

Mention / Parcours / Spécialité : **Licence Economie et Gestion-Majeure Economie**

Année : **2**

Intitulé de l'épreuve : **Techniques quantitatives**

Durée de l'épreuve : 2 h 30

Documents autorisés : aucun

Matériel autorisé : aucun

 ce sujet comporte **deux pages – il y a 7 exercices**

EX1 : Soit la fonction f définie pour x appartenant à $I =]0 ; +\infty [$ par $f(x) = \frac{1}{x(x^2 + 1)}$.

1) Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + 1}$. En déduire une primitive de f sur I .

2) Calculer l'intégrale $A = \int_1^2 \frac{1}{x(1 + x^2)} dx$.

3) Calculer l'intégrale $A = \int_1^2 \frac{\arctan(x)}{x^2} dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

4) Calculer l'intégrale $A(a) = \int_1^a \frac{\arctan(x)}{x^2} dx$ pour réel tout $a \geq 1$.

5) L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2} dx$ est-elle convergente ? Si oui, que vaut-elle ?

On admettra que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(x)}{x} = 0$ (Rappel: $\ln(B) - \frac{1}{2} \ln(C) = \frac{1}{2} (2 \ln(B) - \ln(C))$)

EX2 : Soient a et b deux réels.

Soient les fonctions f et g définies pour $x > \frac{3}{4}$ par $f(x) = \frac{-30x + 19}{\sqrt{4x - 3}}$ et $g(x) = (ax + b)\sqrt{4x - 3}$.

1) Quelles doivent être les valeurs des réels a et b pour que g soit une primitive de f sur $I =]\frac{3}{4} ; +\infty [$?

On suppose dans la suite de l'exercice que ces valeurs sont $a = -5$ et $b = 2$.

2) Déterminer la primitive sur I de la fonction f qui vaut 6 en 3.

EX3 :

1) Soit $x > \frac{1}{2}$.

Calculer l'intégrale $\int_x^1 \frac{t}{(2t - 1)^{5/2}} dt$ à l'aide d'une intégration par parties ou d'un changement de variable.

2) L'intégrale généralisée de $\int_{1/2}^1 \frac{t}{(2t - 1)^{5/2}} dt$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa valeur ?

EX4 : On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} -\frac{25}{x^3} & \text{si } x \leq -2 \\ -1 & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ 2e^{1-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On admet que f est une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

1) Calculer $\int_{-5}^{-1/2} f(x) dx$.

2) L'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{-2} f(x) dx$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa valeur ?

3) L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa valeur ?

4) L'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa valeur ?

EX5 : Calculer, à l'aide d'un changement de variable, l'intégrale $A = \int_{-\ln(3)}^0 \frac{(e^{-t})^2}{2e^{-t}-1} dt$.

EX 6

1) Déterminer trois réels A , B et C tels que : $p(x) = 2x^2 - 6x + 5 = A \times [(Bx + C)^2 + 1]$ pour $x \in \mathbb{R}$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{p(x)} = \frac{1}{2x^2 - 6x + 5}$.

a) Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t^2 - 6t + 5} dt$ est-elle convergente ? Si oui, donner sa valeur.

EX7 :

1) Démontrer que le DL_2 en 0 de la fonction $f(x) = (8+x)^{4/3}$ est égal à $16 + \frac{8}{3}x + \frac{1}{18}x^2 + o(x^2)$.

2) Déterminer le DL_2 en 0 de la fonction $g(x) = \ln(1-2x)$.

3) a) En déduire le DL_2 en 0 de la fonction $h(x) = \frac{1}{8}(8+x)^{4/3} \times \ln(1-2x)$.

b) Proposer un tracé local de la fonction h au voisinage du point $A(0 ; h(0))$

4) Déterminer, en utilisant la question précédente, une valeur approchée de $\frac{1}{8}(7,97)^{4/3} \times \ln(1,06)$.

5) Que vaut la limite lorsque x tend vers 0 de $\frac{(8+x)^{4/3} - 16}{x}$?

6) Que vaut la limite lorsque x tend vers 0 de $\frac{h(x) + 4x}{x^2}$?

7) Déduire des questions 1) et 2) le DL_5 en 0 de la fonction $v(x) = \frac{1}{8}(8+2x^3)^{4/3} \times \ln(1-2x^2)$.

Ex 1

$$\begin{aligned} \text{1) } \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} &= \frac{a(x^2+1)}{x(x^2+1)} + \frac{(bx+c)(x)}{(x^2+1)(x)} \\ &= \frac{ax^2+a+bx^2+cx}{x(x^2+1)} \\ &= \frac{(a+b)x^2+cx+a}{x(x^2+1)} \end{aligned}$$

Il y a égalité avec $f(x)$ si

$$\begin{cases} a+b=0 \\ c=0 \\ a=1 \end{cases}$$

$$(1 = 0x^2 + 0x + 1)$$

$$\text{ssi } \begin{cases} a=1 \\ c=0 \\ b=-a=-1 \end{cases}$$

1

cd: $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \times \frac{2}{x^2+1}$$

0,5

1

Une primitive de f sur I est donc $F(x) = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2+1)$

$> 0 \text{ sur } I$

$> 0 \text{ sur } I$

$$\begin{aligned} \text{2) } A = F(2) - F(1) &= \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(5) - (\ln(1) - \frac{1}{2} \ln(2)) \\ &= \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(5) + \frac{1}{2} \ln(2) \\ &= \frac{3}{2} \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(5) \end{aligned}$$

0,5

$$\begin{array}{l|l} \text{3) } u' = \frac{1}{x^2} & u = -\frac{1}{x} \\ v = \arctan(x) & v' = \frac{1}{x^2+1} \end{array}$$

1

$$\begin{aligned} \text{IPP: } A &= \left[-\frac{1}{x} \arctan(x) \right]_1^2 - \int_1^2 -\frac{1}{x} \times \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= -\frac{1}{2} \arctan(2) - \left(-\frac{1}{1} \arctan(1) \right) + \int_1^2 \frac{1}{x(x^2+1)} dx \\ &= -\frac{1}{2} \arctan(2) + \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(5) \end{aligned}$$

0,5

0,5

①

$$\begin{aligned} \text{H} \quad A(a) &= \left[-\frac{1}{a} \operatorname{arctan}(x) \right]_1^a - \int_1^a \frac{1}{x(x^2+1)} dx \\ &= -\frac{1}{a} \operatorname{arctan}(a) + \frac{\pi}{4} + \int_1^a \frac{1}{x(x^2+1)} dx \\ &= -\frac{1}{a} \operatorname{arctan}(a) + \frac{\pi}{4} + F(a) - F(1) \end{aligned}$$

0,5

$$= -\frac{1}{a} \operatorname{arctan}(a) + \frac{\pi}{4} + \ln(a) - \frac{1}{2} \ln(a^2+1) + \frac{1}{2} \ln(2)$$

$$\text{G} \quad \lim_{a \rightarrow +\infty} A(a) = -0 + \frac{\pi}{4} + \underbrace{(+\infty) - \frac{1}{2}(+\infty)}_{+\infty + (-\infty) : \text{F.I.}} + \frac{1}{2} \ln(2)$$

$$\begin{aligned} A(a) &= -\frac{1}{a} \operatorname{arctan}(a) + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} (2 \ln(a) - \ln(a^2+1)) + \frac{1}{2} \ln(2) \\ &= -\frac{1}{a} \operatorname{arctan}(a) + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} (\ln(a^2) - \ln(a^2+1)) + \frac{1}{2} \ln(2) \\ &= -\frac{1}{a} \operatorname{arctan}(a) + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{a^2}{a^2+1}\right) + \frac{1}{2} \ln(2) \end{aligned}$$

0,5

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow +\infty} A(a) &= -0 + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \underbrace{\ln(1)}_{=0} + \frac{1}{2} \ln(2) \quad \text{car } \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{a^2}{a^2+1} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{a^2}{a^2} = 1 \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln(2) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

0,5

cel: L'intégrale est cv et vaut $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln(2)$

0,5

Ex2:

1) g est une primitive de f sur I si $g'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$

2

$$\begin{aligned} \text{Or: } g'(x) &= ((ax+b)(4x-3)^{\frac{4}{2}})' = u'v + uv' \\ &= a \times (4x-3)^{\frac{4}{2}} + (ax+b) \times (+\frac{4}{2}) \times 4 \times (4x-3)^{\frac{4}{2}-1} \\ &= a(4x-3)^{\frac{4}{2}} + 2(ax+b)(4x-3)^{-\frac{1}{2}} \\ &= (4x-3)^{-\frac{1}{2}} [a(4x-3) + 2(ax+b)] \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= (4x-3)^{-\frac{1}{2}} (4ax-3a+2ax+2b) \\
 &= (4x-3)^{-\frac{1}{2}} ((4a+2a)x + (-3a+2b)) \\
 &= (4x-3)^{-\frac{1}{2}} (6ax + (-3a+2b))
 \end{aligned}$$

$$g'(x) = f(x) \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} 6a = -30 \\ -3a+2b = 19 \end{cases} \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} a = -5 \\ b = \frac{19+3a}{2} \end{cases} \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} a = -5 \\ b = \frac{19-15}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

cel: g est une primitive de f sur I ssi $a = -5$ et $b = 2$

Les primitives de f sur I sont de la forme $F_c(x) = g(x) + c$ où $c \in \mathbb{R}$

On cherche c tel que $F_c(3) = 6$.

$$F_c(3) = 6 \quad \text{ssi} \quad g(3) + c = 6 \quad \text{ssi} \quad (-5 \times 3 + 2) \sqrt{4 \times 3 - 3} + c = 6$$

$$\text{ssi} \quad -13 \sqrt{9} + c = 6$$

$$\text{ssi} \quad -13 \times 3 + c = 6$$

$$\text{ssi} \quad c = 6 + 39 = 45$$

cel: La primitive recherchée est $(-5x+2) \sqrt{4x-3} + 45$.

Ex3 (35) $A(x) = \int_x^1 \frac{t}{(2t-1)^{5/2}} dt = \int_x^1 t(2t-1)^{-\frac{5}{2}} dt$

→ Calcul de $A(x)$ avec une IPP

$$\begin{aligned}
 u' &= (2t-1)^{-\frac{5}{2}} = (2t-1)^{-\frac{3}{2}-1} = \underbrace{-\frac{2}{3}}_k \times \underbrace{\frac{1}{2}}_m \underbrace{\left(-\frac{3}{2}\right) \times 2}_{u'} \underbrace{(2t-1)^{-\frac{3}{2}-1}}_{u^{m-1}} \quad \left| \begin{array}{l} u = -\frac{1}{3} (2t-1)^{-\frac{3}{2}} \\ u' = 1 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{IPP: } A(x) &= \left[t \times \left(-\frac{1}{3}\right) (2t-1)^{-\frac{3}{2}} \right]_x^1 - \int_x^1 -\frac{1}{3} (2t-1)^{-\frac{3}{2}} dt \\
 &= -\frac{1}{3} \times 1 \times 1^{-\frac{3}{2}} - \left(-\frac{1}{3} x (2x-1)^{-\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{3} \int_x^1 \underbrace{-2 \times \frac{1}{2}}_k \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)}_m \underbrace{(2)}_{u'} \underbrace{(2t-1)^{-\frac{1}{2}-1}}_{u^{m-1}} dt \\
 &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} x (2x-1)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} \left[-(2t-1)^{-\frac{1}{2}} \right]_x^1 \\
 &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} x (2x-1)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} \left(-1 - (-(2x-1)^{-\frac{1}{2}}) \right) = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} x (2x-1)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} (2x-1)^{-\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

ou : Calcul de $A(x)$ avec un changement de variable

nouvelle variable : $y = 2t - 1 \Leftrightarrow y + 1 = 2t \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}(y + 1)$

* bornes

si $t = x$, $y = 2x - 1$

si $t = 1$, $y = 2 \times 1 - 1 = 2 - 1 = 1$

* fonction

$$t(2t-1)^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}(y+1)y^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}y^{-\frac{5}{2}}$$

* dt

On trouve $t = \frac{1}{2}(y+1)$; $\frac{dt}{dy} = \frac{1}{2}(y+1)' = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$ donc $dt = \frac{1}{2} dy$

$$\begin{aligned} A(x) &= \int_{2x-1}^1 \left(\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}y^{-\frac{5}{2}} \right) \times \frac{1}{2} dy = \int_{2x-1}^1 \left(\frac{1}{4}y^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}y^{-\frac{5}{2}} \right) dy \\ &= \left[\frac{1}{4} \frac{y^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + \frac{1}{4} \frac{y^{-\frac{5}{2}+1}}{-\frac{5}{2}+1} \right]_{2x-1}^1 \\ &= \left[\frac{1}{4}(-2)y^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\left(-\frac{2}{3}\right)y^{-\frac{3}{2}} \right]_{2x-1}^1 \\ &= \left[-\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}y^{-\frac{3}{2}} \right]_{2x-1}^1 \\ &= -\frac{1}{2} \times 1 - \frac{1}{6} \times 1 - \left(-\frac{1}{2}(2x-1)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}(2x-1)^{-\frac{3}{2}} \right) \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(2x-1)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}(2x-1)^{-\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{2}{3} + \frac{1}{2}(2x-1)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}(2x-1)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$-\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$

$\Rightarrow$ avec le résultat obtenu avec l'IPP

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} (A(x)) &= -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x(2x-1)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}(2x-1)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times (0^+)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}(0^+)^{-\frac{1}{2}} \quad (4) \\ &= -\frac{2}{3} + \frac{1}{6}(+\infty) + \frac{1}{3}(+\infty) = -\frac{2}{3} + \infty + (+\infty) = +\infty \notin \mathbb{R} \end{aligned}$$

1

col: l'intégrale est $\mathbb{R}$

→ Avec le résultat obtenu avec le changement de variable.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \left(A(x) = -\frac{4}{3} + \frac{1}{2}(2x-1)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}(2x-1)^{-\frac{3}{2}} \right) = -\frac{4}{3} + \frac{1}{2}(0^+)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}(0^+)^{-\frac{3}{2}}$$
$$= -\frac{4}{3} + \frac{1}{2}(+\infty) + \frac{1}{6}(+\infty)$$
$$= -\frac{4}{3} + (+\infty) + (+\infty) = +\infty \notin \mathbb{R} \dots$$

Ex 4: 6

$$\text{1) } A = \int_{-5}^{-1/2} f(x) dx = \int_{-5}^{-2} -25x^{-3} dx + \int_{-2}^{-1/2} -1 dx$$
$$= \left[-25x \frac{x^{-3+1}}{-3+1} \right]_{-5}^{-2} + \left[-x \right]_{-2}^{-1/2}$$
$$= \left[\frac{25}{2} x^{-2} \right]_{-5}^{-2} + \left(-(-\frac{1}{2}) - (-(-2)) \right)$$
$$= \frac{25}{2} \times \frac{1}{2^2} - \frac{25}{2} \times \frac{1}{5^2} + \frac{1}{2} - 2 = \frac{25}{8} - 2 = \frac{25-16}{8} = \frac{9}{8}$$

$$\text{2) } B = \int_{-\infty}^{-2} f(x) dx = \int_{-\infty}^{-2} -25x^{-3} dx$$

$$\text{Soit } a \leq -2 \quad B(a) = \int_a^{-2} -25x^{-3} dx = \left[\frac{25}{2} x^{-2} \right]_a^{-2}$$
$$= \frac{25}{2} \times \frac{1}{2^2} - \frac{25}{2} \times \frac{1}{a^2}$$
$$= \frac{25}{8} - \frac{25}{2} \times \frac{1}{a^2}$$

$$\xrightarrow{a \rightarrow -\infty} \frac{25}{8} - \frac{25}{2} \times \frac{1}{+\infty} = \frac{25}{8} - \frac{25}{2} \times 0$$
$$= \frac{25}{8} \in \mathbb{R}$$

col: B est $\mathbb{R}$ et vaut $\frac{25}{8}$.

$$\text{3) } C = \int_{+\infty}^{1-x} 2e^{1-x} dx. \quad \text{Soit } a \geq 1. \quad C(a) = \int_a^{1-x} 2e^{1-x} dx = \int_a^1 -1(2)(-1)e^{1-x} dx$$
$$C(a) = \left[-2e^{1-x} \right]_a^1 = -2e^{1-1} - (-2e^{1-a}) = -2e^0 + 2e^{1-a}$$

$$C(a) \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 2e^{-\infty} + 2 = 2 \times 0 + 2 = 2 \in \mathbb{R}$$

0,5

cd: C est CV et vaut 2.

$$\text{H } D = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{-2} -25x^{-3} dx}_{= B : CV} + \underbrace{\int_{-2}^1 -1 dx}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} 2e^{1-x} dx}_{= C : CV}$$

0,5

Donc D est CV et vaut :

$$\begin{aligned} \frac{25}{8} + \int_{-2}^1 -1 dx + 2 &= \frac{25}{8} + [-x]_{-2}^1 + 2 = \frac{25}{8} + (-1 - (-(-2))) + 2 \\ &= \frac{25}{8} - 1 - 2 + 2 \\ &= \frac{25-8}{8} = \frac{17}{8} \end{aligned}$$

0,5

ex5 $A = \int_{-\ln 3}^0 \frac{(e^{-t})^2}{2e^t - 1} dt$

3

nouvelle variable : $x = e^{-t} \Leftrightarrow \ln x = -t \Leftrightarrow t = -\ln(x)$

* bornes :

si $t = -\ln(3)$, $x = e^{-(-\ln 3)} = e^{\ln 3} = 3$

si $t = 0$, $x = e^{-0} = e^0 = 1$

0,5

* fonction :

$$\frac{(e^{-t})^2}{2e^t - 1} = \frac{x^2}{2x - 1}$$

0,5

* dt

0,5

$t = -\ln(x)$. On dérive. On obtient $\frac{dt}{dx} = (-\ln x)' = -\frac{1}{x}$ donc $dt = -\frac{1}{x} dx$

$$A = \int_3^1 \frac{x^2}{2x-1} \left(-\frac{1}{x} dx\right) = - \int_3^1 \frac{x}{2x-1} dx = \int_1^3 \frac{x}{2x-1} dx$$

6

$$\begin{array}{r|l} x & 2x-1 \\ \hline -(x-\frac{1}{2}) & \frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{2} & \end{array}$$

$$\frac{x}{2x-1} = \frac{1}{2} + \frac{1/2}{2x-1}$$

ops

$$A = \int_1^3 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{2x-1} \right) dx = \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \ln(2x-1) \right]_1^3$$

1

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \ln(5) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \ln(1) \right) \\ &= 1 + \frac{1}{4} \ln(5) \end{aligned}$$

Ex 6:

$$\begin{aligned} \text{Il } p(x) &= 2x^2 - 6x + 5 = 2(x^2 - 3x) + 5 \\ &= 2 \left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right] + 5 \\ &= 2 \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{9}{4} + 5 \\ &= 2 \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} (2 \times 2 \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 1) \\ &= \frac{1}{2} \left((2(x - \frac{3}{2}))^2 + 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} ((2x-3)^2 + 1) \end{aligned}$$

2

On peut choisir $A = \frac{1}{2}$, $B = 2$ et $C = -3$

$$\text{Il } f(x) = \frac{1}{p(x)} = \frac{1}{\frac{1}{2} (1 + (2x-3)^2)} = \frac{2}{1 + (2x-3)^2}$$

1

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donc $F(x) = \arctan(2x-3)$

$\exists_a$ Soit $a \geq 1$

$$A(a) = \int_1^a f(x) dx = F(a) - F(1) = \arctan(2a-3) - \arctan(-1) = \arctan(2a-3) + \frac{\pi}{4}$$

(7)

$$A(a) \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} \arctan(+\infty) + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \in \mathbb{R}$$

car: $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ est cv et vaut $\frac{3\pi}{4}$.

1,5

Ex7:

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= (8+x)^{\frac{4}{3}} \\ f'(x) &= \frac{4}{3} \times 1 (8+x)^{\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{3} (8+x)^{\frac{1}{3}} \quad 0,5 \\ f''(x) &= \frac{4}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 (8+x)^{\frac{1}{3}-1} = \frac{4}{9} (8+x)^{-\frac{2}{3}} \quad 0,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0) &= 8^{\frac{4}{3}} = (2^3)^{\frac{4}{3}} = 2^4 = 16 \\ f'(0) &= \frac{4}{3} (2^3)^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3} \times 2 = \frac{8}{3} \\ f''(0) &= \frac{4}{9} \times (2^3)^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{9} \times 2^{-2} = \frac{4}{9} \times \frac{1}{2^2} = \frac{1}{9} \end{aligned} \quad 1$$

Le $\mathcal{D}_2$ en 0 de f est donc (formule de Taylor)

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + o(x^2) \\ &= 16 + \frac{8}{3}x + \frac{\frac{1}{9}}{2} x^2 + o(x^2) \\ &= 16 + \frac{8}{3}x + \frac{1}{18} x^2 + o(x^2) \end{aligned} \quad 0,5$$

$$\Rightarrow g(x) = \ln(1-2x) = \ln(1+u) \text{ avec } u = -2x.$$

u est de la forme kx^α avec $\alpha = 1 \in \mathbb{N}^*$

$$\text{le } \mathcal{D}_2 \text{ en 0 de } \ln(1+x) \text{ est } x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \quad \left. \vphantom{\ln(1+x)} \right\} 1$$

$$\text{donc le } \mathcal{D}_2 \text{ en 0 de } g \text{ est } (-2x) - \frac{1}{2} \underbrace{(-2x)^2}_{4x^2} + o(x^2) = -2x - 2x^2 + o(x^2)$$

$$\text{ou: } g(x) = \ln(1-2x)$$

$$g'(x) = \frac{-2}{1-2x} = -2(1-2x)^{-1}$$

$$g''(x) = -2(-1)(-2)(1-2x)^{-2} = -4(1-2x)^{-2}$$

$$g(0) = \ln(1) = 0$$

$$g'(0) = \frac{-2}{1} = -2$$

$$g''(0) = -4 \times 1^{-2} = -4 \times 1 = -4$$

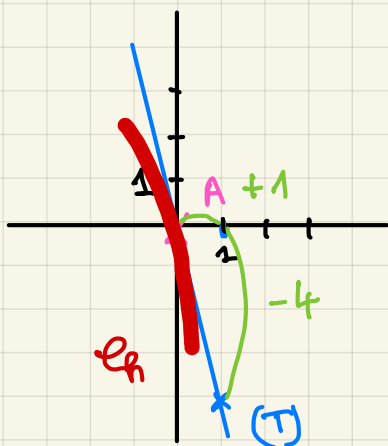
Le $\mathcal{D}_2$ en 0 de g est donc (formule de Taylor)

$$g(x) = 0 - 2x - \frac{4}{2!} x^2 + o(x^2) = -2x - 2x^2 + o(x^2)$$

$$\begin{aligned}
 \text{3a } h(x) &= \frac{1}{8} f(x) \times g(x) \\
 &= \frac{1}{8} \left(16 + \frac{8}{3}x + \frac{1}{18}x^2 + o(x^2) \right) \times (-2x - 2x^2 + o(x^2)) \\
 &= \frac{1}{8} \left(-32x - \frac{32}{3}x^2 - \frac{16}{3}x^2 + o(x^2) \right) \\
 &= \frac{1}{8} \left(-32x - \frac{112}{3}x^2 + o(x^2) \right) \\
 &= -4x - \frac{14}{3}x^2 + o(x^2)
 \end{aligned}$$

2

b



$$A(0, \underbrace{h(0)}_{=0}) \in \mathcal{C}_f$$

0,5

(T), tangente à $\mathcal{C}_f$ en A a pour équation $y = -4x$

0,5

$$h''(0) = 2! \times \left(-\frac{14}{3}\right) = -\frac{28}{3} < 0 : h \text{ est localement}$$

concave en A donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de (T)

0,5

$$\text{4 } h(-0,03) = \frac{1}{8} (8 + (-0,03))^{\frac{4}{3}} \ln(1 - 2(-0,03)) = \frac{1}{8} (7,97)^{\frac{4}{3}} \ln(1,06)$$

-0,03 est proche de 0

$$\text{Donc } h(-0,03) \simeq -4(-0,03) - \frac{14}{3}(-0,03)^2$$

$$\simeq 0,12 - \frac{14}{3}(0,0009)$$

1

$$\simeq 0,12 - 14(0,0003)$$

$$\simeq 0,1200 - 0,0042$$

$$\simeq 0,1158$$

$$\text{5 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 16}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{16} + \frac{8}{3}x + o(x) - \cancel{16}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{8}{3} + \frac{o(x)}{x} \right)$$

1

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{8}{3} + \underbrace{o(1)}_{\substack{1 \times \epsilon(x) \\ \rightarrow 0 \text{ qd } x \rightarrow 0}} \right) = \frac{8}{3} + 0 = \frac{8}{3}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 4x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4x - \frac{14}{3}x^2 + 0(x^2) + 4x}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\frac{14}{3}x^2}{x^2} + \frac{0(x^2)}{x^2} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{14}{3} + 0(1) = -\frac{14}{3} + 0 = -\frac{14}{3}
 \end{aligned}$$

1

$$7) v(x) = \frac{1}{8} (8 + 2x^3)^{\frac{4}{3}} \ln(1 - 2x^2)$$

$$\begin{aligned}
 (8+x)^{\frac{4}{3}} &= 16 + \frac{8}{3}x + \frac{1}{18}x^2 + x^2 \varepsilon(x) \\
 \text{donc } (8+2x^3)^{\frac{4}{3}} &= 16 + \frac{8}{3}(2x^3) + \frac{1}{18}(2x^3)^2 + \underbrace{(2x^3)^2}_{4x^6} \varepsilon(2x^3) \\
 &= 16 + \frac{16}{3}x^3 + \frac{1}{18} \times 4x^6 + \underbrace{x^6 \times 4 \varepsilon(2x^3)}_{\rightarrow 0 \text{ qd } x \rightarrow 0} \\
 &= 16 + \frac{16}{3}x^3 + \frac{2}{9}x^6 + o(x^6)
 \end{aligned}$$

On a ainsi obtenu le $\mathcal{D}_6$ en 0 de la fonction $(8+2x^3)^{\frac{4}{3}}$.

On en déduit que le $\mathcal{D}_5$ en 0 de cette fonction est $16 + \frac{16}{3}x^3 + o(x^5)$

$$\ln(1-2x) = -2x - 2x^2 + x^2 \varepsilon(x)$$

$$\begin{aligned}
 \text{donc } \ln(1-2x^2) &= -2(x^2) - 2(x^2)^2 + \underbrace{(x^2)^2}_{=x^4} \varepsilon(x^2) \\
 &= -2x^2 - 2x^4 + o(x^4)
 \end{aligned}$$

3

On a ainsi obtenu le $\mathcal{D}_4$ en 0 de la fonction $\ln(1-2x^2)$. Comme cette fonction est paire ($\ln(1-2(-x)^2) = \ln(1-2x^2)$) c'est aussi le $\mathcal{D}_5$ en 0.

$$\text{On a donc } \ln(1-2x^2) = -2x^2 - 2x^4 + o(x^5)$$

$$\begin{aligned}
 v(x) &= \frac{1}{8} \left(16 + \frac{16}{3}x^3 + o(x^5) \right) (-2x^2 - 2x^4 + o(x^5)) \\
 &= \frac{1}{8} \left(-32x^2 - 32x^4 - \frac{32}{3}x^5 + o(x^5) \right) \\
 &= -4x^2 - 4x^4 - \frac{4}{3}x^5 + o(x^5) : \mathcal{D}_5 \text{ en } 0 \text{ de } v(x)
 \end{aligned}$$

$$\int_{2x-1}^1 \frac{y+1}{4} \times y^{-\frac{5}{2}} dy$$

$$u' = y^{-\frac{5}{2}}$$

$$u = -\frac{2}{3} y^{-\frac{3}{2}}$$

$$v = \frac{y+1}{4}$$

$$v' = \frac{1}{4}$$

$$\left[-\frac{2}{3} y^{-\frac{3}{2}} \times \frac{y+1}{4} \right]_{2x-1}^1 - \int_{2x-1}^1 -\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} y^{-\frac{3}{2}} dy$$

$$= \left[-\frac{1}{6} y^{-\frac{3}{2}} (y+1) \right]_{2x-1}^1 + \left[\frac{1}{6} \times \frac{y^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right]_{2x-1}^1$$

$$= -\frac{1}{6} \times 1 \times 2 + \frac{1}{6} (2x-1)^{-\frac{3}{2}} \times 2x + \left[-\frac{1}{3} y^{-\frac{1}{2}} \right]_{2x-1}^1$$