FACULTÉ DE DROIT ÉCONOMIE & GESTION UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

1ère SESSION DU SEMESTRE 3 2021-2022

Mention / Parcours / Spécialité : **Licence Economie et Gestion-Majeure Economie**

Année : 2

Intitulé de l'épreuve : **Techniques quantitatives**

Durée de l'épreuve : 2 h 30 Documents autorisés : aucun Matériel autorisé : aucun

⚠ ce sujet comporte **deux pages – il y a 7 exercices**

EX1 : Soit la fonction f définie pour x appartenant à I =]0 ;+∞ [par $f(x)=\dfrac{1}{x(x^2+1)}$.

1) Déterminer les réels a ,b et c tels que $f(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{bx+c}{x^2+1}$. En déduire une primitive de f sur I.

2) Calculer l'intégrale $A=\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(1+x^2)}dx$.

3) Calculer l'intégrale $A=\displaystyle\int_1^2 \frac{\arctan(x)}{x^2}dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

4) Calculer l'intégrale $A(a)=\displaystyle\int_1^a \frac{\arctan(x)}{x^2}dx$ pour réel tout $a\geq 1$.

5) L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2}dx$ est–elle convergente ? Si oui, que vaut–elle ?

On admettra que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan(x)}{x}=0$ *(<u>Rappel</u> : $\ln(B)-\frac{1}{2}\ln(C)=\frac{1}{2}(2\ln(B)-\ln(C))$)*

EX2 : Soient a et b deux réels.

Soient les fonctions f et g définies pour $x>-\frac{1}{2}$ par $f(x)=\dfrac{-30x+19}{\sqrt{4x-3}}$ et $g(x)=(ax+b)\sqrt{4x-3}$.

1) Quelles doivent–être les valeurs des réels a et b pour que g soit une primitive de f sur I =] $\frac{3}{4}$;+∞ [?

On suppose dans la suite de l'exercice que ces valeurs sont a = –5 et b = 2.

2) Déterminer la primitive sur I de la fonction f qui vaut 6 en 3.

EX3 :

1) Soit $x\geq\frac{1}{2}$.

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_x^1 \frac{t}{(2t-1)^{5/2}}dt$ à l'aide d'une intégration par parties ou d'un changement de variable.

2) L'intégrale généralisée de $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{t}{(2t-1)^{5/2}}dt$ est–elle convergente ? Si oui, quelle est sa valeur ?

EX4 : On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} -\dfrac{25}{x^3} & \text{si } x \leq -2 \\ -1 & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ 2e^{1-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On admet que f est une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

1) Calculer $\int_{-5}^{-1/2} f(x)dx$.

2) L'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{-2} f(x)\,dx$ est–elle convergente ? Si oui, quelle est sa valeur ?

3) L'intégrale généralisée $\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ est–elle convergente ? Si oui, quelle est sa valeur ?

4) L'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ est–elle convergente ? Si oui, quelle est sa valeur ?

EX5 : Calculer, à l'aide d'un changement de variable, l' intégrale $A = \int_{-\ln(3)}^{0} \dfrac{(e^{-t})^2}{2e^{-t}-1} dt$.

EX 6

1) Déterminer trois réels A, B et C tels que : $p(x) = 2x^2 - 6x + 5 = A \times \left[(Bx + C)^2 + 1 \right]$ pour $x \in$ IR.

2) Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \dfrac{1}{p(x)} = \dfrac{1}{2x^2 - 6x + 5}$.

a) Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) L'intégrale $\int_{1}^{+\infty} \dfrac{1}{2t^2 - 6t + 5} dt$ est–elle convergente ? Si oui, donner sa valeur.

EX7 :

1) Démontrer que le DL_2 en 0 de la fonction $f(x) = (8 + x)^{4/3}$ est égal à $16 + \dfrac{8}{3}x + \dfrac{1}{18}x^2 + o(x^2)$.

2) Déterminer le DL_2 en 0 de la fonction $g(x) = \ln(1 - 2x)$.

3) a) En déduire le DL_2 en 0 de la fonction $h(x) = \dfrac{1}{8}(8 + x)^{4/3} \times \ln(1 - 2x)$.

b) Proposer un tracé local de la fonction h au voisinage du point A(0 ;h(0))

4) Déterminer, en utilisant la question précédente, une valeur approchée de $\dfrac{1}{8}(7{,}97)^{4/3} \times \ln(1{,}06)$.

5) Que vaut la limite lorsque x tend vers 0 de $\dfrac{(8+x)^{4/3} - 16}{x}$?

6) Que vaut la limite lorsque x tend vers 0 de $\dfrac{h(x) + 4x}{x^2}$?

7) Déduire des questions 1) et 2) le DL_5 en 0 de la fonction $v(x) = \dfrac{1}{8}(8 + 2x^3)^{4/3} \times \ln(1 - 2x^2)$.