| | |
|---|---|
| | **Licence EG** **2021-2022**<br>**TECHNIQUES QUANTITATIVES** **CC1** **durée : 1h30** |
| **Nom-Prénom :** | |

$DL_n$ : développement limité d'ordre n.

**EX1 :** Soit la fonction définie pour $x \in$ par $f(x) = 4 + \ln(2 - e^{\frac{5}{2}x})$.

1) Vérifier, en utilisant la formule de Taylor, que le $DL_2$ en 0 de f est : $f(x) = 4 - \frac{5}{2}x - \frac{25}{4}x^2 + o(x^2)$ (reste)

$f(0) = 4 + \ln(2 - e^0) = 4 + \ln(2 - 1) = 4 + \ln(1) = 4 + 0 = 4$.

$$f'(x) = 0 + \frac{u'}{u} = \frac{0 - \frac{5}{2}e^{\frac{5}{2}x}}{2 - e^{\frac{5}{2}x}} = -\frac{5}{2}\, e^{\frac{5}{2}x}\,(2 - e^{\frac{5}{2}x})^{-1} \;;\; f'(0) = -\frac{5}{2} \,.\, e^0\,(1)^{-1} = -\frac{5}{2}(1)(1) = -\frac{5}{2}.$$

$$f''(x) = u'v + uv' = -\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}\right)e^{\frac{5}{2}x}\,(2 - e^{\frac{5}{2}x})^{-1} + \left(-\frac{5}{2}\, e^{\frac{5}{2}x}\right)(-1)\left(-\frac{5}{2}\, e^{\frac{5}{2}x}\right)(2 - e^{\frac{5}{2}x})^{-1-1}$$

$$= -\frac{25}{4}\, e^{\frac{5}{2}x}\,(2 - e^{\frac{5}{2}x})^{-1} - \frac{25}{4}\,(e^{\frac{5}{2}x})^2\,(2 - e^{\frac{5}{2}x})^{-2}$$

$$= -\frac{25}{4}\, e^{\frac{5}{2}x}\,(2 - e^{\frac{5}{2}x})^{-2}\left[\,(2 - e^{\frac{5}{2}x})^1 + e^{\frac{5}{2}x}\right] = -\frac{25}{4}\, e^{\frac{5}{2}x}\, \frac{2}{(2 - e^{\frac{5}{2}x})^2} = -\frac{25}{2}\, \frac{e^{\frac{5}{2}x}}{(2 - e^{\frac{5}{2}x})^2}.$$

$$f''(0) = -\frac{25}{2}\, \frac{e^0}{(2 - e^0)^2} = -\frac{25}{2}\, \frac{1}{(1)^2} = -\frac{25}{2}.$$

On obtient donc (formule de Taylor) : $f(x) = 4 + \left(-\frac{5}{2}\right)x - \frac{-25/2}{2}x^2 + o(x^2) = 4 - \frac{5}{2}x - \frac{25}{4}x^2 + o(x^2)$

2) En déduire une valeur approchée de $d = 4 + \ln(2 - e^{0,05})$. $(d = f(\ldots))$

$d = f(0,02)$ $\left(0,05 = \frac{5}{2}(0,02)\right)$ et 0,02 est proche de 0 .

Donc $f(0,02) \approx 4 - \frac{5}{2}(0,02) - \frac{25}{4}(0,02)^2 \approx 4 - 5(0,01) - \frac{25}{4}(0,0004)$

$\approx 4 - 0,05 - 25(0,0001) \approx 4 - 0,05 - 0,0025 \approx 3,9475$

3) Déterminer le $DL_2$ en 0 de la fonction g définie pour $x \neq -\frac{2}{5}$ par $g(x) = \frac{1}{2+5x}$.

$$g(x) = \frac{1}{2+5x} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+((5/2)x)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-((-5/2)x)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-u} \text{ avec } u = -\frac{5}{2}x.$$

Or on sait que le $DL_2$ en 0 de $\frac{1}{1-x}$ est $1 + x + x^2 + o(x^2)$ .

u tend vers 0 lorsque x tend vers 0 et est de la forme $kx^\alpha$ avec $k = -\frac{5}{2}$ et $\alpha = 1 \in IN^*$.

Le $DL_2$ en 0 de g est donc : $\frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{5}{2}x\right) + \left(-\frac{5}{2}x\right)^2 + o(x^2)\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{4}x^2 + o(x^2)\right) = \frac{1}{2} - \frac{5}{4}x + \frac{25}{8}x^2 + o(x^2)$

4) Déduire de la question 1) le $DL_2$ en 0 de $h(x) = 4 + \ln(2 - e^{-5x^2})$.

On remarque que $h(x) = f(-2x^2) = f(u) =$ avec $u = -2x^2 = kx^\alpha$ avec $k = -2$ et $\alpha = 2 \in IN^*$.

Donc $h(x) = = 4 - \frac{5}{2}(-2x^2) - \frac{25}{4}(-2x^2)^2 + o(x^2) = 4 + 5x^2 - 25x^4 + o(x^2) = 4 + 5x^2 + o(x^2)$

b) Déduire des questions précédentes le DL$_2$ en 0 de $t(x) = \dfrac{4+\ln(2+e^{-\frac{5}{2}x})}{2+5x}$.

$$t(x) = f(x)\,g(x) = \left(4 - \frac{5}{2}x - \frac{25}{4}x^2 + o(x^2)\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{5}{4}x + \frac{25}{8}x^2 + o(x^2)\right)$$

$$= 2 - 5x + \frac{25}{2}x^2$$

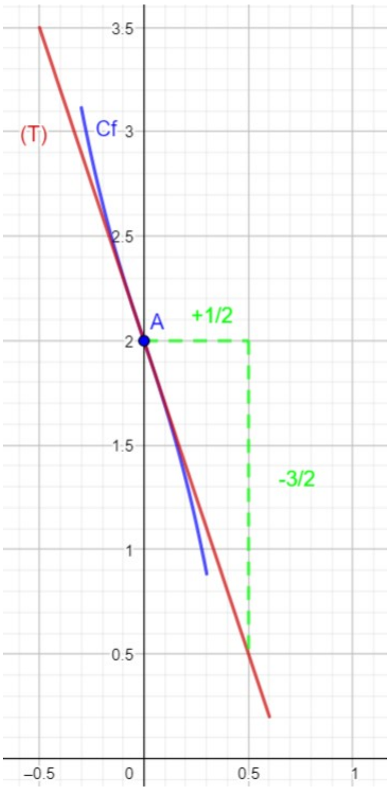
$$-\frac{5}{4}x + \frac{25}{8}x^2$$

$$-\frac{25}{8}x^2 + o(x^2)$$

$$= 2 - \frac{25}{4}x + \frac{25}{2}x^2 + o(x^2)$$

On développe en ne conservant que les termes de degré inférieurs ou égaux à 2.

**EX2 :** Soit f une fonction 3 fois dérivable en 0 dont le DL$_3$ en 0 est : $f(x) = 2 - 3x - 8x^3 + o(x^3)$ (reste) .
Proposer un tracé local de $C_f$, courbe représentative de f, pour x voisin de 0.




→ $f(0) = 2$ ; $A(0\,;2) \in C_f$

→ $f'(0) = -3$ ;
Une équation de la tangente à Cf en A est $y = 2 - 3x$.
$A \in (T)$
Pour obtenir un second point, soit on utilise A et la pente $-3$,
Soit on remarque par exemple que si $x = 1/2$, $y = 2 - 3/2 = 1/2$.

→ $f(x) - (2 - 3x) = -8x^3 + o(x^3)$.
Si x est proche de 0, $f(x) - (2 - 3x) \approx -8x^3$.
Or $x^3 < 0$ si $x < 0$ , $x^3 > 0$ si $x > 0$ et $-8 < 0$.
Donc : $f(x) - (2 - 3x) > 0$ si $x < 0$ : Cf est au dessus de (T)
$f(x) - (2 - 3x) < 0$ si $x > 0$ : Cf est en dessus de (T)

**EX3 :** Soit la fonction f définie sur $I = ]-3\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x + 3)$.
Pour quelle valeur du réel a la fonction F définie par $F(x) = (x + a)\ln(x + a) - x$ est–elle une primitive de f sur I ?
Déterminer alors la primitive de f sur I qui s'annule en $-2$.

$F'(x) =$ « u'v + uv' » $- 1 = 1 \ln(x + a) + (x + a) \cdot \dfrac{1}{x+a} - 1 = \ln(x + a) + 1 - 1 = \ln(x + a)$.

$F'(x) = f'(x) = \ln(x+ 3)$ ssi $a = 3$ : F est alors une primitive de f sur I.

Les primitives de f sur I sont donc de la forme $(x + 3)\ln(x + 3) - x + c$ où c est une constante réelle.

$(-2 + 3)\ln(-2 + 3) - (-2) + c = 0$ ssi $1.\ln(1) + 2 + c = 0$ ss $0 + c = -2$ ssi $c = -2$.

CCl : la primitive de f sur I qui s'annule en 2 est $(x + 3)\ln(x + 3) - x - 2$.

**EX4 :** Pour chacune des fonctions suivantes : déterminer une primitive de f sur I.

1) $f(x) = 3 - 12x^8 + \dfrac{10}{x^3\sqrt{x}} - \dfrac{1}{5x}$ $\quad I = ]0;+\infty[$

$f(x) = 3 - 12x^8 + \dfrac{10}{x^3\,x^{1/2}} - \dfrac{1}{5}.\dfrac{1}{x} = 3 - 12x^8 + \dfrac{10}{x^{3+1/2}} - \dfrac{1}{5}.\dfrac{1}{x} = 3 - 12x^8 + \dfrac{10}{x^{7/2}} - \dfrac{1}{5}.\dfrac{1}{x} = 3 - 12x^8 + 10x^{-7/2} - \dfrac{1}{5}.\dfrac{1}{x}.$

Une primitive de f sur I est $F(x) = 3x - 12\,.\,\dfrac{x^{8+1}}{8+1} + 10\,.\,\dfrac{x^{-7/2+1}}{-7/2+1} - \dfrac{1}{5}\ln(x)$ car $x > 0$ sur I

$= 3x - 12\,.\,\dfrac{x^9}{9} + 10\,.\,(-\dfrac{2}{5})\,x^{-5/2} - \dfrac{1}{5}\ln(x)$

$= 3x - \dfrac{4}{3}x^9 - 4\,x^{-5/2} - \dfrac{1}{5}\ln(x)$ $\qquad ( = 3x - \dfrac{4}{3}x^9 - \dfrac{4}{x^2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{5}\ln(x)\ )$

2) $f(x) = \dfrac{2}{9(5-x)^4}$ $\quad I = ]5;+\infty[$

$f(x) = \dfrac{2}{9}(5-x)^{-4} = k\,n\,u'\,u^{n-1}$ ?

$n - 1 = -4$ $\qquad n = -4 + 1 = -3$

$u = 5 - x$ $\qquad u' = -1$

$f(x) = \dfrac{2}{9}\,(-1)\,(\dfrac{1}{-3})\,(-3)\,(-1)(5-x)^{-4} = \dfrac{2}{27}\,(-3)\,(-1)(5-x)^{-4} = k\,n\,u'\,u^{n-1}$ avec $k = \dfrac{2}{27}$.

Une primitive de f sur I est $F(x) = \dfrac{2}{27}\,(5-x)^{-4+1} = \dfrac{2}{27}\,(5-x)^{-3} = \dfrac{2}{27(5-x)^3}$.

3) $f(x) = \dfrac{4}{9+x^2}$ $\quad I = \mathbb{R}$

$f(x) = k\dfrac{u'}{1+u^2}$ ?

$f(x) = \dfrac{4}{9(1+x^2/9)} = \dfrac{4}{9(1+(x/3)^2)} = \dfrac{4}{9}\,3.\dfrac{1/3}{1+(x/3)^2} = \dfrac{4}{3}\,\dfrac{1/3}{1+(x/3)^2} = k\dfrac{u'}{1+u^2}$ avec $k = \dfrac{4}{3}$, $u = \dfrac{1}{3}x$ et $u' = \dfrac{1}{3}$.

Une primitive de f sur I est $F(x) = \dfrac{4}{3}\arctan(\dfrac{1}{3}x)$.

4) $f(x) = 4x^3 e^{3x^4-2}$ $\quad I = \mathbb{R}$

$f(x) = 4\,\dfrac{1}{12}\,12\,x^3 e^{3x^4-2} = \dfrac{1}{3}\,12\,x^3 e^{3x^4-2} = k\,u'\,e^u$ avec $k = \dfrac{1}{3}$, $u = 3x^4 - 2$ et $u' = 12x^2$.

Une primitive de f sur I est $F(x) = \dfrac{1}{3}\,e^{3x^4-2}$.

**EX5 :** Soit la fonction f définie pour x appartenant à I = $\left]-8;-\frac{4}{3}\right[$ par f(x) = $\frac{-x+32}{3x^2+28x+32}$.

1) Déterminer les réels A et B tels que f(x) = $\frac{A}{3x+4}+\frac{B}{x+8}$.

$$\frac{A}{3x+4}+\frac{B}{x+8} = \frac{A(x+8)+B(3x+4)}{(3x+4)(x+8)} = \frac{Ax+8A+3Bx+4B}{3x^2+24x+4x+32} = \frac{(A+3B)x+8A+4B}{3x^2+28x+32}$$

Il y a égalité avec f(x) ssi $\begin{cases} A+3B=-1 \\ 8A+4B=32 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} A+3B=-1 \\ 2A+B=8 \end{cases}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ ssi } \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1$$

$$\text{ssi } \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow (-1/5)L_2$$

$$\text{ssi } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$$

Ce qui correspond au système $\begin{cases} A=5 \\ B=-2 \end{cases}$.

2) En déduire une primitive de f sur I.

f(x) = $5\,\frac{1}{3}\,\frac{3}{3x+4} - 2\,\frac{1}{x+8} = \frac{5}{3}\,\frac{u'}{u} - 2\,\frac{u'}{u}$ avec u = 3x + 4 , u' = 3, et u = x + 8, u' = 1

Une primitive de f sur I est F(x) = $\frac{5}{3}$ ln(|3x + 4|) – 2 ln(|x + 8|)

= $\frac{5}{3}$ ln(–3x – 4) – 2 ln(x + 8) car 3x + 4 < 0 sur I et x + 8 > 0 sur I

**EX6 :** Déterminer les limites suivantes à l'aide de développements limités :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(3+5x)-\ln(3)}{x}$ ; Cherchons le $DL_1$ en 0 de ln(3 + 5x).

f(x) = ln(3 + 5x) = f(0) + f '(0) x + o(x) ; f(0) = ln(3), f '(x) = $\frac{5}{3+5x}$ donc f '(0) = $\frac{5}{3}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(3+5x)-\ln(3)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(3)+(5/3)x+o(x)-\ln(3)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(5/3)x+o(x)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{(5/3)x}{x}+\frac{o(x)}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{5}{3}+o(1)\right) = \frac{5}{3}+0 = \frac{5}{3}.$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{sh(x)-x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x+(1/6)x^3+o(x^3)-x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{(1/6)x^3+o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{(1/6)x^3}{x^3}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{6}+o(1)\right) = \frac{1}{6}+0 = \frac{1}{6}$$

(on utilise de $DL_3$ en 0 de sh(x) ).