 = 0$.

[16] Calculer la distance du point $A\binom{2}{1}$ à la droite $\mathscr{D} : 2\,x - 5\,y - 1 = 0$.

VI Géométrie analytique dans l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

[17] On considère les deux plans $\mathscr{P} : x - y = 0$ et $\mathscr{P}' : y + 2\,z - 3 = 0$.

a) Ces deux plans sont-ils parallèles ? orthogonaux ?

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection de ces plans, notée $\mathscr{D}$.

[18] On considère le plan $\mathscr{P} : x + 2\,y + 3\,z - 2 = 0$ et la droite $\mathscr{D} : \begin{cases} x &= 1 + 2\,t \\ y &= 2 - t \\ z &= -3 - t \end{cases}$

a) Le point $A\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ appartient-il à la droite $\mathscr{D}$? au plan $\mathscr{P}$?

b) Calculer la distance du point $B\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ à la droitre $\mathscr{D}$.

c) Calculer la distance du point A au plan $\mathscr{P}$.

d) Déterminer l'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

e) Déterminer la position relative des deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}' : \begin{cases} x &= t \\ y &= -2\,t + 1 \\ z &= t \end{cases}$

[19] Calculer l'angle aigu φ entre les deux plans $\mathscr{P} : 2\,x + y - z + 3 = 0$ et $\mathscr{P}' : -x + z = 0$.

[20] Déterminer l'intersection des trois plans $\mathscr{P} : x + y - z + 4 = 0$, $\mathscr{P}' : 2\,x - y - 2\,z + 2 = 0$ et $\mathscr{P}'' : 5\,x + 2\,y + z - 4 = 0$.

[21] Déterminer l'intersection des trois plans $\mathscr{P} : x + y - 2\,z - 1 = 0$, $\mathscr{P}' : x - y - 4\,z - 3 = 0$ et $\mathscr{P}'' : 2\,x + 3\,y - 3\,z - 1 = 0$.

I Algèbre vectorielle

[1] $A(-3;3)$, $B(5;2)$ et $C(2;1)$.

a) On applique la formule (20), en dimension deux.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont :

$$\begin{cases} x_B - x_A = & 8 \\ y_B - y_A = & -1 \end{cases}$$

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont :

$$\begin{cases} x_C - x_A = & 5 \\ y_C - y_A = & -2 \end{cases}$$

b) Il s'agit de savoir si les couples de coordonnées de ces vecteurs sont proportionnels ou non. On peut le voir directement : $\frac{8}{5} \neq \frac{-1}{-2}$. Ou encore, on peut calculer le déterminant des deux vecteurs :

$$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -16 + 5 \neq 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Les trois points A, B et C sont non alignés.

[2] $A\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Le point “variable” M apparait dans les trois bipoints $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{CM}$. On utilise la relation de Chasles pour ne garder que le bipoint $\overrightarrow{AM}$. On écrit

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AM} + \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}\right) + \left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}\right) = 3\,\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}.$$

L'égalité $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$ équivaut à $3\,\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$, soit $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

On calcule alors les coordonnées de M :

$$\begin{cases} x_M - 4 = \frac{1}{3} \cdot 0 \\ y_M - 0 = \frac{1}{3} \cdot 6 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x_M = 4 \\ y_M = 2 \end{cases}$$

b) Le milieu I du segment $[BC]$ a pour coordonnées

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_B + x_C}{2} = 4 \\ y_I = \frac{x_B + x_C}{2} = 3 \end{cases}$$

c) On pourrait vérifier que les deux vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires. On voit ici que les trois points appartiennent à la droite d'équation $x = 4$. Ils sont bien alignés.

[3] $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a) Les formules (8) et (9) montrent comment calculer les coordonnées d'une combinaison linéaire de vecteurs :

$$2\,\overrightarrow{u} + 3\,\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

b) Un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{u}$ a des coordonnées de la forme $\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$: ni $\overrightarrow{v}$, ni $\overrightarrow{w}$ n'est colinéaire à $\overrightarrow{u}$.

Un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{v}$ a des coordonnées de la forme $\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ -3\,\lambda \end{pmatrix}$: $\overrightarrow{w}$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{v}$.

c) Il s'agit de trouver deux réels λ et μ tels que $\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$, ce qui se traduit par les égalités $\begin{cases}1 = \lambda + \mu\\ 2 = \lambda\\ 5 = \lambda - 3\,\mu\end{cases}$, satisfaites pour $\lambda = 2$ et $\mu = -1$. Ainsi, $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$.

d) On a l'égalité $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$: les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires et ne constituent donc pas une base de l'espace.

II Produit scalaire

[4] $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$.

On utilise les formules (17) et (18), qui s'appliquent dans des bases orthonormées :

$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$, $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 0 + (-3) \cdot (-1) = 1.$

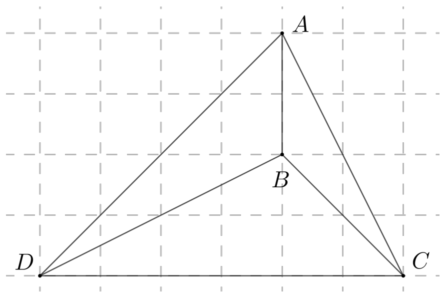
Le cosinus de l'angle $\varphi = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est, d'après la formule (10),

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{14}\,\sqrt{5}} \qquad \text{d'où} \qquad \varphi \approx 83.$$

[5] Pour quatre points quelconques A, B, C et D, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \cdot \overrightarrow{DB} + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}\right) \cdot \overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{0} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0\end{aligned}$$

Soit $ABCD$ un quadrilatère dont les côtés opposés $[AB]$, $[CD]$ et $[AD]$, $[BC]$ sont orthogonaux. On a alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. D'après l'égalité précédente, on a alors $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$: les diagonales $[AC]$ et $[DB]$ sont orthogonales.



[6] $A\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

Un point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ appartient au cercle de centre A et passant par B si, et seulement si $AM^2 = AB^2$, ce qui se traduit par les égalités :

$$\begin{aligned}(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 &= (3-2)^2 + (4+1)^2\\ (x-2)^2 + (y+1)^2 &= 26\end{aligned}$$

Le rayon de ce cercle est $\sqrt{26}$.

III Produit vectoriel

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct.

[7] $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$. On applique la formule (23), ou encore l'application des déterminants au calcul d'un produit vectoriel :

$$\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}1&0\\-1&-1\end{vmatrix}\overrightarrow{i}+(-1)\begin{vmatrix}0&-1\\-1&-1\end{vmatrix}\overrightarrow{j}+\begin{vmatrix}0&-1\\1&0\end{vmatrix}\overrightarrow{k}=-\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{u}\wedge(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w})=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}-1&1\\0&1\end{vmatrix}\overrightarrow{i}+(-1)\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}\overrightarrow{j}+\begin{vmatrix}-1&-1\\0&1\end{vmatrix}\overrightarrow{k}=-\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}-1&1\\0&-1\end{vmatrix}\overrightarrow{i}+(-1)\begin{vmatrix}1&0\\0&-1\end{vmatrix}\overrightarrow{j}+\begin{vmatrix}1&0\\-1&1\end{vmatrix}\overrightarrow{k}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$$

$$(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})\wedge\overrightarrow{w}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}1&0\\1&-1\end{vmatrix}\overrightarrow{i}+(-1)\begin{vmatrix}1&-1\\1&-1\end{vmatrix}\overrightarrow{j}+\begin{vmatrix}1&-1\\1&0\end{vmatrix}\overrightarrow{k}=-\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k}$$

Le produit vectoriel n'est pas associatif : en général, $\overrightarrow{u}\wedge(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w})\neq(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})\wedge\overrightarrow{w}$.

[8] $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$

a) L'aire $\mathscr{A}$ du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs est la norme du produit vectoriel $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$.

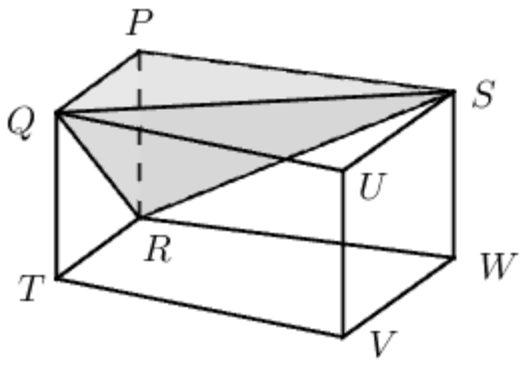
$$\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}3&2\\0&0\end{vmatrix}\overrightarrow{i}+(-1)\begin{vmatrix}2&-1\\0&0\end{vmatrix}\overrightarrow{j}+\begin{vmatrix}2&-1\\3&2\end{vmatrix}\overrightarrow{k}=7\,\overrightarrow{k}$$

L'aire du parallélogramme est donc égale à $\left\|7\,\overrightarrow{k}\right\|=7$.

b) $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs du plan (xOy). Dans la base $\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ de ce plan, leurs coordonnées sont $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $\det_{\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=\begin{vmatrix}2&-1\\3&2\end{vmatrix}=7$. On retrouve bien $\mathscr{A}=|7|$

[9] $P\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $Q\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $R\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $S\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

a) Le volume du tétraèdre $PQRS$ est égal à la moitié de celui de la pyramide $PQTRS$ dont la base $PQTR$ est un parallélogramme. Cette dernière pyramide a son volume égal au tiers de celui du parallélépipède construit sur les trois vecteurs $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{PS}$.



b) On a donc $\mathscr{V}_{PQRS} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}\right)\right|$ où $\left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}\right)$ est le produit mixte des trois vecteurs. Il est défini par la formule (24).

On calcule le produit vectoriel :

$$\overrightarrow{PR} \wedge \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} + (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \overrightarrow{k} = 4\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$$

puis le produit scalaire :

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \left(\overrightarrow{PR} \wedge \overrightarrow{PS}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 5$$

Le volume du tétraèdre $PQRS$ est donc égal à $\frac{1}{6}\,|5| = \frac{5}{6}$.

IV Déterminants

[10] a) On applique la formule (29) et on obtient :

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 1 \times 2 = 4 \qquad \text{et} \qquad \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \times 2 - (-1) \times 3 = 13.$$

b) On calcule $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ en le développant suivant la première colonne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = +1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -3 - 3 \times (-2) + 2 \times (-1) = 1.$$

On développe $\begin{vmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ suivant la deuxième colonne :

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \times 14 + 7 = -21.$$

[11] On peut calculer les produits vectoriels comme des déterminants d'ordre 3 en prenant comme troisième colonne $\begin{pmatrix} \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{k} \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \overrightarrow{i} \\ 2 & 0 & \overrightarrow{j} \\ 3 & 4 & \overrightarrow{k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \overrightarrow{k} = 8\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j} - 4\,\overrightarrow{k}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & \overrightarrow{i} \\ 4 & 0 & \overrightarrow{j} \\ 2 & 1 & \overrightarrow{k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \overrightarrow{k} = 4\,\overrightarrow{i} + 7\,\overrightarrow{j} - 12\,\overrightarrow{k}$$

V Géométrie analytique dans le plan

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

[12] $A\binom{2}{3}$ et $B\binom{-1}{4}$

a) La droite (AB) est dirigée par le vecteur $\vec{d} = \overrightarrow{AB}\binom{-3}{1}$.

Cette droite est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{d}$ soient colinéaires.

b) La colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{d}$ peut se traduire par la relation $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{d}$ où t décrit $\mathbb{R}$ (caractérisation vectorielle (33). Cette caractérisation se traduit analytiquement par le système :

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 4\,t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

c) La colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{d}$ est aussi équivalente à la nullité du déterminant des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{d}$. On obtient alors les équations cartésiennes :

$$\begin{vmatrix} x-2 & -3 \\ y-3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ c'est-à-dire} \qquad x - 2 - (-3)(y-3) = 0, \text{ soit} \qquad x + 3\,y - 11 = 0$$

[13] $A\binom{-2}{5}$ et $\mathscr{D} : x - 2\,y + 5 = 0$

La droite Δ étant parallèle à $\mathscr{D}$, elle admet comme vecteur normal $\vec{N}\binom{1}{-2}$ où $\binom{1}{-2}$ sont les coefficients de x et y.

Un point M appartient à Δ si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{N}$ sont orthogonaux, ce qui se traduit par :

$$\binom{x+2}{y-5} \cdot \binom{1}{-2} = 0, \text{ c'est-à-dire} \qquad x + 2 - 2(y-5) = 0, \text{ soit} \qquad x - 2\,y + 12 = 0$$

[14] a) $\mathscr{D} : 3\,x + 5\,y - 2 = 0$ et $\mathscr{D}' : 2\,x - y + 3 = 0$

On résout le système

$$\begin{cases} 3\,x & + & 5\,y & = & 2 \\ 2\,x & - & y & = & -3 \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -13 \neq 0$. Le système admet une solution unique donnée par les formules de Cramer :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}}{-13} = \frac{-2+15}{-13} = -1 \qquad \text{et} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}{-13} = \frac{-9-4}{-13} = 1$$

Les deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes au point de coordonnées $(-1, 1)$.

b) $\mathscr{D} : x - 2\,y + 4 = 0$ et $\mathscr{D}' : \begin{cases} x & = & 2 + t \\ y & = & 3 - 2\,t \end{cases}$

On substitue $(2 + t, 3 - 2\,t)$ à (x, y) dans l'équation de $\mathscr{D}$. On obtient l'équation

$$(2+t) - 2\,(3-2t) + 4 = 0, \text{ soit} \qquad t = 0$$

Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ se coupent en un point I dont le paramètre t est 0. Les coordonnées de I sont donc $I(2, 3)$.

[15] $\mathscr{D} : 2\,x + y - 1 = 0$ et $\mathscr{D}' : 3\,x - 2\,y + 4 = 0$.

Les droites admettent pour vecteurs normaux les vecteurs $\overrightarrow{N}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{N}'\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. On a alors (formule 39) :

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{N}'\right|}{\left\|\overrightarrow{N}\right\| \times \left\|\overrightarrow{N}'\right\|} = \frac{|2\times 3 + 1\times(-2)|}{\sqrt{2^2+1^2}\times\sqrt{3^2+(-2)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}}$$

On en déduit $\varphi \approx 60$.

[16] $A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathscr{D} : 2\,x - 5\,y - 1 = 0$
La distance du point A à la droite $\mathscr{D}$ est donnée par la formule (38) :

$$d(A, \mathscr{D}) = \frac{|2\,x_A - 5\,y_A - 1|}{\sqrt{2^2+(-5)^2}} = \frac{|2\times 2 - 5\times 1 - 1|}{\sqrt{29}} = \frac{2}{\sqrt{29}} \approx 0{,}37$$

VI Géométrie analytique dans l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

[17] $\mathscr{P} : x - y = 0$ et $\mathscr{P}' : y + 2\,z - 3 = 0$

a) Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ admettent pour vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{N}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{N}'\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{N}\wedge\overrightarrow{N}' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \overrightarrow{i} \\ -1 & 1 & \overrightarrow{j} \\ 0 & 2 & \overrightarrow{k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\overrightarrow{k} = -2\,\overrightarrow{i} - 2\,\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$$

$\overrightarrow{N}\wedge\overrightarrow{N}' \neq \overrightarrow{0}$ donc les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ne sont pas parallèles.

$$\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{N}' = 1\times 0 + (-1)\times 1 + 0\times 2 = -1$$

$\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{N}' \neq 0$ donc les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ne sont pas orthogonaux.

b) La droite d'intersection $\mathscr{D}$ est orthogonale aux deux vecteurs $\overrightarrow{N}$ et $\overrightarrow{N}'$. Elle est donc dirigée par $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{N}\wedge\overrightarrow{N}'$ soit $\overrightarrow{d}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Il reste à déterminer un point particulier de $\mathscr{D}$. Cette droite n'est pas parallèle au plan (xOy).
Les coordonnées de son point d'intersection I avec ce plan vérifient le système

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & -y & & = & 0 \\ & y & +2\,z & = & 3 \\ & & z & = & 0 \end{array}\right. \quad\text{soit}\quad \left\{\begin{array}{rrcl} x & -y & = & 0 \\ & y & = & 3 \\ & z & = & 0 \end{array}\right. \quad\text{d'où}\quad I\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Une représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ est

$$\mathscr{D} : \left\{\begin{array}{rclr} x & = & 3 & -2\,t \\ y & = & 3 & -2\,t \\ z & = & & t \end{array}\right. \; ; \quad t \in \mathbb{R}$$

.

[18] $\mathscr{P} : x + 2\,y + 3\,z - 2 = 0$ et $\mathscr{D} : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 + 2\,t \\ y & = & 2 - t \\ z & = & -3 - t \end{array}\right.$

a) $x_A + 2\,y_A + 3\,z_A - 2 = -3 \neq 0$: le point A n'appartient pas au plan $\mathscr{P}$.

$$\left\{\begin{array}{rcrr} -1 & = & 1 & +2\,t \\ 3 & = & 2 & -t \\ -2 & = & -3 & -t \end{array}\right. \quad \text{équivaut à} \quad \left\{\begin{array}{lcl} t & = & -1 \\ t & = & -1 \\ t & = & -1 \end{array}\right.$$

A est le point de $\mathscr{D}$ de paramètre $t = -1$.

b) La droite $\mathscr{D}$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{d}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et contient le point A. La distance du point B à la droite $\mathscr{D}$ est donnée par la formule (50) : $d(B, \mathscr{D}) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{d}\right\|}{\left\|\overrightarrow{d}\right\|}$. On calcule

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} -3 & 2 & \overrightarrow{i} \\ -1 & -1 & \overrightarrow{j} \\ -2 & -1 & \overrightarrow{k} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \overrightarrow{k} \\ &= -\overrightarrow{i} - 7\,\overrightarrow{j} + 5\,\overrightarrow{k} \end{aligned}$$

puis

$$d(B, \mathscr{D}) = \frac{\sqrt{(-1)^2 + (-7)^2 + 5^2}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{6}} = \sqrt{12{,}5} \approx 3{,}5$$

c) La distance du point A au plan $\mathscr{P}$ est donnée par la formule (51) :

$$d(A, \mathscr{P}) = \frac{|x_A + 2\,y_A + 3\,z_A - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

d) On substitue les expressions paramétriques $(1 + 2\,t, 2 - t, -3 - t)$ aux coordonnées (x, y, z) dans l'équation de $\mathscr{P}$:

$$(1 + 2\,t) + 2\,(2 - t) + 3\,(-3 - t) - 2 = 0, \text{ soit } \quad -3\,t - 6 = 0 \text{ qui a pour solution } \quad t = -2.$$

Le point d'intersection, que l'on note I, est le point de $\mathscr{D}$ de paramètre $t = -2$: $I\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

e) La droite $\mathscr{D}' : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & -2\,t + 1 \\ z & = & t \end{array}\right.$ est dirigée par $\overrightarrow{d}'\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ non colinéaire au vecteur $\overrightarrow{d}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ qui dirige $\mathscr{D}$. Les deux droites ne sont pas parallèles. Pour déterminer un éventuel point d'intersection, on résout le système :

$$\left\{\begin{array}{rrcrr} 1 & +2\,t & = & t' & \\ 2 & -t & = & -2\,t' & +1 \\ -3 & -t & = & t' & \end{array}\right. \quad \text{qui s'écrit} \quad \left\{\begin{array}{rrcr} 2\,t & -t' & = & -1 \\ -t & +2\,t' & = & -1 \\ -t & -t' & = & 3 \end{array}\right.$$

En ajoutant membre à membre les deux premières lignes, on obtient l'équation $t + t' = -2$ qui est incompatible avec la troisième ligne. Les deux droites n'ont pas de point commun. Elles sont donc non coplanaires.

[19] $\mathscr{P} : 2\,x + y - z + 3 = 0$ et $\mathscr{P}' : -x + z = 0$.

$\overrightarrow{N}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{N}'\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs normaux aux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$. Le cosinus de l'angle aigu entre les deux plans est donné par la formule (52) :

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{N}'\right|}{\left\|\overrightarrow{N}\right\| \times \left\|\overrightarrow{N}'\right\|} = \frac{|2\times(-1)+1\times 0+(-1)\times 1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}\times\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{12}} \quad \text{d'où} \quad \varphi \approx 30.$$

[20] $\mathscr{P} : x + y - z + 4 = 0$, $\mathscr{P}' : 2\,x - y - 2\,z + 2 = 0$ et $\mathscr{P}'' : 5\,x + 2\,y + z - 4 = 0$

On résout le système $\begin{cases} x + y - z = -4 \\ 2\,x - y - 2\,z = -2 \\ 5\,x + 2\,y + z = 4 \end{cases}$

Le déterminant de ce système est

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 - 6 + 15 = -18 \neq 0.$$

Le système admet une unique solution donnée par les formules de Cramer :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-18} = \frac{-18}{-18} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{-18} = \frac{36}{-18} = -2, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{-18} = \frac{-54}{-18} = 3$$

[21] $\mathscr{P} : x + y - 2\,z - 1 = 0$, $\mathscr{P}' : x - y - 4\,z - 3 = 0$ et $\mathscr{P}'' : 2\,x + 3\,y - 3\,z - 1 = 0$

On résout le système $\begin{cases} x + y - 2\,z = 1 \\ x - y - 4\,z = 3 \\ 2\,x + 3\,y - 3\,z = 1 \end{cases}$

Le déterminant de ce système est

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 15 - 3 - 12 = 0$$

Le système admet une infinité de solutions ou n'admet aucune solution.

On détermine l'intersection des deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$. Ils admettent pour vecteurs normaux $\overrightarrow{N}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{N}'\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$. Ces vecteurs n'étant pas colinéaires, les deux plans se coupent suivant une droite $\mathscr{D}$ dirigée par le vecteur

$$\overrightarrow{N}\wedge\overrightarrow{N}' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \overrightarrow{i} \\ 1 & -1 & \overrightarrow{j} \\ -2 & -4 & \overrightarrow{k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}\overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}\overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\overrightarrow{k} = -6\,\overrightarrow{i} - 2\,\overrightarrow{j} + 2\,\overrightarrow{k}$$

Le vecteur $\overrightarrow{d}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est aussi un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

Le point de $\mathscr{D}$ situé dans le plan (xOy) a des coordonnées qui vérifient :

$$\begin{cases} x + y - 2\,z = 1 \\ x - y - 4\,z = 3 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$$

En ajoutant les deux premières lignes, on obtient $x = 2$, ce qui donne ensuite $y = -1$. Un point particulier de $\mathscr{D}$ est $A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Elle est représentée paramétriquement par le système

$$\left\{\begin{array}{rcrr} x & = & 2 & +3\,t \\ y & = & -1 & -t \\ z & = & & t \end{array}\right. \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

Cette droite $\mathscr{D}$ est incluse dans le plan $\mathscr{P}''$, ou est disjointe du plan $\mathscr{P}''$ (sinon, le système admettrait une solution unique).
Le point A appartient au plan $\mathscr{P}''$ car $2\,x_A + 3\,y_A - 3\,z_A - 1 = 4 - 3 - 1 = 0$, donc $\mathscr{D}$ est incluse dans $\mathscr{P}''$. Les trois plans se coupent selon la droite $\mathscr{D}$.