FDEG — FACULTÉ DE DROIT ÉCONOMIE & GESTION UNIVERSITÉ D'ORLÉANS	**Licence EG** **2021-2022** **TECHNIQUES QUANTITATIVES CC2 durée : 1h30** **Documents et calculatrices interdits**
Nom-Prénom :	

Toutes les réponses doivent être justifiées

EXERCICE 1: Calculer les intégrales suivantes en déterminant une primitive des fonctions considérées

1) $A = \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{2}{4x^2+3} dx$

$$f(x) = \frac{2}{4x^2+3} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{1+\frac{4}{3}x^2} = \underbrace{\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}_{k=\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{\overbrace{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{u'}}{\underbrace{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x\right)^2}_{1+u^2}}$$

$$\text{Donc } A = \left[\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x\right)\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan(1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan(0)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{3} \times 0 = \frac{\sqrt{3}\pi}{12}$$

2) $B = -2\int_1^5 \frac{1}{(1+2x)^2} e^{\frac{1}{2x+1}} dx$

$$\frac{1}{2x+1} = (2x+1)^{-1} ; \left((2x+1)^{-1}\right)' = -1(2)(2x+1)^{-2} = -\frac{2}{(2x+1)^2}$$

$$B = \int_1^5 \underbrace{-\frac{2}{(2x+1)^2}}_{u'} \underbrace{e^{\frac{1}{2x+1}}}_{e^u} dx = \left[e^{\frac{1}{2x+1}}\right]_1^5 = e^{\frac{1}{11}} - e^{\frac{1}{3}}$$

EXERCICE 2: Pour quelle(s) valeur(s) du réel b l'intégrale $\overbrace{\int_2^b \frac{x}{\sqrt{3x^2+4}} dx}^{A(b)}$ est–elle égale à $\frac{10}{3}$?

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{3x^2+4}} = x(3x^2+4)^{-\frac{1}{2}} \overset{?}{=} k\,m\,u'u^{m-1}$$

$m-1 = -\frac{1}{2}$ $\quad m = \frac{1}{2}$

$u = 3x^2+4$ $\quad u' = 6x$

$$\left\{ f(x) = \underbrace{2 \times \frac{1}{6}}_{\frac{1}{3}=k} \underbrace{\frac{1}{2}}_{m} \times \underbrace{6x}_{u'} \underbrace{(3x^2+4)^{-\frac{1}{2}}}_{u^{m-1}} \right.$$

$$\text{Donc } A(b) = \left[\frac{1}{3}(3x^2+4)^{\frac{1}{2}}\right]_2^b = \frac{1}{3}\sqrt{3b^2+4} - \frac{1}{3}\sqrt{16} = \frac{1}{3}\sqrt{3b^2+4} - \frac{4}{3}$$

$\frac{1}{3}\sqrt{3b^2+4} - \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$ ssi $\sqrt{3b^2+4} - 4 = 10$

ssi $\sqrt{3b^2+4} = 14$

ssi $3b^2+4 = 14^2 = 196$

ssi $3b^2 = 196 - 4 = 192$

ssi $b^2 = \frac{192}{3} = 64$ ssi $b = 8$ ou $b = -8$

EXERCICE 3: 1) Déterminer trois réels A, B et C tels que : $3x^2 - 3x + \frac{3}{2} = A\left[(Bx+C)^2+1\right]$ pour x ∈ IR .

$$3x^2-3x+\frac32 = 3(x^2-3x)+\frac32$$
$$= 3\left[\left(x-\frac12\right)^2-\left(\frac12\right)^2\right]+\frac32$$
$$= 3\left(x-\frac12\right)^2-3\times\frac14+\frac32$$
$$= 3\left(x-\frac12\right)^2+\frac34$$
$$= \frac34\left[4\left(x-\frac12\right)^2+1\right] = \frac34\left[2^2\left(x-\frac12\right)^2+1\right] = \frac34\left[(2x-1)^2+1\right]$$

$$\boxed{A=\frac34 \quad B=2 \quad C=-1}$$

2) En déduire la valeur de l'intégrale $A = \int_0^{1/2} \frac{1}{3x^2-3x+\frac32}dx$

$$A = \int_0^{\frac12} \frac{1}{\frac34\left(1+(2x-1)^2\right)}dx = \int_0^{1/2} \underbrace{\frac43\times\frac12}_{k=\frac23} \frac{\overset{u'}{2}}{\underbrace{1+(2x-1)^2}_{1+u^2}}dx$$

$$A = \left[\frac23\arctan(2x-1)\right]_0^{\frac12} = \frac23\underbrace{\arctan(0)}_{=0} - \frac23\underbrace{\arctan(-1)}_{=-\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{6}$$

3) Calculer l'intégrale $B = \int_0^{1/2}\frac{\overset{u'}{6x-3}}{\underbrace{3x^2-3x+\frac32}_{u}}dx$. En déduire que $C = \int_0^{1/2}\frac{x}{3x^2-3x+\frac32}dx$ est égale à $-\frac16\ln(2)+\frac{\pi}{12}$.

$$B = \left[\ln\left(\left|\underbrace{3x^2-3x+\frac32}_{>0}\right|\right)\right]_0^{1/2} = \ln\left(\frac34-\cancel{\frac32}+\cancel{\frac32}\right)-\ln\left(\frac32\right) = \ln\left(\frac{\frac34}{\frac32}\right) = \ln\left(\frac{\cancel{3}}{4}\times\frac{2}{\cancel{3}}\right)$$

car Δ<0 et a=3>0

$$\boxed{=\ln\left(\frac12\right) = -\ln 2 = B}$$

$$x = \frac16(6x-3)-\frac36 = \frac16(6x-3)+\frac12 .$$

$$\text{Donc } C = \int_0^{1/2}\frac{\frac16(6x-3)+\frac12}{3x^2-3x+\frac32}dx = \int_0^{1/2}\frac16\,\frac{6x-3}{3x^2-3x+\frac32}dx + \int_0^{1/2}\frac{\frac12}{3x^2-3x+\frac32}dx$$

$$C = \frac16\times B+\frac12\times A = \frac16(-\ln 2)+\frac12\times\frac{\pi}{6} = \boxed{-\frac16\ln2+\frac{\pi}{12} = C}$$

4) Déterminer les réels a et b tels que $h(x) = \frac{1}{3x^3-6x^2+\frac{9x}{2}-\frac32} = \frac{a}{x-1}+\frac{bx}{3x^2-3x+\frac32}$. En déduire $\int_0^{1/2}h(x)dx = D$.

$$\frac{a}{x-1}+\frac{bx}{3x^2-3x+\frac32} = \frac{a\left(3x^2-3x+\frac32\right)+bx(x-1)}{(x-1)\left(3x^2-3x+\frac32\right)}$$
$$= \frac{3ax^2-3ax+\frac32 a+bx^2-bx}{3x^3-6x^2+\frac92 x-\frac32} = \frac{(3a+b)x^2+(-3a-b)x+\frac32 a}{3x^3-3x^2+\frac92 x-\frac32}$$

Il y a égalité avec h(x) ssi $\begin{cases}3a+b=0\\-3a-b=0\\\frac32 a=1\end{cases}$ ssi $\begin{cases}a=\frac23\\b=-3a\end{cases}$ ssi $\begin{cases}a=\frac23\\b=-3\times\frac23=-2\end{cases}$

$$D = \int_0^{1/2}\frac23\times\frac{\overset{u'}{1}}{\underbrace{x-1}_{u}}dx - 2\int_0^{1/2}\frac{x}{3x^2-3x+\frac32}dx = \left[\frac23\ln\left(\overset{1-x}{\underbrace{|x-1|}_{<0 \text{ sur } I}}\right)\right]_0^{1/2}-2C$$

$D=\frac{2}{3}\ln\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{2}{3}\underbrace{\ln(1)}_{=0}-2\left(-\frac{1}{6}\ln 2+\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{2}{3}\ln 2+\frac{1}{3}\ln 2-\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{3}\ln 2-\frac{\pi}{6}$

EXERCICE 4: Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, les intégrales suivantes

1) $A=\int_{-1}^{3}\ln(2+t)dt = \int_{-1}^{3} 1\times\ln(t+2)\,dt$

$\boxed{\text{donc } A = 3\ln 5 - (4-2\ln 5) = 5\ln 5 - 4}$

$u'=1 \quad v=\ln(t+2) \;\Big|\; u=t \quad v'=\frac{1}{t+2}$

IPP : $A=\left[t\ln(t+2)\right]_{-1}^{3}-\int_{-1}^{3}\frac{t}{t+2}dt = 3\ln 5-\underbrace{3\ln 1}_{=0}+A_1=3\ln 5+A_1$

$A_1=\int_{-1}^{3}\frac{t+2-2}{t+2}dt=\int_{-1}^{3}\cancel{\frac{t+2}{t+2}}\,1\,dt+\int_{-1}^{3}-2\times\frac{1}{t+2}dt=\left[t\right]_{-1}^{3}+\left[-2\ln(\underbrace{t+2}_{>0 \text{ sur } I})\right]_{-1}^{3}$

$=3-(-1)+(-2\ln 5-(-2\ln(1)))$

$=4-2\ln 5$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{ou : } A_1 : \quad t \;\Big|\; t+2 \\ \quad -(t+2) \;\Big|\; 1 \\ \quad\quad -2 \\ \frac{t}{t+2}=1-\frac{2}{t+2}\ldots \end{array}}$

2) $B=\int_{0}^{1}6x^3e^{3x^2}dx \qquad 6x^3e^{3x^2}=x^2\times 6xe^{3x^2}$

$u'=\underbrace{6x}_{u'}\underbrace{e^{3x^2}}_{e^u} \quad v=x^2 \;\Big|\; u=e^{3x^2} \quad v'=2x$

$B=\left[e^{3x^2}\times x^2\right]_0^1-\int_0^1 \underbrace{\frac{1}{3}}_{k}\underbrace{e^{3x^2}}_{e^u}\times \underbrace{3x\,2x}_{u'}\,dx$

$=e^3\times 1-0-\left[\frac{1}{3}e^{3x^2}\right]_0^1$

$=e^3-\left(\frac{1}{3}e^3-\frac{1}{3}\underbrace{e^0}_{=1}\right)=e^3-\frac{1}{3}e^3+\frac{1}{3}=\boxed{\frac{2}{3}e^3+\frac{1}{3}=B}$

EXERCICE 5: Soit la fonction définie sur I =]10 ;+∞ [par $f(x) = 5x\left(\frac{1}{2}x-5\right)^{1/3}$.

1) Soit $x \geq 12$.

Calculer l'intégrale $\int_{12}^{x} f(t)dt = A(x)$ (faire au choix, une intégration par parties ou un changement de variables)

IPP : $u'=\left(\frac{1}{2}t-5\right)^{\frac{1}{3}}=\underbrace{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}}_{k=\frac{3}{2}}\cdot\underbrace{\frac{4}{3}}_{m}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}}_{u'}\underbrace{\left(\frac{1}{2}t-5\right)^{\frac{4}{3}-1}}_{u^{m-1}} \quad v=5t \;\Big|\; u=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}t-5\right)^{\frac{4}{3}} \quad v'=5$

$A(x)=\left[5t\times\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}t-5\right)^{\frac{4}{3}}\right]_{12}^{x}-\underbrace{\int_{12}^{x}5\times\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}t-5\right)^{\frac{4}{3}}dt}_{A_1(x)}=\frac{15}{2}x\left(\frac{1}{2}x-5\right)^{\frac{4}{3}}-90\times 1-A_1(x)$

$A_1(x)=\int_{12}^{x}\underbrace{\frac{15}{2}\times 2\cdot\frac{3}{7}}_{k=\frac{45}{7}}\cdot\underbrace{\frac{7}{3}}_{m}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}}_{u'}\underbrace{\left(\frac{1}{2}t-5\right)^{\frac{7}{3}-1}}_{u^{m-1}}dt=\left[\frac{45}{7}\left(\frac{1}{2}t-5\right)^{\frac{7}{3}}\right]_{12}^{x}=\frac{45}{7}\left(\frac{1}{2}x-5\right)^{\frac{7}{3}}-\frac{45}{7}\times 1$

Donc $A(x)=\frac{15}{2}x\left(\frac{1}{2}x-5\right)^{\frac{4}{3}}-90-\left(\frac{45}{7}\left(\frac{1}{2}x-5\right)^{\frac{7}{3}}-\frac{45}{7}\right)=\frac{15}{2}x\left(\frac{1}{2}x-5\right)^{\frac{4}{3}}-\frac{45}{7}\left(\frac{1}{2}x-5\right)^{\frac{7}{3}}\underbrace{-90+\frac{45}{7}}_{=-\frac{585}{7}}$

2) En déduire la primitive de f sur I qui s'annule en 12.

Cette primitive est égale à $\int_{12}^{x}f(t)dt=A(x)$

ou on cherche c tel que

$A(12)+c=0$; $c=-A(12)$; or $A(12)=0\ldots$ on obtient $A(x)$

EXERCICE 6: Calculer, à l'aide d'un changement de variable, les intégrales suivantes:

1) $A = \int_{e^{-5}}^{e} \frac{\ln(t)+3}{t\sqrt{4-\ln(t)}}\,dt$ (indice : poser x = 4 – ln(t))

$x = 4-\ln(t) \iff \ln t = 4-x \iff t = e^{4-x}$

* bornes : si $t = e^{-5}$, $x = 4-\ln(e^{-5}) = 4-(-5) = 9$

si $t = e$, $x = 4-\ln e = 4-1 = 3$

* fonction $\frac{\ln t+3}{t\sqrt{4-\ln t}} = \frac{4-x+3}{e^{4-x}\sqrt{x}} = \frac{7-x}{e^{4-x}\sqrt{x}}$

* $t = e^{4-x}$; on dérive : $\frac{dt}{dx} = \left(e^{4-x}\right)' = -e^{4-x}$

donc $dt = -e^{4-x}dx$

$A = \int_9^3 \frac{7-x}{\cancel{e^{4-x}}\sqrt{x}} \times \left(-\cancel{e^{4-x}}\right) dx$

$= -\int_9^3 \frac{7-x}{x^{1/2}}\,dx = \int_3^9 \left(\frac{7}{x^{1/2}} - \frac{x}{x^{1/2}}\right) dx$

$\frac{7}{x^{1/2}} - \frac{x}{x^{1/2}} = 7 \times x^{-\frac{1}{2}} - x^{1/2}$

Une primitive est : $7 \times \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$

$= 14\, x^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = 14\sqrt{x} - \frac{2}{3} x\sqrt{x}$

$A = 14\underbrace{\sqrt{9}}_{=3} - \frac{2}{\cancel{3}} \times \cancel{9}\sqrt{9} - \left(14\sqrt{3} - \frac{2}{\cancel{3}} \times \cancel{3}\sqrt{3}\right)$

$= 42 - 18 - 12\sqrt{3} = 24 - 12\sqrt{3}$

2) $B = \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-3)}\,dx$

nouvelle variable : $t = \sqrt{x}$

$t = \sqrt{x} \iff x = t^2 \quad (t > 0)$

* bornes : si $x = 4$, $t = \sqrt{4} = 2$

si $x = 9$, $t = \sqrt{9} = 3$

* fonction : $\frac{1}{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-3)} = \frac{1}{t \times (2t-3)}$

* dx : on dérive $x = t^2$; $\frac{dx}{dt} = (t^2)' = 2t$

donc $dx = 2t\,dt$

$B = \int_2^3 \frac{1}{\cancel{t}(2t-3)} \cdot 2\cancel{t}\,dt$

$= \int_2^3 \frac{\overset{u'}{2}}{\underset{u}{2t-3}}\,dt$

$= \left[\ln(\underbrace{2t-3}_{>0 \text{ sur } I})\right]_2^3$

$= \ln 3 - \ln 1 = \ln 3 - 0 = \ln 3 = B$

3) $C = \int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x - 1}\,dx$ (*Bonus*)

$t = \sqrt{e^x - 1} \iff e^x - 1 = t^2 \iff e^x = t^2 + 1 \iff x = \ln(t^2+1)$

* bornes : si $x = 0$, $t = \sqrt{e^0 - 1} = \sqrt{1-1} = 0$

si $x = \ln 2$, $t = \sqrt{e^{\ln 2} - 1} = \sqrt{2-1} = 1$

* fonction : $\sqrt{e^x - 1} = t$

* $x = \ln(t^2+1)$. $\frac{dx}{dt} = \left(\ln(t^2+1)\right)' = \frac{2t}{t^2+1}$

donc $dx = \frac{2t}{t^2+1}\,dt$

$C = \int_0^1 t \cdot \frac{2t}{t^2+1}\,dt = \int_0^1 \frac{2t^2}{t^2+1}\,dt$

$$\begin{array}{r|l} 2t^2 & t^2+1 \\ \hline -(2t^2+2) & 2 \\ -2 & \end{array} \qquad \frac{2t^2}{t^2+1} = 2 - \frac{2}{t^2+1}$$

Donc $C = \left[2t - 2\arctan(t)\right]_0^1$

$= 2 - 2\arctan(1) - (0 - \underbrace{\arctan(0)}_{=0})$

$= 2 - 2 \times \frac{\pi}{4} = 2 - \frac{\pi}{2} = C$

EXERCICE 4: Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, les intégrales suivantes

1) $A = \int_{-1}^{3} \ln(2+t)\,dt$

2) $B = \int_{0}^{1/2} 6x^3 e^{3x^2}\,dx$

EXERCICE 5: Soit la fonction définie sur I =]10 ;+∞ [par $f(x) = 5x\,(\frac{1}{2}x - 5)^{1/3}$.

1) Soit $x \geq 12$.

Calculer l'intégrale $\int_{12}^{x} f(t)\,dt = A(x)$ (faire au choix, une intégration par parties ou un changement de variables)

OU :

nouvelle variable : $y = \frac{1}{2}t - 5 \iff y+5 = \frac{1}{2}t \iff t = 2(y+5)$

* bornes : si $t = 12$, $y = \frac{1}{2}(12) - 5 = 6 - 5 = 1$
  si $t = x$, $y = \frac{1}{2}x - 5$

* fonction : $5t\,(\frac{1}{2}t - 5)^{1/3} = 5\,(2(y+5))\,y^{1/3} = 10\,(y+5)\,y^{\frac{1}{3}} = 10\,(y^{1+\frac{1}{3}} + 5y^{\frac{1}{3}})$
  $= 10\,y^{4/3} + 50\,y^{1/3}$

* dt : $\frac{dt}{dy} = (2(y+5))' = 2$ donc $dt = 2dy$

$A(x) = \int_{1}^{\frac{1}{2}x-5} (10y^{4/3} + 50y^{1/3}) \times 2dy = \left[2\left(10\,\frac{y^{4/3+1}}{4/3+1} + 50\,\frac{y^{1/3+1}}{1/3+1}\right)\right]_1^{\frac{1}{2}x-5} = \left[\underbrace{2\times10\times\frac{3}{7}}_{\frac{60}{7}}\,y^{\frac{7}{3}} + \underbrace{2\times50\times\frac{3}{4}}_{75}\,y^{4/3}\right]_1^{\frac{1}{2}x-5}$

$A(x) = \frac{60}{7}\left(\frac{1}{2}x-5\right)^{\frac{7}{3}} + 75\left(\frac{1}{2}x-5\right)^{\frac{4}{3}} - \left(\underbrace{\frac{60}{7}\times1^{7/3} + 75\times1^{4/3}}\right)$

$= \frac{60}{7}\times1 + 75\times1 = \frac{585}{7}$

2) En déduire la primitive de f sur I qui s'annule en 12.