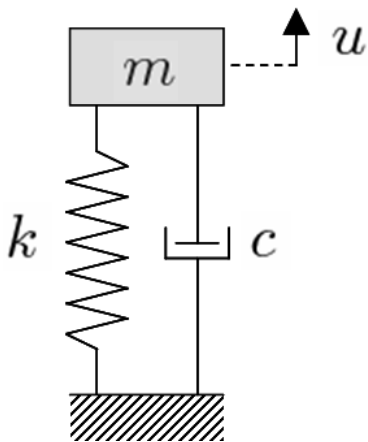


8IC01

Méthode de caractérisation des matériaux et plans d'expériences

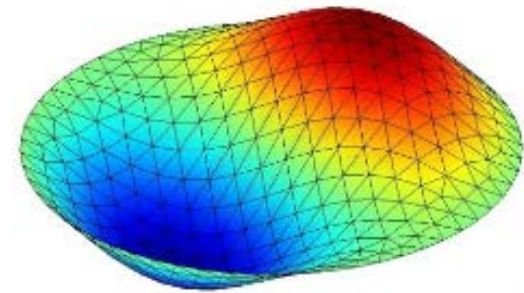
Vibrations



Alain GASSER

Lagrange 102

alain.gasser@univ-orleans.fr



Déroulé et références

16 séances de CM/TD

2 séances de TP sur Abaqus + 1 séance de PEA

2 DS

Références :

J.M. Mencik, Vibrations de structures, Notes de cours, INSA CVL, 2015

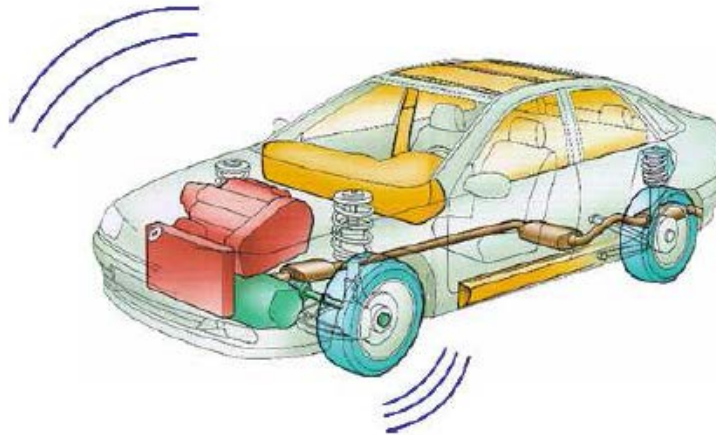
<https://savoir.ensam.eu/moodle/course/view.php?id=887>

<http://php.iai.heig-vd.ch/~lzo/anmod/cours/03%20MDOF.pdf>

Introduction

Vibrations : oscillations (mouvement périodique) d'un système élastique de part et d'autre d'une position d'équilibre.

Fréquemment rencontré dans l'industrie et recouvre de nombreux domaines : automobile (origine mécanique ou aérodynamique, confort vibratoire et acoustique), aéronautique et aérospatiale (lanceurs au décollage excités par couche limite turbulente), génie civil (stabilité des ponts sous excitations aérodynamiques, séismes),



Vibrations d'une automobile générant du bruit

Introduction

Les vibrations peuvent être « positives ».

En musique : le ton d'un son est déterminé par la fréquence de vibration.

On peut construire des appareils qui utilisent les vibrations mécaniques pour remplir une fonction désirée : générer des efforts importants avec une énergie modérée (perforatrice, marteau-piqueur, ...) ou mettre en mouvement des objets (tamis, bol vibrant, ...).



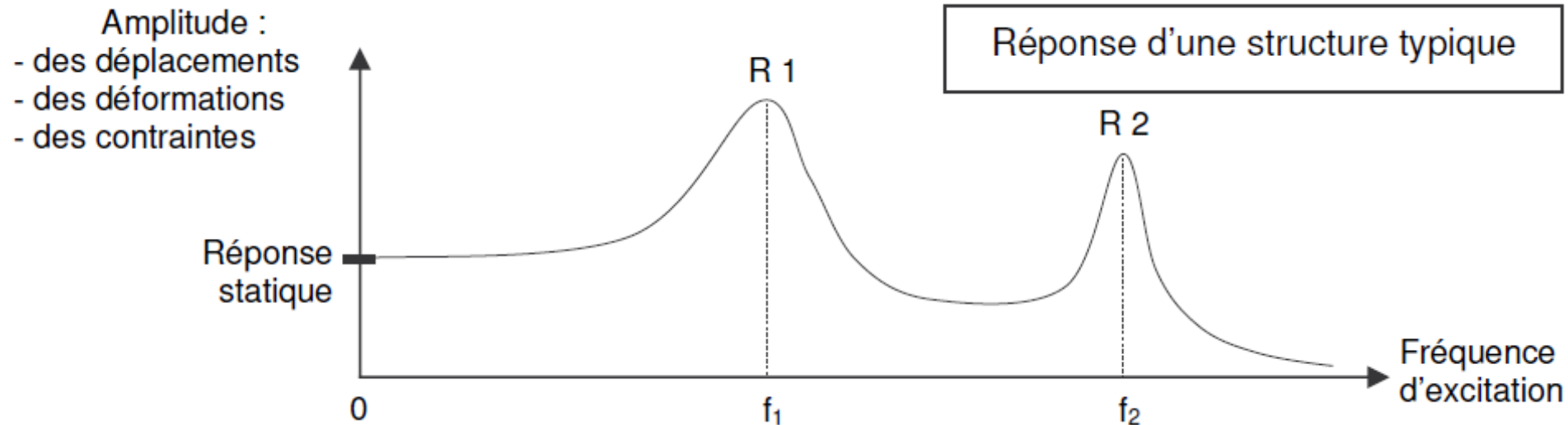
Mais la plupart du temps on cherche à atténuer les vibrations car :

- elles sont à l'origine dans certaines machines d'imprécisions, de bruit, d'usure prématurée et de fissures, entraînant finalement la rupture de la pièce,
- les vibrations des voitures, trains, avions ou bateaux provoquent l'inconfort des voyageurs, et diminuent parfois la sécurité de conduite de ces véhicules,
- les vibrations de grandes structures peuvent prendre dans certains cas des proportions catastrophiques

Introduction

Résonance

Phénomène essentiel et caractéristique du comportement vibratoire. Pour la plupart des structures, il existe certaines fréquences, dont l'excitation provoque une réponse très supérieure à la réponse statique.



Introduction

Résonance

Vent de 65 km/h



Résonance du pont de Tacoma (destruction le 7 novembre 1940)

Introduction

Gamme de fréquences rencontrées : du domaine dit de *basses fréquences (BF)* où une structure ne présente que quelques “mouvements simples” de vibrations (modes), aux domaines dit de *moyennes ou hautes fréquences (MF/HF)* où les champs vibratoires peuvent s’avérer relativement complexes

Remarque importante : **hypothèse de petites perturbations (HPP)**

- Les systèmes étudiés sont linéaires : les déplacements engendrés par différentes sources d’excitation sont cumulables.
- Les champs mécaniques et cinématiques des systèmes déformés sont étudiés par rapport à leurs positions d’équilibre statique
- Les déplacements sont petits par rapport aux dimensions des systèmes étudiés.

Introduction

Systèmes à 1 degré de liberté

Vibrations libres

Réponse forcée harmonique

Systèmes à plusieurs degrés de liberté

Systèmes à 2 degrés de liberté

Systèmes à n degrés de liberté

Systèmes élastiques continus

Vibrations longitudinales de barres

Vibrations transversales des poutres

Vibrations de plaques/coques

Conception d'une structure vibrante

Introduction

Systèmes à 1 degré de liberté

Vibrations libres

Réponse forcée harmonique

Systèmes à plusieurs degrés de liberté

Systèmes à 2 degrés de liberté

Systèmes à n degrés de liberté

Systèmes élastiques continus

Vibrations longitudinales de barres

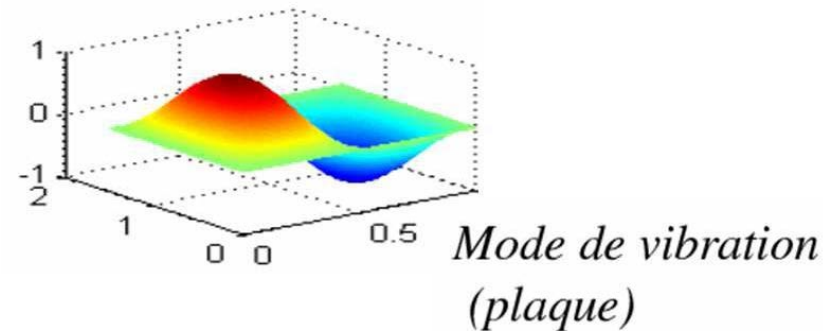
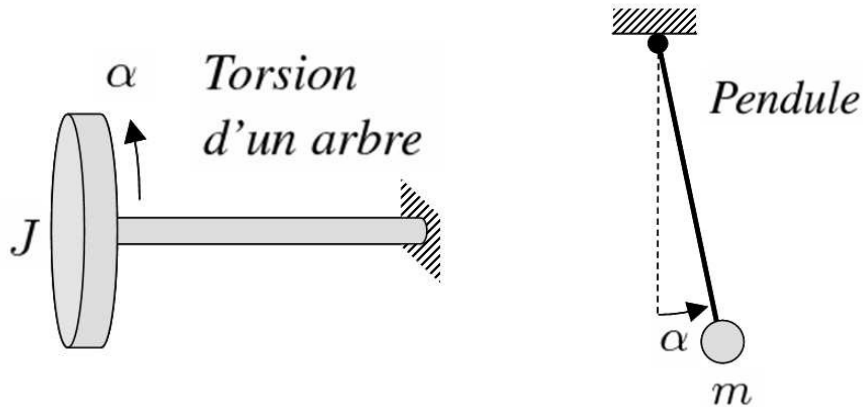
Vibrations transversales des poutres

Vibrations de plaques/coques

Conception d'une structure vibrante

Systèmes à 1 degré de liberté

L'étude des systèmes à un degré de liberté (1 DDL) permet d'appréhender de manière simple et relativement exhaustive le problème de vibrations des structures. Ce type de systèmes se retrouve dans de nombreux exemples : mouvement oscillant en torsion d'un disque massif rattaché à un arbre élastique de faible masse, oscillation d'un pendule, mode de vibration d'un système continu (plaque), ...

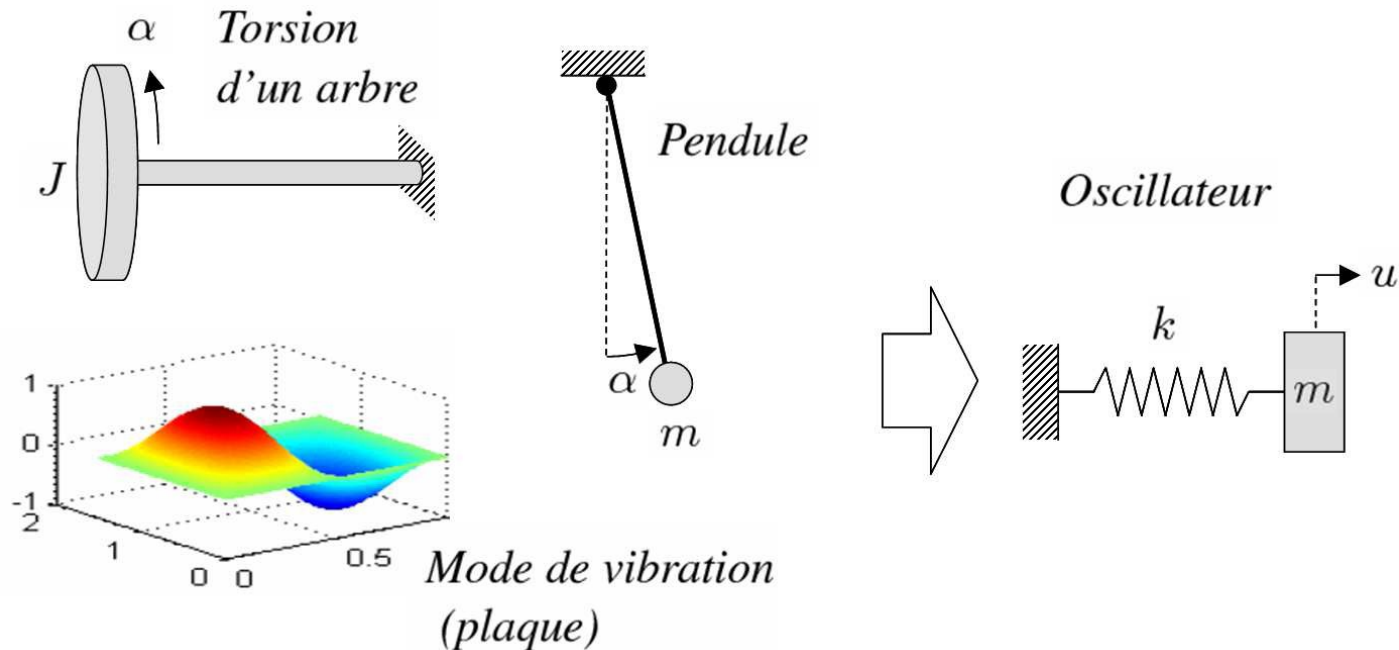


Le mouvement de vibrations se caractérise par un échange d'énergie entre phénomènes élastiques (énergie potentielle via les déformations) et inertiels (énergie cinétique via les masses) : il ne peut pas y avoir de vibrations dans un système dépourvu de masse !

Systèmes à 1 degré de liberté

Le comportement dynamique des systèmes à 1 DDL peut être déduit de celui de l'**oscillateur linéaire masse-ressort** (m, k) : l'analogie s'obtient en attribuant des valeurs adaptées à m et k (par exemple, dans le cas d'un disque massif rattaché à un arbre élastique de faible masse, l'analogie s'obtient en adoptant les substitutions $m \rightarrow J$ et $k \rightarrow k_t$, avec J le moment d'inertie polaire du disque et k_t la raideur de torsion de l'arbre).

La suite sera donc consacrée à l'étude de l'oscillateur linéaire (m, k).



Introduction

Systèmes à 1 degré de liberté

Vibrations libres

Réponse forcée harmonique

Systèmes à plusieurs degrés de liberté

Systèmes à 2 degrés de liberté

Systèmes à n degrés de liberté

Systèmes élastiques continus

Vibrations longitudinales de barres

Vibrations transversales des poutres

Vibrations de plaques/coques

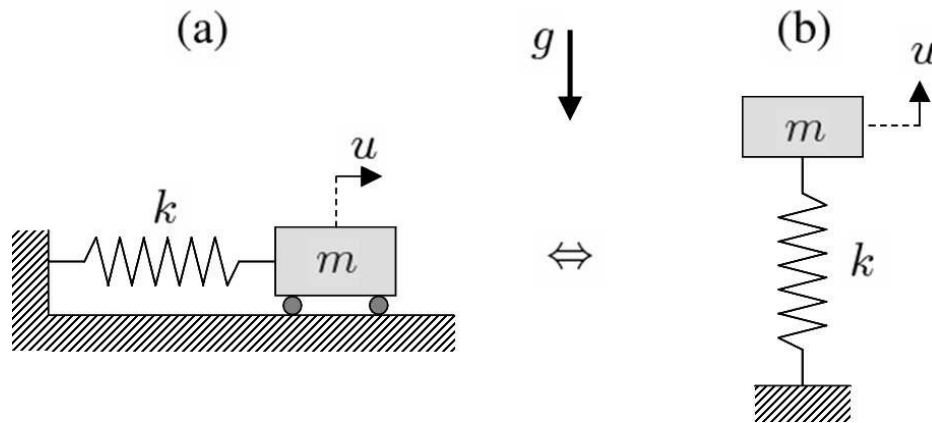
Conception d'une structure vibrante

Vibrations libres

Vibrations libres : lorsqu'on écarte un système de sa position d'équilibre ou qu'on lui donne une vitesse initiale, puis on le laisse vibrer librement.

Cas des systèmes non amortis (systèmes conservatifs)

Mouvement d'une masse m connectée à un ressort de raideur k , dont l'autre extrémité est fixée à un support rigide sans mouvement, frottements négligés.



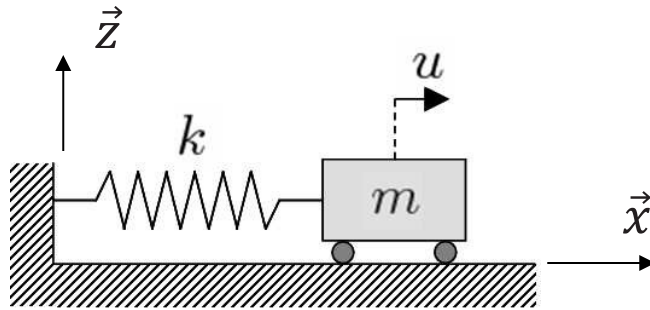
(a) Gravité non prise en compte

(b) Gravité prise en compte

Ces deux configurations sont équivalentes du point de vue de l'équation du mouvement de la masse m .

Vibrations libres

Cas des systèmes non amortis (systèmes conservatifs)



u : déplacement de la masse m selon $\vec{x}$ par rapport à la position d'équilibre (ressort à sa longueur initiale l_0).

$$u = l - l_0 \quad (l \text{ étant la longueur du ressort})$$

On isole la masse m . Bilan des actions mécaniques extérieures (BAME) :

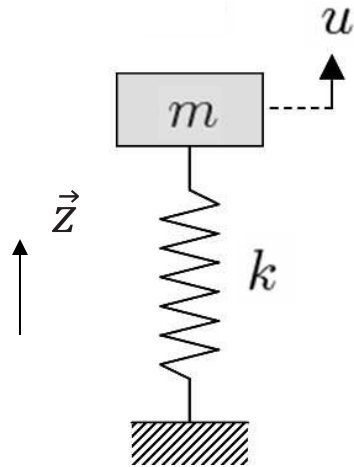
- ressort : $\vec{F} = -ku\vec{x}$
- sol : $\vec{R} = R\vec{z}$
- poids : $\vec{P} = -mg\vec{z}$

PFD en projection sur $\vec{x}$: $-ku = m\ddot{u}$

D'où l'équation du mouvement : $m\ddot{u} + ku = 0$

Vibrations libres

Cas des systèmes non amortis (systèmes conservatifs)



u : déplacement de la masse m selon $\vec{z}$ par rapport à la position d'équilibre statique (longueur du ressort notée l_e).

Recherche de la position d'équilibre statique. BAME :

- ressort : $\vec{F} = -k(l_e - l_0)\vec{z}$
- poids : $\vec{P} = -mg\vec{z}$

PFS en projection sur $\vec{z}$: $-k(l_e - l_0) - mg = 0$

$$\text{Donc : } l_e = l_0 - \frac{mg}{k}$$

En dynamique, la longueur du ressort est : $l = l_e + u$

$$\text{D'où : } \vec{F} = -k(l - l_0)\vec{z} = -k(l_e + u - l_0)\vec{z} = (mg - ku)\vec{z}$$

$$\text{PFD sur } \vec{z} : mg - ku - mg = m\ddot{u}$$

$$\text{D'où l'équation du mouvement : } \boxed{m\ddot{u} + ku = 0}$$

Vibrations libres

Cas des systèmes non amortis (systèmes conservatifs)

$$m\ddot{u} + ku = 0$$

Résolution

Equation caractéristique : $mr^2 + k = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 = -\frac{k}{m} < 0$

On pose : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ Donc : $r^2 = -\omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad r = \pm i\omega_0$

D'où : $u = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

ω_0 : pulsation propre

$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$: fréquence propre

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$: période propre

Vibrations libres

Cas des systèmes non amortis (systèmes conservatifs)

A et B : déterminées par les conditions initiales (déplacement et vitesse)

Conditions initiales :

$$u(t = 0) = u_0$$
$$\dot{u}(t = 0) = \dot{u}_0$$

Or :
$$\begin{cases} u = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \\ \dot{u} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t) \end{cases}$$

Donc :
$$\begin{cases} u(t = 0) = A \\ \dot{u}(t = 0) = B\omega_0 \end{cases}$$

D'où : $A = u_0$ et $B = \frac{\dot{u}_0}{\omega_0}$

Puis :

$$u = u_0\cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{u}_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

Vibrations libres

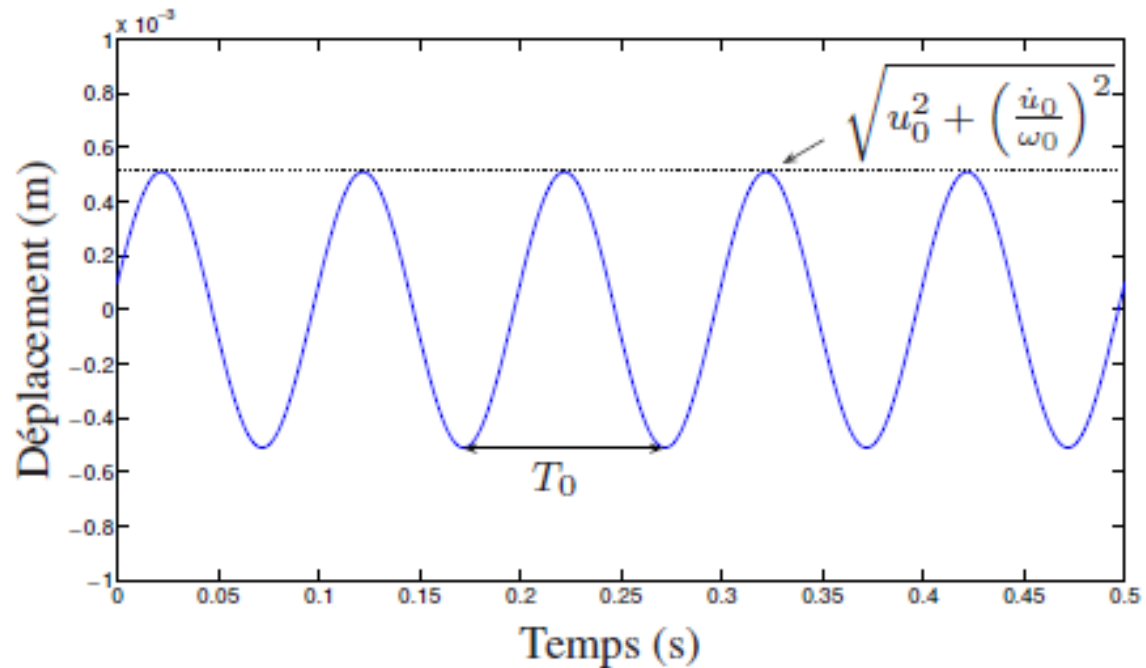
Cas des systèmes non amortis (systèmes conservatifs)

$$u = u_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{u}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

Réponse temporelle (variation du déplacement en fonction du temps) : oscillation harmonique de période T_0 et d'amplitude constante dans le temps.

Amplitude :

$$|u|_{max} = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_0}\right)^2}$$



Rappel de mathématiques

$$u(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \quad \text{maximum pour} \quad \frac{du}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t) = 0 \quad \Rightarrow \cos(\omega t) = \frac{A}{B}\sin(\omega t)$$

$$\text{Or} \quad \cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$$

$$\text{Donc} \quad \frac{A^2}{B^2}\sin^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1 \quad \Rightarrow \sin^2(\omega t) = \frac{B^2}{A^2 + B^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin(\omega t) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ \cos(\omega t) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \end{cases}$$

$$\text{D'où} \quad |u|_{\max} = A \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} + B \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sqrt{A^2 + B^2}$$

Vibrations libres

Cas des systèmes non amortis (systèmes conservatifs)



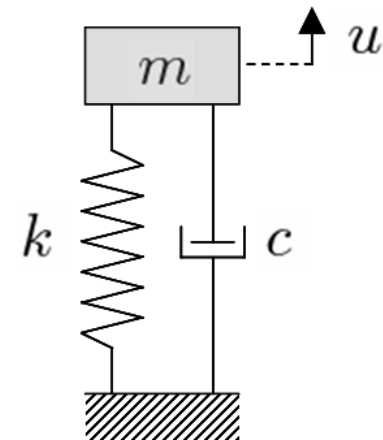
Vibrations libres

Cas des systèmes amortis (systèmes dissipatifs)

Le phénomène d'oscillations libres pour lesquelles les niveaux vibratoires sont constants dans le temps n'est physiquement pas réalisable : il y a toujours dissipation d'énergie. Les mécanismes de dissipation sont de natures diverses : viscosité, frottement sec, couplage avec fluide, ...

On se restreint à l'étude de l'**amortissement visqueux**, couramment utilisé dans l'étude du comportement vibratoire des systèmes mécaniques (simplicité de modélisation et capacité à pouvoir être utilisé dans la description de mécanismes d'amortissements plus complexes).

Système masse-ressort avec amortisseur visqueux :



Vibrations libres

Cas des systèmes amortis (systèmes dissipatifs)

Amortisseur



L'écoulement de l'huile crée une force de réaction proportionnelle à la vitesse du piston et opposée à cette vitesse :

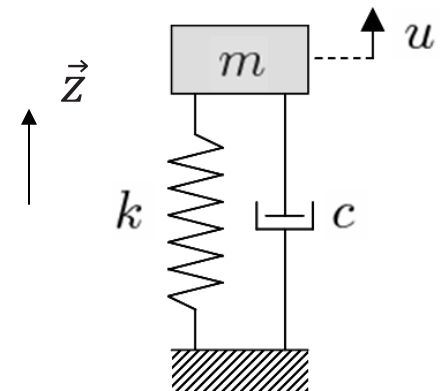
$$F_c = -c\dot{u} \quad \text{avec } c \text{ la constante d'amortissement.}$$

On isole la masse m . BAME :

- ressort : $\vec{F} = -k u \vec{z}$
- amortisseur : $\vec{F}_c = -c \dot{u} \vec{z}$

PFD : $-c\dot{u} - ku = m\ddot{u}$

Equation du mouvement : $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$



Vibrations libres

Cas des systèmes amortis (systèmes dissipatifs)

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$$

Résolution

Equation caractéristique : $mr^2 + cr + k = 0$

Discriminant : $\Delta = c^2 - 4mk$

On pose le taux d'amortissement ζ : $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$

D'où : $\Delta = c^2 - 4mk = 4mk\zeta^2 - 4mk = 4mk(\zeta^2 - 1)$

Il faut envisager 3 cas.

Vibrations libres

Cas des systèmes amortis (systèmes dissipatifs)

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$$

$$\Delta = 4mk(\zeta^2 - 1)$$

1^{er} cas : $\zeta > 1$, donc $\Delta > 0$

$$r = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{\Delta} = -\zeta\omega_0 \pm \sqrt{\frac{k}{m}(\zeta^2 - 1)} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{(\zeta^2 - 1)}$$

$$\text{car } \zeta\omega_0 = \frac{c}{2\sqrt{km}} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{c}{2m}$$

$$\text{D'où : } u = e^{-\zeta\omega_0 t} \left[A e^{-\sqrt{(\zeta^2 - 1)}\omega_0 t} + B e^{\sqrt{(\zeta^2 - 1)}\omega_0 t} \right]$$

Vibrations libres

Cas des systèmes amortis (systèmes dissipatifs)

$$u = e^{-\zeta\omega_0 t} \left[A e^{-\sqrt{(\zeta^2-1)}\omega_0 t} + B e^{\sqrt{(\zeta^2-1)}\omega_0 t} \right]$$

Conditions initiales :

$$u(t=0) = u_0$$
$$\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0$$

Or :

$$\dot{u} = -\zeta\omega_0 e^{-\zeta\omega_0 t} \left[A e^{-\sqrt{(\zeta^2-1)}\omega_0 t} + B e^{\sqrt{(\zeta^2-1)}\omega_0 t} \right]$$
$$+ e^{-\zeta\omega_0 t} \left[-\sqrt{(\zeta^2-1)}\omega_0 A e^{-\sqrt{(\zeta^2-1)}\omega_0 t} + \sqrt{(\zeta^2-1)}\omega_0 B e^{\sqrt{(\zeta^2-1)}\omega_0 t} \right]$$

Donc :

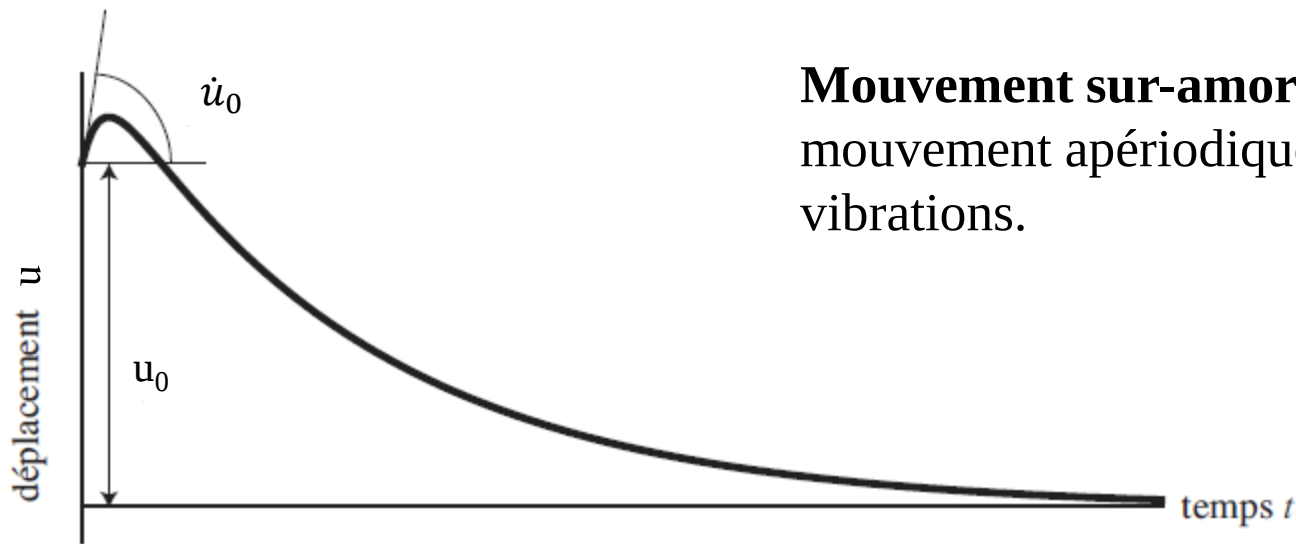
$$\begin{cases} u(t=0) = A + B \\ \dot{u}(t=0) = -\zeta\omega_0(A + B) + \sqrt{(\zeta^2-1)}\omega_0(B - A) \end{cases}$$

Vibrations libres

Cas des systèmes amortis (systèmes dissipatifs)

$$\text{D'où : } A = \frac{u_0 \omega_0 (-\zeta + \sqrt{(\zeta^2 - 1)}) - \dot{u}_0}{2\omega_0 \sqrt{(\zeta^2 - 1)}} \quad \text{et} \quad B = \frac{u_0 \omega_0 (\zeta + \sqrt{(\zeta^2 - 1)}) + \dot{u}_0}{2\omega_0 \sqrt{(\zeta^2 - 1)}}$$

$$\Rightarrow u = e^{-\zeta \omega_0 t} \left[A e^{-\sqrt{(\zeta^2 - 1)} \omega_0 t} + B e^{\sqrt{(\zeta^2 - 1)} \omega_0 t} \right]$$



Mouvement sur-amorti (ou sur-critique) :
mouvement aperiodique, il n'y a pas de vibrations.

Vibrations libres

Cas des systèmes amortis (systèmes dissipatifs)

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$$

$$\Delta = 4mk(\zeta^2 - 1)$$

2^e cas : $\zeta = 1$, donc $\Delta = 0$

$$r = -\frac{c}{2m} = -\zeta\omega_0 = -\omega_0$$

$$\text{D'où : } u = e^{-\omega_0 t}(A + Bt)$$

Vibrations libres

Cas des systèmes amortis (systèmes dissipatifs)

$$u = e^{-\omega_0 t}(A + Bt)$$

Conditions initiales :

$$u(t = 0) = u_0$$
$$\dot{u}(t = 0) = \dot{u}_0$$

Or :

$$\dot{u} = -\omega_0 e^{-\omega_0 t}(A + Bt) + B e^{-\omega_0 t}$$

Donc :

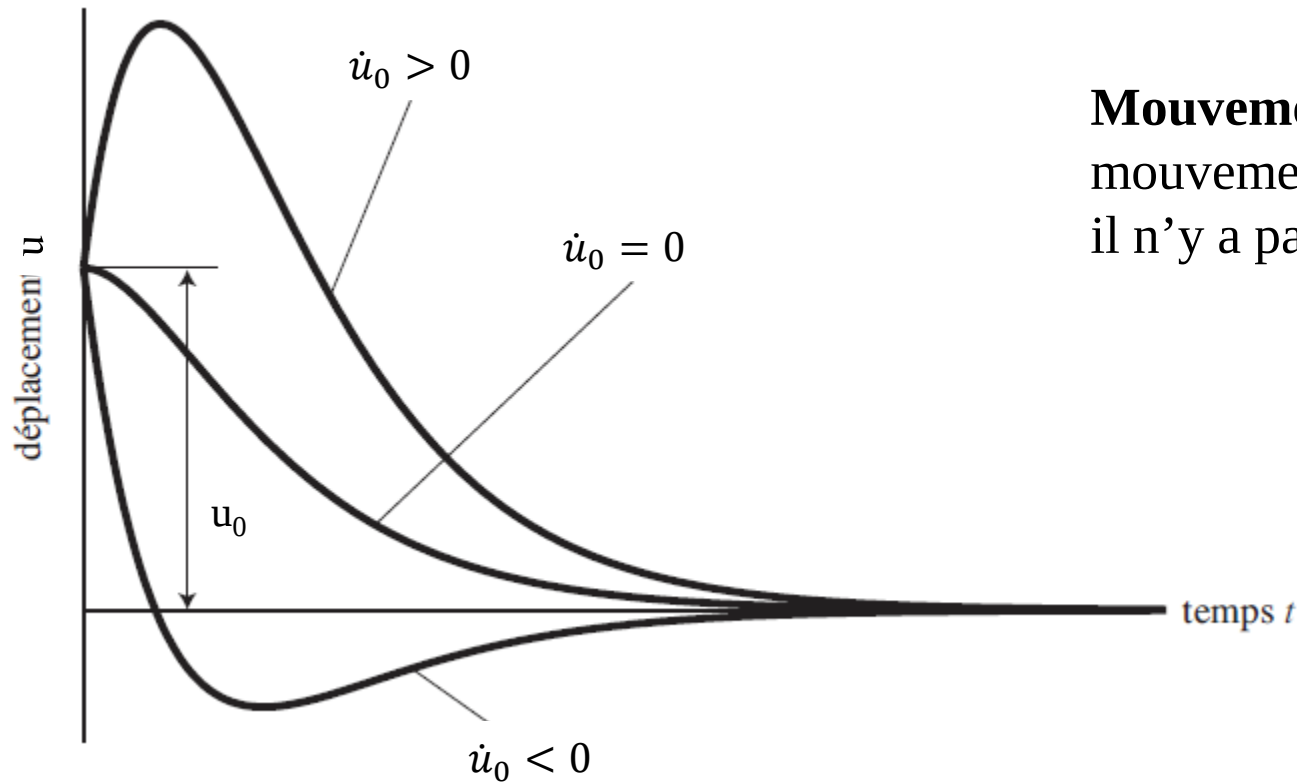
$$\begin{cases} u(t = 0) = A \\ \dot{u}(t = 0) = -\omega_0 A + B \end{cases}$$

D'où : $A = u_0$ et $B = \dot{u}_0 + \omega_0 u_0$

Vibrations libres

Cas des systèmes amortis (systèmes dissipatifs)

$$u = e^{-\omega_0 t} [u_0 + (\dot{u}_0 + \omega_0 u_0)t]$$



Mouvement critique :
mouvement apériodique,
il n'y a pas de vibrations

Vibrations libres

Cas des systèmes amortis (systèmes dissipatifs)

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$$

$$\Delta = 4mk(\zeta^2 - 1) = 4mki^2(1 - \zeta^2)$$

3^e cas : $\zeta < 1$, donc $\Delta < 0$

$$r = -\frac{c}{2m} \pm \frac{i}{2m} \sqrt{-\Delta} = -\zeta\omega_0 \pm i \sqrt{\frac{k}{m}(1 - \zeta^2)} = -\zeta\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{(1 - \zeta^2)}$$

On note $\omega_d = \omega_0\sqrt{(1 - \zeta^2)}$ la pulsation propre apparente du système amorti.

Donc $r = -\zeta\omega_0 \pm i\omega_d$ et :

$$\begin{aligned} u &= Ce^{(-\zeta\omega_0 + i\omega_d)t} + De^{(-\zeta\omega_0 - i\omega_d)t} = e^{-\zeta\omega_0 t} [Ce^{i\omega_d t} + De^{-i\omega_d t}] \\ &= e^{-\zeta\omega_0 t} [A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)] \end{aligned}$$

Vibrations libres

Cas des systèmes amortis (systèmes dissipatifs)

$$u = e^{-\zeta\omega_0 t} [A \cos(\omega_d t) + B \sin(\omega_d t)]$$

Conditions initiales :

$$u(t = 0) = u_0$$
$$\dot{u}(t = 0) = \dot{u}_0$$

Or :

$$\dot{u} = -\zeta\omega_0 e^{-\zeta\omega_0 t} [A \cos(\omega_d t) + B \sin(\omega_d t)] + e^{-\zeta\omega_0 t} [-A\omega_d \sin(\omega_d t) + B\omega_d \cos(\omega_d t)]$$

Donc :

$$\begin{cases} u(t = 0) = A \\ \dot{u}(t = 0) = -\zeta\omega_0 A + B\omega_d \end{cases}$$

D'où : $A = u_0$ et $B = \frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_0 A}{\omega_d} = \frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_0 u_0}{\omega_d}$

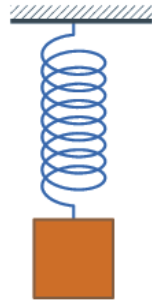
Vibrations libres

Cas des systèmes amortis (systèmes dissipatifs)

$$u = e^{-\zeta\omega_0 t} \left[u_0 \cos(\omega_d t) + \left(\frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_0 u_0}{\omega_d} \right) \sin(\omega_d t) \right]$$

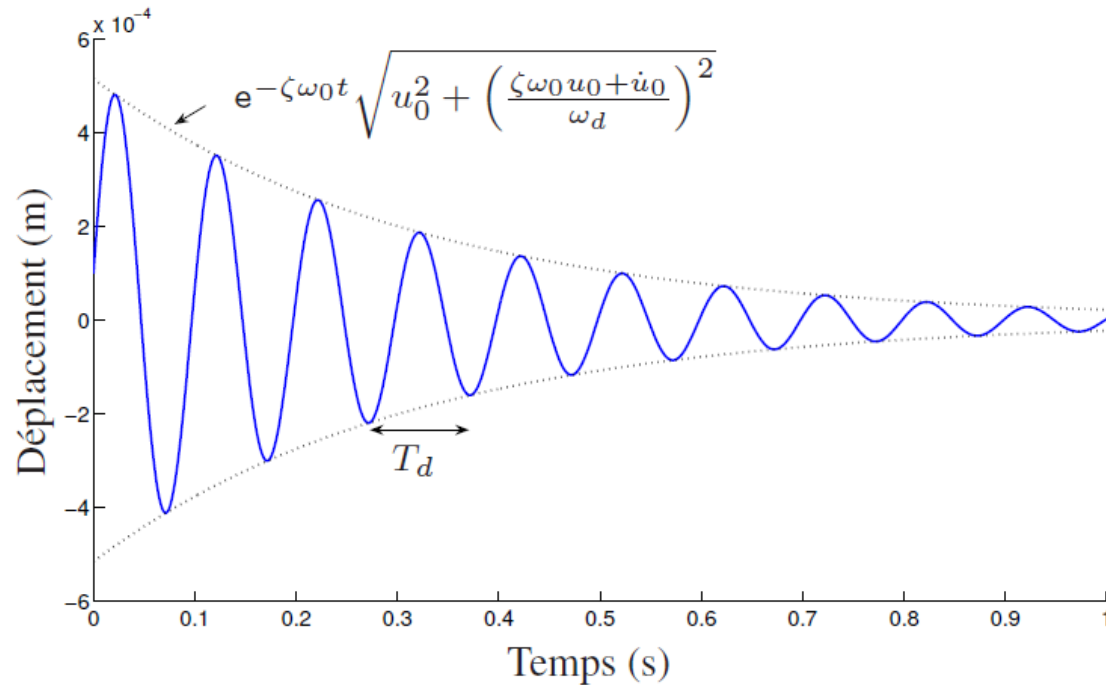
Mouvement périodique (période T_d), décroissance exponentielle de l'amplitude des oscillations harmoniques (mouvement sous-amorti).

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$



Amplitude :

$$|u|_{max} = e^{-\zeta\omega_0 t} \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\zeta\omega_0 u_0 + \dot{u}_0}{\omega_d} \right)^2}$$



Vibrations libres

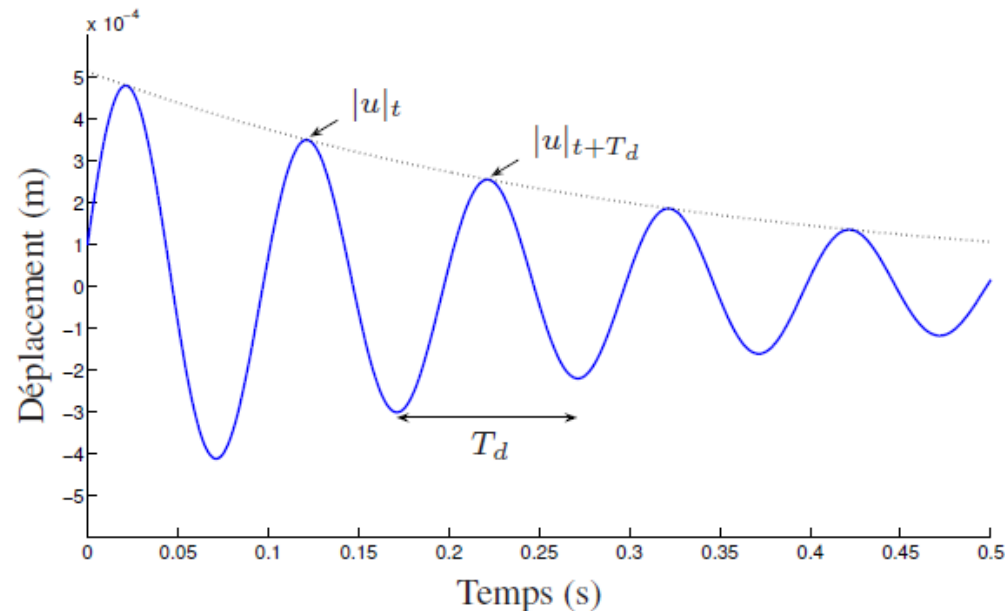
Cas des systèmes amortis (systèmes dissipatifs)

Méthode du décrément logarithmique : détermination du taux d'amortissement ζ .

Variation d'amplitude de vibrations entre 2 instants t et $t + nT_d$, séparées par n périodes T_d :

$$\frac{|u|_{t+nT_d}}{|u|_t} = \frac{e^{-\zeta\omega_0(t+nT_d)}}{e^{-\zeta\omega_0 t}} = e^{-\zeta\omega_0 nT_d}$$

$$\text{D'où : } \zeta = \frac{1}{\omega_0 nT_d} \ln \left(\frac{|u|_t}{|u|_{t+nT_d}} \right)$$



Introduction

Systèmes à 1 degré de liberté

Vibrations libres

Réponse forcée harmonique

Systèmes à plusieurs degrés de liberté

Systèmes à 2 degrés de liberté

Systèmes à n degrés de liberté

Systèmes élastiques continus

Vibrations longitudinales de barres

Vibrations transversales des poutres

Vibrations de plaques/coques

Conception d'une structure vibrante

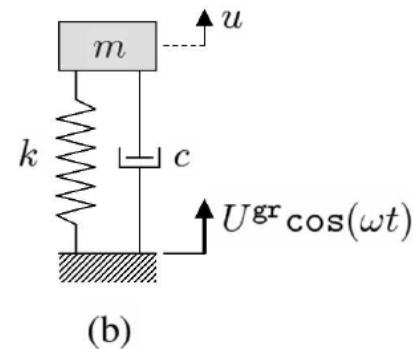
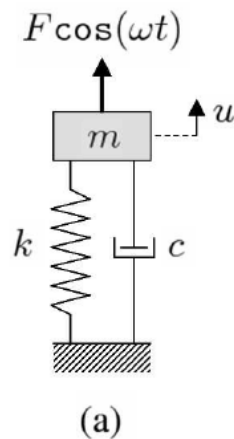
Vibrations forcées harmoniques

Etude du mouvement d'oscillation d'un système masse-ressort (m, k) ou masse-ressort-amortisseur (m, k, c) soumis à une excitation de la forme $A\cos(\omega t)$, avec A l'amplitude de l'excitation et ω la pulsation d'excitation.

Vibrations harmoniques : l'excitation est une fonction sinusoïdale du temps.

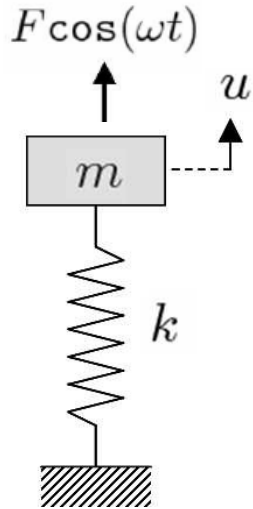
2 cas d'excitation :

- force appliquée à la masse (a) (ex : moteur en fonctionnement sur supports élastiques),
- mouvement imposé au support (b) (ex : bâtiment soumis à un séisme).



Vibrations forcées harmoniques

Force imposée (systèmes non dissipatifs)



Force imposée d'intensité $f = F \cos(\omega t)$.

PFD :
$$m\ddot{u} + ku = F \cos(\omega t)$$

Solution générale = solution de l'équation homogène + solution particulière

Solution de l'équation homogène : vue en vibrations libres.

Solution particulière de la forme : $U \cos(\omega t)$

Vibrations forcées harmoniques

Force imposée (systèmes non dissipatifs)

$$m\ddot{u} + ku = F\cos(\omega t) \quad \text{avec} \quad u = U\cos(\omega t)$$

Donc : $-m\omega^2 U\cos(\omega t) + kU\cos(\omega t) = F\cos(\omega t)$

$$\Rightarrow U = \frac{F}{k - m\omega^2} = \frac{F/k}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Solution particulière : $u = \frac{F/k}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \cos(\omega t)$

Solution générale : $u = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \frac{F/k}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \cos(\omega t)$

Vibrations forcées harmoniques

Force imposée (systèmes non dissipatifs)

$$u = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \frac{F/k}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \cos(\omega t)$$

Conditions initiales :

$$u(t = 0) = u_0$$
$$\dot{u}(t = 0) = \dot{u}_0$$

Or :

$$\dot{u} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t) + \omega_0 B \cos(\omega_0 t) - \frac{F/k \omega}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \sin(\omega t)$$

Donc :

$$\begin{cases} u(t = 0) = A + \frac{F/k}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \\ \dot{u}(t = 0) = \omega_0 B \end{cases}$$

D'où :

$$A = u_0 - \frac{F/k}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad \text{et} \quad B = \frac{\dot{u}_0}{\omega_0}$$

Vibrations forcées harmoniques

Force imposée (systèmes non dissipatifs)

Solution complète :

$$u = \left(u_0 - \frac{F/k}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \right) \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{u}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{F/k}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \cos(\omega t)$$

Le système vibre à 2 fréquences : sa fréquence naturelle ω_0 et à la fréquence d'excitation ω .

En réalité, l'amortissement est non nul, donc le terme correspondant aux vibrations libres (solution de l'équation homogène) disparaît au bout d'un certain temps. On ne s'intéresse donc qu'au régime établi (stationnaire), correspondant à l'excitation extérieure :

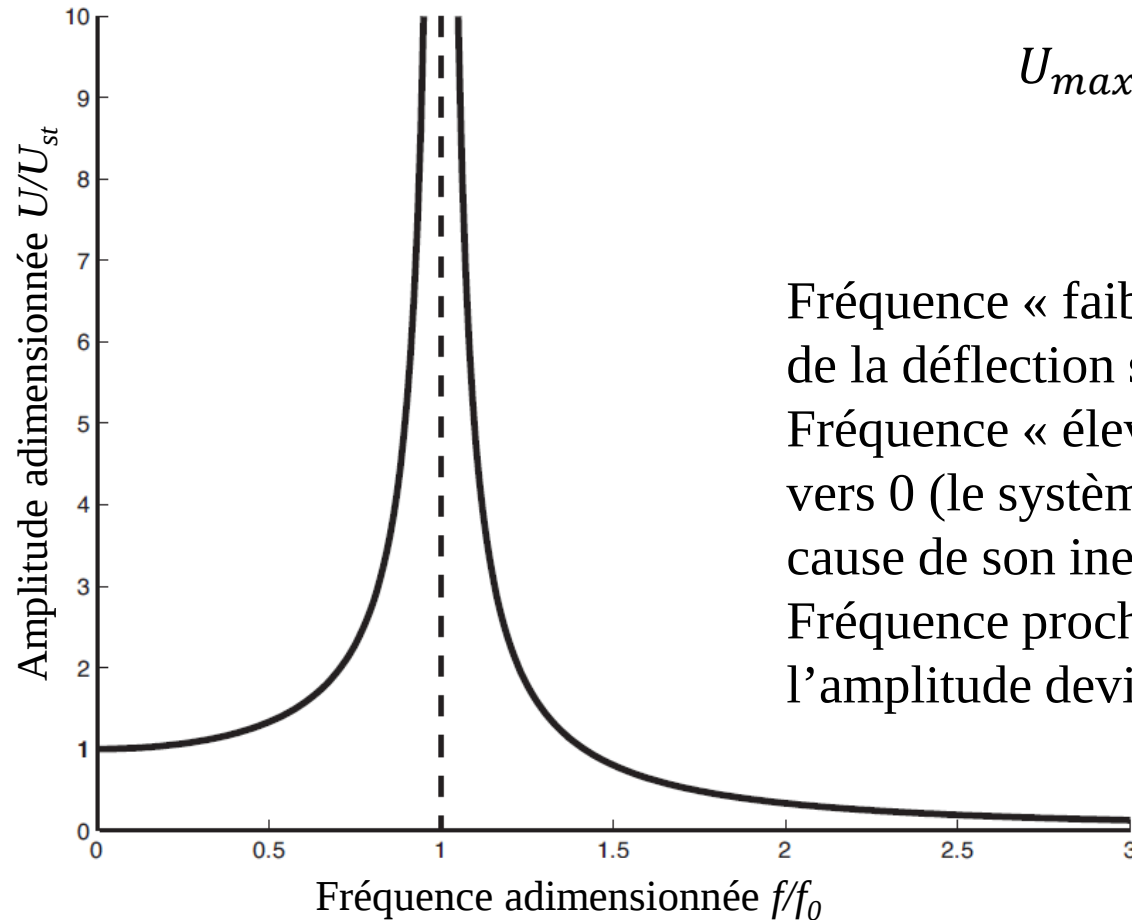
$$u = U \cos(\omega t) = \frac{F/k}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \cos(\omega t) = \frac{U_{st}}{1 - \left(\frac{f}{f_0} \right)^2} \cos(\omega t)$$

On note : $U_{st} = F/k$ la réponse statique du système ($\omega=0$)

Vibrations forcées harmoniques

Force imposée (systèmes non dissipatifs)

Amplitude de la réponse en fonction de la fréquence (diagramme de gain)



$$U_{max} = \frac{U_{st}}{\left| 1 - \left(\frac{f}{f_0} \right)^2 \right|}$$

Fréquence « faible » ($f \ll f_0$) : amplitude proche de la déflexion statique.

Fréquence « élevée » ($f \gg f_0$) : amplitude tend vers 0 (le système n'a pas le temps de répondre à cause de son inertie).

Fréquence proche de la fréquence propre : l'amplitude devient infinie (résonance)

Vibrations forcées harmoniques

Force imposée (systèmes non dissipatifs)



Vibrations forcées harmoniques

Force imposée (systèmes non dissipatifs)

Remarque

Fréquence propre :

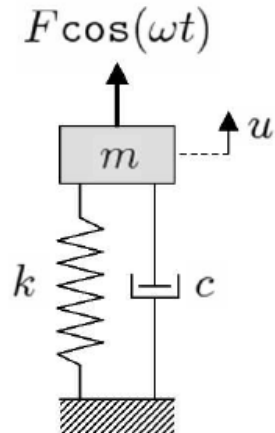
$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

La fréquence de résonance est d'autant plus élevée que :

- la masse m est faible,
- la rigidité k est élevée

Vibrations forcées harmoniques

Force imposée (systèmes dissipatifs)



Force imposée d'intensité $f = F \cos(\omega t)$.

PFD :
$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F \cos(\omega t)$$

Solution générale = solution de l'équation homogène + solution particulière

Solution de l'équation homogène : vue en vibrations libres.

Solution particulière de la forme $U \cos(\omega t)$ ne convient pas.

Solution particulière de la forme : $U \cos(\omega t) + V \sin(\omega t)$ ou $U \cos(\omega t - \varphi)$
(le terme d'amortissement introduit un déphasage entre l'excitation et la réponse).

Nombres complexes

$$X = a + ib = \beta e^{i\varphi}$$

$$a = \operatorname{Re}(X)$$

$$b = \operatorname{Im}(X)$$

avec : $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

β : module

φ : argument

$$\beta = |X| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = \arg(X) \quad \text{avec} \quad \tan\varphi = \frac{b}{a}$$

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

Vibrations forcées harmoniques

Force imposée (systèmes dissipatifs)

Plus facile à résoudre dans le plan complexe, en prenant la partie réelle des grandeurs complexes. On cherche la réponse à l'excitation complexe $Fe^{i\omega t}$, avec $F\cos(\omega t) = \text{Re}(Fe^{i\omega t})$.

Equation du mouvement : $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = Fe^{i\omega t}$

Solution particulière de la forme : $u = Ue^{i\omega t}$ (U représente l'amplitude complexe du mouvement). En remplaçant dans l'équation du mouvement :

$$-m\omega^2 Ue^{i\omega t} + ic\omega Ue^{i\omega t} + kUe^{i\omega t} = Fe^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow (-m\omega^2 + ic\omega + k)U = F$$

$$\Rightarrow \left(-\omega^2 + \frac{ic\omega}{m} + \frac{k}{m}\right)U = \frac{F}{m}$$

$$\Rightarrow (-\omega^2 + 2i\zeta\omega_0\omega + \omega_0^2)U = \frac{F}{m}$$

Vibrations forcées harmoniques

Force imposée (systèmes dissipatifs)

$$U = \frac{F}{m(-\omega^2 + 2i\zeta\omega_0\omega + \omega_0^2)} = \frac{F/k}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2i\zeta\frac{\omega}{\omega_0}} = A_\omega U_{st}$$

avec : $U_{st} = F/k$ la réponse statique du système ($\omega=0$)
 A_ω : l'amplification dynamique du système

$$A_\omega = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2i\zeta\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 2i\zeta\frac{\omega}{\omega_0}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

On pose :

$$A_\omega = \beta e^{-i\varphi}$$

avec β le module de A_ω (coefficient d'amplification dynamique) et $-\varphi$ l'argument

Vibrations forcées harmoniques

Force imposée (systèmes dissipatifs)

D'où :

$$\begin{aligned}\beta = |A_\omega| &= \frac{\sqrt{\left[\frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right]^2 + \left[\frac{-2\zeta \frac{\omega}{\omega_0}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right]^2}}{1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \quad \text{et} \quad \tan\varphi = \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\end{aligned}$$

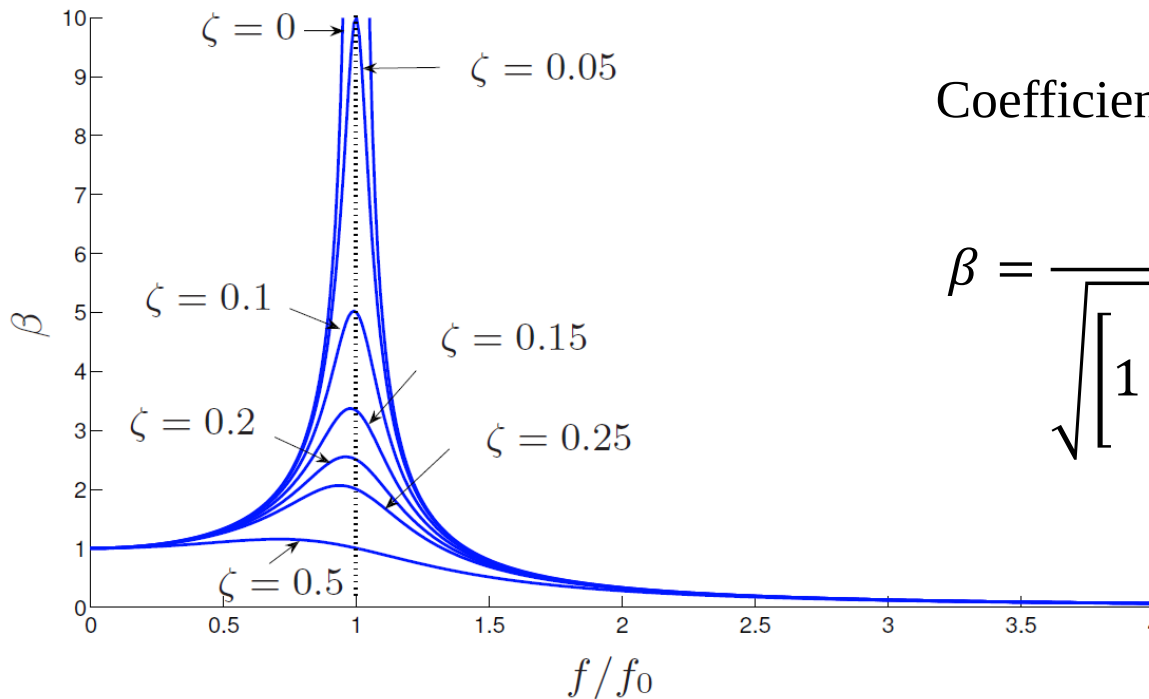
On a alors :

$$u = U e^{i\omega t} = A_\omega U_{st} e^{i\omega t} = \frac{F}{k} \beta e^{-i\varphi} e^{i\omega t} = \frac{F}{k} \beta e^{i(\omega t - \varphi)}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(u) = \frac{F}{k} \beta \cos(\omega t - \varphi)$$

Vibrations forcées harmoniques

Force imposée (systèmes dissipatifs)



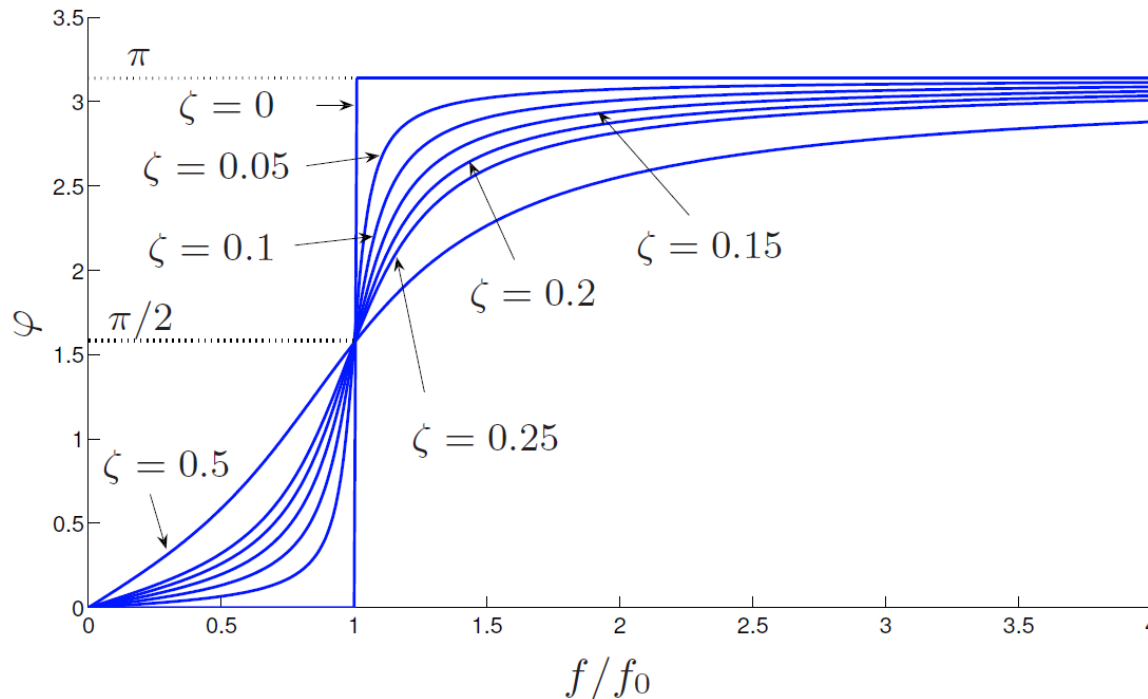
Coefficient d'amplification dynamique :

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

Maximum au voisinage de la fréquence propre f_0 : phénomène de résonance.
Plus l'amortissement est faible, plus l'amplitude de ce maximum est forte.
Lorsque f/f_0 tend vers 0, l'amplitude de la réponse tend vers la réponse statique.
Lorsque f/f_0 tend vers l'infini, l'amplitude de la réponse tend vers 0.

Vibrations forcées harmoniques

Force imposée (systèmes dissipatifs)



Déphasage :

$$\tan \varphi = \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Le déphasage varie de 0 (réponse et excitation en phase) à π (réponse et excitation en opposition de phase).

Variation d'autant plus brusque que le taux d'amortissement est faible.

Lorsque $f=f_0$, les signaux sont en quadrature de phase.

Vibrations forcées harmoniques

Force imposée (systèmes dissipatifs)

On définit la fréquence de résonance f_0^{re} comme la fréquence d'excitation qui correspond à la valeur maximale de u , donc le maximum du coefficient d'amplification dynamique β .

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

β est maximum pour $\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ minimum.

On pose : $X = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \left(\frac{f}{f_0}\right)^2$ et $g = (1 - X)^2 + 4\zeta^2 X$

Donc : $\frac{dg}{dX} = -2(1 - X) + 4\zeta^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad X = 1 - 2\zeta^2$

Vibrations forcées harmoniques

Force imposée (systèmes dissipatifs)

Donc : $\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{X} = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ c'est-à-dire $f_0^{re} = f_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2}$

Lorsque l'amortissement est non nul, la fréquence de résonance ne correspond pas exactement à la fréquence propre.

Le maximum de β est alors :

$$\begin{aligned}\beta_{max} &= \frac{1}{\sqrt{(1-X)^2 + 4\zeta^2 X}} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (1 - 2\zeta^2)]^2 + 4\zeta^2(1 - 2\zeta^2)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\zeta^4 + 4\zeta^2 - 8\zeta^4}} = \frac{1}{\sqrt{4\zeta^2 - 4\zeta^4}} \\ &= \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}\end{aligned}$$

Vibrations forcées harmoniques

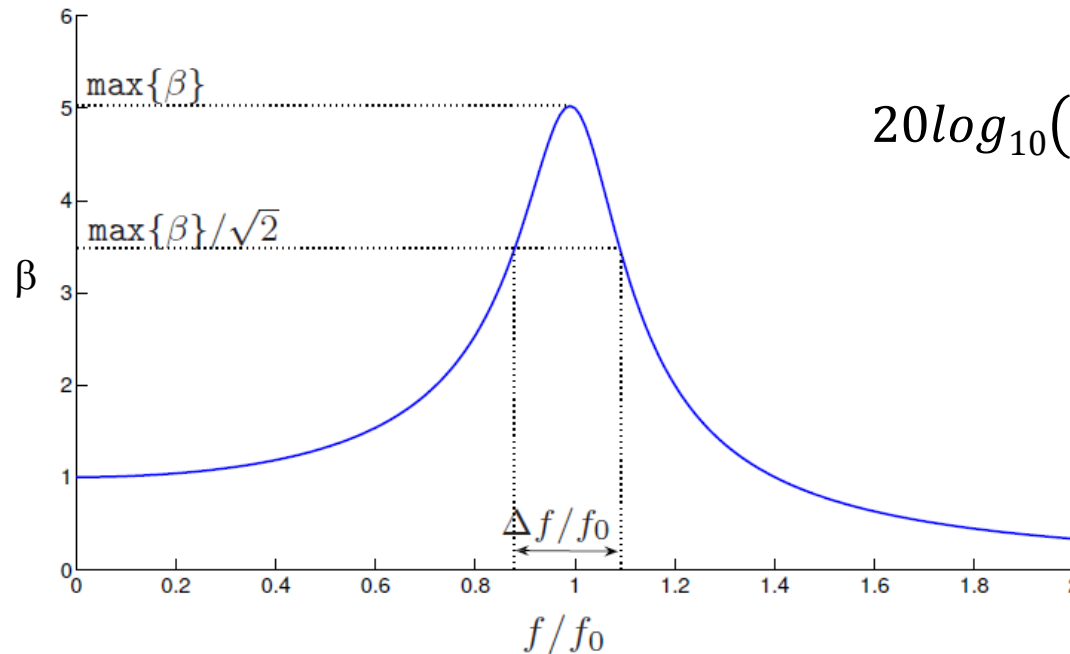
Force imposée (systèmes dissipatifs)



Vibrations forcées harmoniques

Force imposée (systèmes dissipatifs)

Méthode de la largeur de bande à -3dB (détermination du taux d'amortissement)



$$20\log_{10}(1/\sqrt{2}) = -3dB$$

On cherche les valeurs des 2 fréquences pour lesquelles β est égal au maximum de β divisé par $\sqrt{2}$.

Vibrations forcées harmoniques

Force imposée (systèmes dissipatifs)

Elles correspondent à :

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{[1 - X]^2 + 4\zeta^2 X}} = \frac{\beta_{max}}{\sqrt{2}} \quad \text{avec} \quad \beta_{max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$\longrightarrow [1 - X]^2 + 4\zeta^2 X = \frac{2}{\beta_{max}^2} = 8\zeta^2(1 - \zeta^2)$$

$$\longrightarrow 1 - 2X + X^2 + 4\zeta^2 X = 8\zeta^2(1 - \zeta^2)$$

$$\longrightarrow X^2 + 2(2\zeta^2 - 1)X + 1 - 8\zeta^2(1 - \zeta^2) = 0$$

Calcul du discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= 4(2\zeta^2 - 1)^2 - 4[1 - 8\zeta^2(1 - \zeta^2)] = 16\zeta^4 - 16\zeta^2 + 4 - 4 + 32\zeta^2 - 32\zeta^4 \\ &= 16\zeta^2 - 16\zeta^4 = 16\zeta^2(1 - \zeta^2) \end{aligned}$$

Vibrations forcées harmoniques

Force imposée (systèmes dissipatifs)

$$X^2 + 2(2\zeta^2 - 1)X + 1 - 8\zeta^2(1 - \zeta^2) = 0 \quad \text{avec} \quad X = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \left(\frac{f}{f_0}\right)^2$$

$$\Delta = 16\zeta^2(1 - \zeta^2)$$

Les racines sont : $X = 1 - 2\zeta^2 \pm 2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}$

En supposant que $\zeta \ll 1$: $X \approx 1 \pm 2\zeta \quad \longrightarrow \quad \sqrt{X} \approx 1 \pm \zeta$

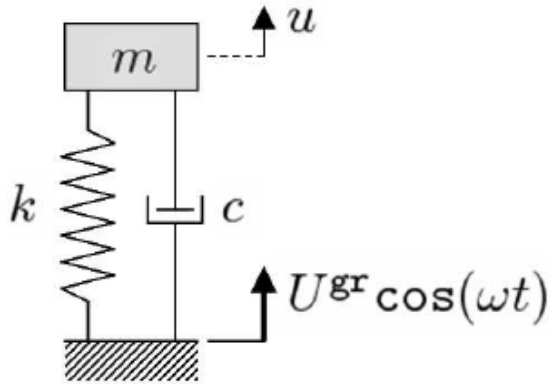
D'où : $\frac{f}{f_0} \approx 1 \pm \zeta \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} f_1 \approx f_0(1 - \zeta) \\ f_2 \approx f_0(1 + \zeta) \end{cases}$

On en déduit : $\Delta f = f_2 - f_1 \approx 2\zeta f_0$

Et enfin le taux d'amortissement : $\zeta \approx \frac{\Delta f}{2f_0}$

Vibrations forcées harmoniques

Mouvement du support



On isole la masse m . BAME :

- ressort : $\vec{F} = -k(u - u^{gr})\vec{z}$
- amortisseur : $\vec{R} = -c(\dot{u} - \dot{u}^{gr})\vec{z}$

PFD sur $\vec{z}$:

$$-c(\dot{u} - \dot{u}^{gr}) - k(u - u^{gr}) = m\ddot{u}$$

$$\Rightarrow m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = c\dot{u}^{gr} + ku^{gr}$$

$$u^{gr} = U^{gr} \cos(\omega t)$$

On se place dans le référentiel du support en mouvement. Déplacement relatif :

$$u^* = u - u^{gr} \quad \Rightarrow \quad -c\dot{u}^* - ku^* = m(\ddot{u}^* + \ddot{u}^{gr})$$

$$\Rightarrow \boxed{m\ddot{u}^* + c\dot{u}^* + ku^* = -m\ddot{u}^{gr}}$$

Revient à considérer un système avec base fixe, pour lequel la masse subie une force « d'inertie » induite par l'accélération $\ddot{u}^{gr}$.

Vibrations forcées harmoniques

Mouvement du support

Résolution d'une manière analogue à celle d'une excitation par force imposée.
La solution stationnaire s'obtient en raisonnant dans le plan complexe avec :

$$u^{gr} = U^{gr} e^{i\omega t} \quad \text{et} \quad m\ddot{u}^* + c\dot{u}^* + ku^* = m\omega^2 U^{gr} e^{i\omega t}$$

Solution stationnaire choisie de la forme : $u^* = U^* e^{i\omega t}$

où U^* représente l'amplitude complexe du déplacement relatif :

$$-m\omega^2 U^* e^{i\omega t} + ic\omega U^* e^{i\omega t} + kU^* e^{i\omega t} = m\omega^2 U^{gr} e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow (-m\omega^2 + ic\omega + k)U^* = m\omega^2 U^{gr}$$

$$\Rightarrow U^* = \frac{(\omega/\omega_0)^2 U^{gr}}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + 2i\zeta(\omega/\omega_0)} = A_\omega^* U^{gr}$$

$$\text{avec : } A_\omega^* = \frac{(\omega/\omega_0)^2}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + 2i\zeta(\omega/\omega_0)} = \frac{(\omega/\omega_0)^2 (1 - (\omega/\omega_0)^2 - 2i\zeta(\omega/\omega_0))}{[1 - (\omega/\omega_0)^2]^2 + 4\zeta^2(\omega/\omega_0)^2}$$

Vibrations forcées harmoniques

Mouvement du support

Coefficient d'amplification dynamique β^* (module de A_ω^*) :

$$\begin{aligned}\beta^* = |A_\omega^*| &= \sqrt{\left[\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right]^2 + \left[\frac{-2\zeta \frac{\omega}{\omega_0} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right]^2} \\ &= \frac{(\omega/\omega_0)^2}{\sqrt{(1 - (\omega/\omega_0)^2)^2 + 4\zeta^2 (\omega/\omega_0)^2}} = \beta (\omega/\omega_0)^2\end{aligned}$$

Déphasage φ^* :

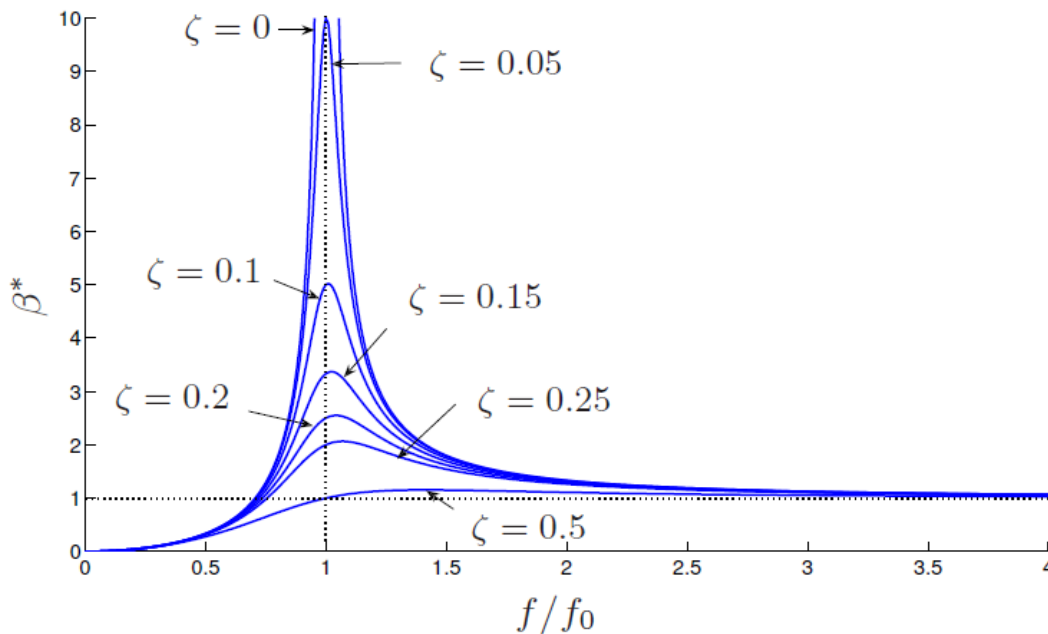
$$\tan \varphi^* = \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \tan \varphi$$

Vibrations forcées harmoniques

Mouvement du support

Le déphasage φ^* qui en résulte est identique à celui d'une excitation par force imposée ($\varphi^* = \varphi$). Le coefficient d'amplification dynamique β^* est différent :

$$\beta^* = \frac{(\omega/\omega_0)^2}{\sqrt{(1 - (\omega/\omega_0)^2)^2 + 4\zeta^2(\omega/\omega_0)^2}}$$



Le maximum de β^* correspond à la fréquence de résonance :

$$f_0^{re} = \frac{f_0}{\sqrt{1 - 2\zeta^2}}$$

Introduction

Systèmes à 1 degré de liberté

Vibrations libres

Réponse forcée harmonique

Systèmes à plusieurs degrés de liberté

Systèmes à 2 degrés de liberté

Systèmes à n degrés de liberté

Systèmes élastiques continus

Vibrations longitudinales de barres

Vibrations transversales des poutres

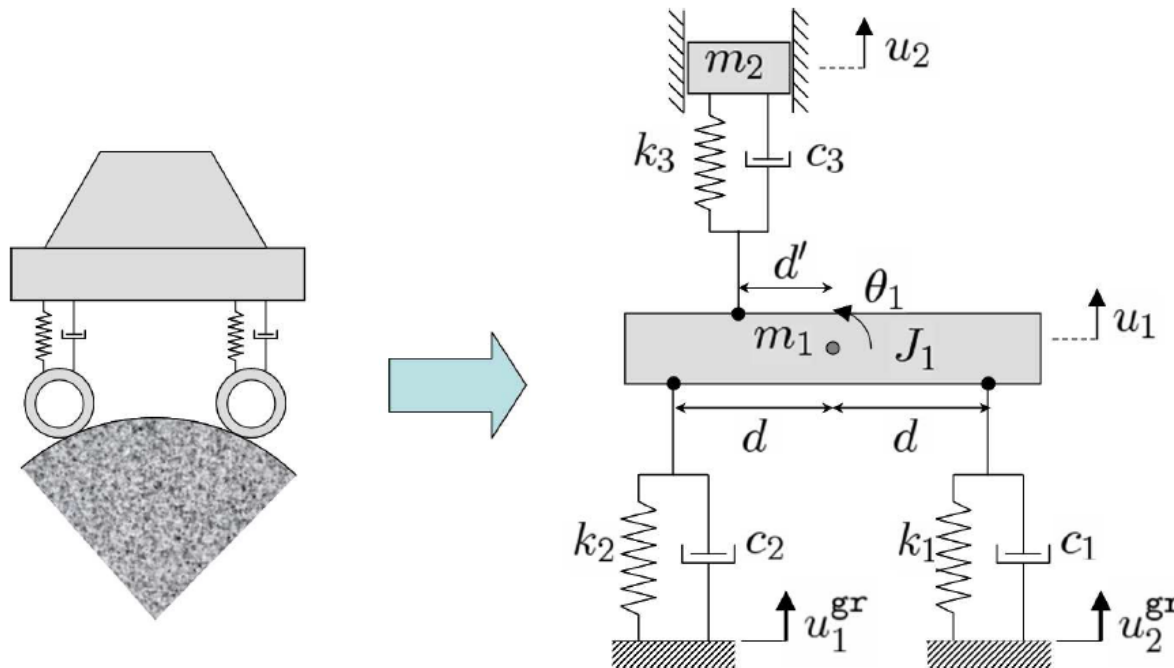
Vibrations de plaques/coques

Conception d'une structure vibrante

Systèmes à plusieurs degrés de liberté

Les systèmes mécaniques industriels peuvent être approchés par des systèmes discrets à plusieurs degrés de liberté.

Les vibrations d'une automobile peuvent être appréhendées sur la base de systèmes masses-ressorts-amortisseurs couplés via des phénomènes de rotation :



Introduction

Systèmes à 1 degré de liberté

Vibrations libres

Réponse forcée harmonique

Systèmes à plusieurs degrés de liberté

Systèmes à 2 degrés de liberté

Systèmes à n degrés de liberté

Systèmes élastiques continus

Vibrations longitudinales de barres

Vibrations transversales des poutres

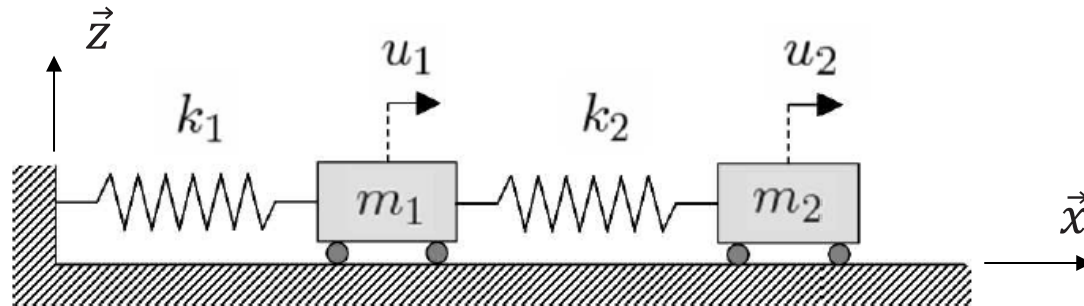
Vibrations de plaques/coques

Conception d'une structure vibrante

Systèmes à 2 degrés de liberté

Vibrations libres

Exemple : système 2 masses et 2 ressorts



On isole m_1 :

- ressort 1 : $\vec{F}_1 = -k_1 u_1 \vec{x}$
- ressort 2 : $\vec{F}_2 = k_2 (u_2 - u_1) \vec{x}$
- sol : $\vec{R}_1 = R_1 \vec{z}$
- poids : $P_1 = -m_1 g \vec{z}$

PFD en projection sur $\vec{x}$: $-k_1 u_1 + k_2 (u_2 - u_1) = m_1 \ddot{u}_1$

Systèmes à 2 degrés de liberté

Vibrations libres

On isole m_2 :

- ressort 2 : $\vec{F}_2 = -k_2(u_2 - u_1)\vec{x}$
- sol : $\vec{R}_2 = R_2\vec{z}$
- poids : $\vec{P}_2 = -m_2g\vec{z}$

PFD en projection sur $\vec{x}$: $-k_2(u_2 - u_1) = m_2\ddot{u}_2$

D'où :

$$\begin{cases} m_1\ddot{u}_1 + (k_1 + k_2)u_1 - k_2u_2 = 0 \\ m_2\ddot{u}_2 + k_2u_2 - k_2u_1 = 0 \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}}_{[M]} \begin{pmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix}}_{[K]} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad [M][\ddot{U}] + [K][U] = [0]$$

Matrice de masse

Matrice de rigidité (ou raideur)

Matrices symétriques

Systèmes à 2 degrés de liberté

Vibrations libres

Solution cherchée sous la forme : $[U] = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = [X]\cos(\omega t)$

$[X]$ est l'amplitude des oscillations, ω est la pulsation des oscillations

En injectant cette forme de solution dans l'équation matricielle, on obtient :

$$[M][\ddot{U}] + [K][U] = [0] \quad \Longrightarrow \quad ([K] - \omega^2[M])[X] = [0]$$

Solution triviale : $[X] = [0]$

Autre solution si les 2 équations sont redondantes (déterminant de $[K] - \omega^2[M]$ est nul) : problème aux valeurs propres.

$$\det([K] - \omega^2[M]) = \begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2\omega^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - k_2^2 \\ &= m_1m_2\omega^4 - (m_2k_1 + m_2k_2 + m_1k_2)\omega^2 + k_1k_2 \end{aligned}$$

Systèmes à 2 degrés de liberté

Vibrations libres

$$m_1 m_2 \omega^4 - (m_2 k_1 + m_2 k_2 + m_1 k_2) \omega^2 + k_1 k_2 = 0$$

$$\Delta = (m_2 k_1 + m_2 k_2 + m_1 k_2)^2 - 4 m_1 m_2 k_1 k_2$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{(m_2 k_1 + m_2 k_2 + m_1 k_2) \pm \sqrt{(m_2 k_1 + m_2 k_2 + m_1 k_2)^2 - 4 m_1 m_2 k_1 k_2}}{2 m_1 m_2}$$

Vecteurs propres $[X]$: $([K] - \omega^2 [M])[X] = [0]$

On note : $[X] = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 \omega^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Systèmes à 2 degrés de liberté

Vibrations libres

Les 2 équations étant liées, on peut choisir $y = 1$.

$$\longrightarrow -k_2 x + (k_2 - m_2 \omega^2) y = 0$$

$$\longrightarrow x = 1 - \omega^2 \frac{m_2}{k_2}$$

D'où l'expression des 2 vecteurs propres :

$$[X]_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 - \omega_{1,2}^2 m_2 / k_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vecteurs propres définis à une constante près.

Modes de vibration : ensemble des doublets $\{\omega_j, [X]_j\}_{j=1,2}$

ω_j pulsation propre, $[X]_j$ forme propre (vecteur propre)

Systèmes à 2 degrés de liberté

Vibrations libres

D'où l'expression des déplacements (combinaison linéaire des 2 modes) :

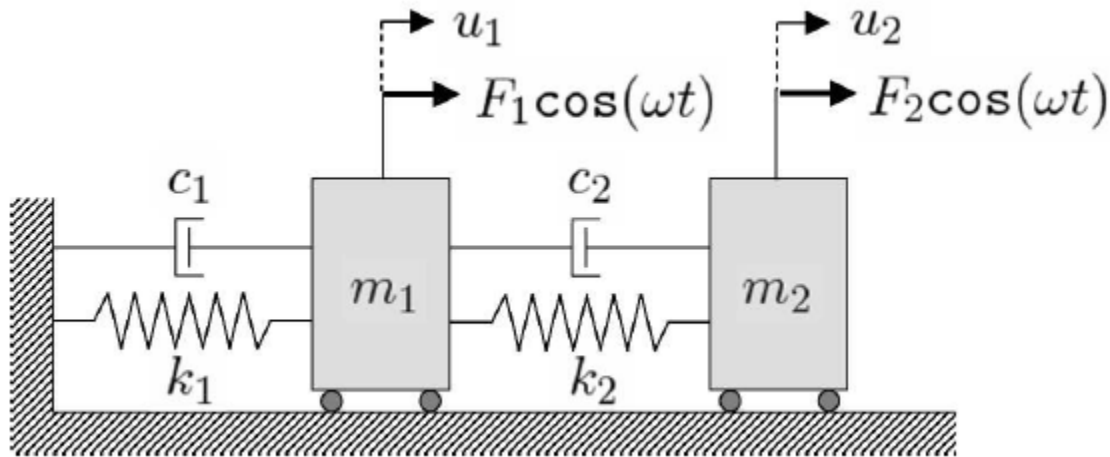
$$[U] = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = A[X]_1 \cos(\omega_1 t) + B[X]_2 \cos(\omega_2 t)$$

$$\longrightarrow \begin{cases} u_1 = A(1 - \omega_1^2 m_2 / k_2) \cos(\omega_1 t) + B(1 - \omega_2^2 m_2 / k_2) \cos(\omega_2 t) \\ u_2 = A \cos(\omega_1 t) + B \cos(\omega_2 t) \end{cases}$$

A et B sont déterminées par les conditions initiales.

Systèmes à 2 degrés de liberté

Réponse forcée harmonique



On isole m_1 . PFD :

$$-k_1 u_1 + k_2(u_2 - u_1) - c_1 \dot{u}_1 + c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + F_1 \cos(\omega t) = m_1 \ddot{u}_1$$

On isole m_2 . PFD : $-k_2(u_2 - u_1) - c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + F_2 \cos(\omega t) = m_2 \ddot{u}_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 \ddot{u}_1 + k_1 u_1 - k_2(u_2 - u_1) + c_1 \dot{u}_1 - c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) = F_1 \cos(\omega t) \\ m_2 \ddot{u}_2 + k_2(u_2 - u_1) + c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) = F_2 \cos(\omega t) \end{cases}$$

Systèmes à 2 degrés de liberté

Réponse forcée harmonique

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 \ddot{u}_1 + (c_1 + c_2) \dot{u}_1 - c_2 \dot{u}_2 + (k_1 + k_2) u_1 - k_2 u_2 = F_1 \cos(\omega t) \\ m_2 \ddot{u}_2 - c_2 \dot{u}_1 + c_2 \dot{u}_2 - k_2 u_1 + k_2 u_2 = F_2 \cos(\omega t) \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \cos(\omega t)$$

De forme générale :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix}}_{[M]} \begin{pmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix}}_{[C]} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{pmatrix}}_{[K]} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

Matrice de masse

Matrice
d'amortissement

Matrice de raideur

Systèmes à 2 degrés de liberté

Réponse forcée harmonique

Solution stationnaire recherchée sous la forme : $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$

U_1 et U_2 : amplitudes complexes des déplacements pour les 2 masses.

En injectant dans l'équation précédente :

$$\begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega^2 U_1 \\ -\omega^2 U_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t} + \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\omega U_1 \\ i\omega U_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t} + \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -\omega^2 M_{11} + i\omega C_{11} + K_{11} & i\omega C_{12} + K_{12} \\ i\omega C_{21} + K_{21} & -\omega^2 M_{22} + i\omega C_{22} + K_{22} \end{pmatrix}}_{[D]} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

$[D]$: matrice de rigidité dynamique dépendante de la fréquence

$$[D] = -\omega^2 [M] + i\omega [C] + [K]$$

Systèmes à 2 degrés de liberté

Réponse forcée harmonique

$$\begin{cases} (-\omega^2 M_{11} + i\omega C_{11} + K_{11})U_1 + (i\omega C_{12} + K_{12})U_2 = F_1 \\ (i\omega C_{21} + K_{21})U_1 + (-\omega^2 M_{22} + i\omega C_{22} + K_{22})U_2 = F_2 \end{cases}$$

Il « suffit » de résoudre ce système de 2 équations à 2 inconnues pour trouver les amplitudes complexes.

Rappel mathématique

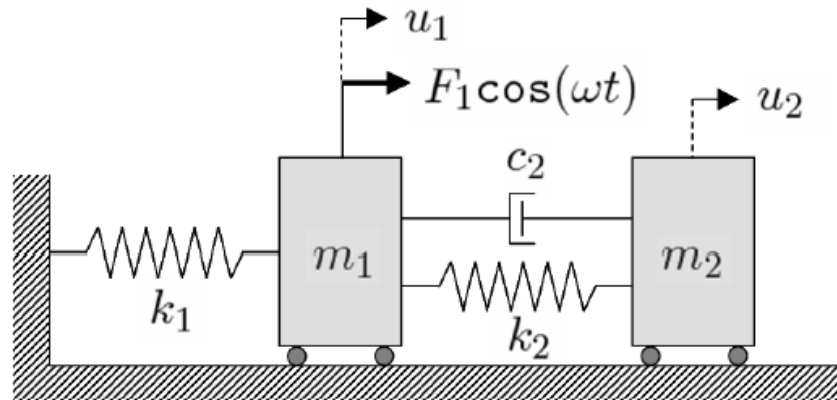
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{avec} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(ad - bc)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Systèmes à 2 degrés de liberté

Réponse forcée harmonique

Exemple : absorbeur dynamique de vibrations (diminuer le niveau vibratoire de la masse m_1).



Système principal : m_1, k_1

Système auxiliaire (non excité) : m_2, k_2, c_2

On trouve :

$$[M] = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \quad [C] = \begin{pmatrix} c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{pmatrix} \quad [K] = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix}$$

Systèmes à 2 degrés de liberté

Réponse forcée harmonique

Résolution de : $\{-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K]\}\{U\} = \{F\}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -m_1\omega^2 + i\omega c_2 + k_1 + k_2 & -i\omega c_2 - k_2 \\ -i\omega c_2 - k_2 & -m_2\omega^2 + i\omega c_2 + k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Inversion du système :

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} -m_2\omega^2 + i\omega c_2 + k_2 & i\omega c_2 + k_2 \\ i\omega c_2 + k_2 & -m_1\omega^2 + i\omega c_2 + k_1 + k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned} D &= (-m_2\omega^2 + i\omega c_2 + k_2)(-m_1\omega^2 + i\omega c_2 + k_1 + k_2) - (i\omega c_2 + k_2)^2 \\ &= m_1m_2\omega^4 - (m_1k_1 + m_2k_2 + m_1k_2)\omega^2 + k_1k_2 + i[-c_2(m_1 + m_2)\omega^3 + k_1c_2\omega] \end{aligned}$$

Systèmes à 2 degrés de liberté

Réponse forcée harmonique

On trouve U_1 :

$$U_1 = \frac{(-m_2\omega^2 + i\omega c_2 + k_2)F_1}{D}$$

Puis le module de U_1 (amplitude du déplacement de m_1) :

$$|U_1|^2 = \frac{4\zeta^2\gamma^2 + (\gamma^2 - \delta^2)^2}{4\zeta^2\gamma^2(\gamma^2 - 1 + \kappa\gamma^2)^2 + [\kappa\delta^2\gamma^2 - (\gamma^2 - 1)(\gamma^2 - \delta^2)]^2}$$

avec

$$\omega_0 = \sqrt{k_1/m_1} : \text{pulsation du système principal}$$

$$\omega_a = \sqrt{k_2/m_2} : \text{pulsation du système auxiliaire}$$

$$\kappa = m_2/m_1$$

$$\delta = \omega_a/\omega_0$$

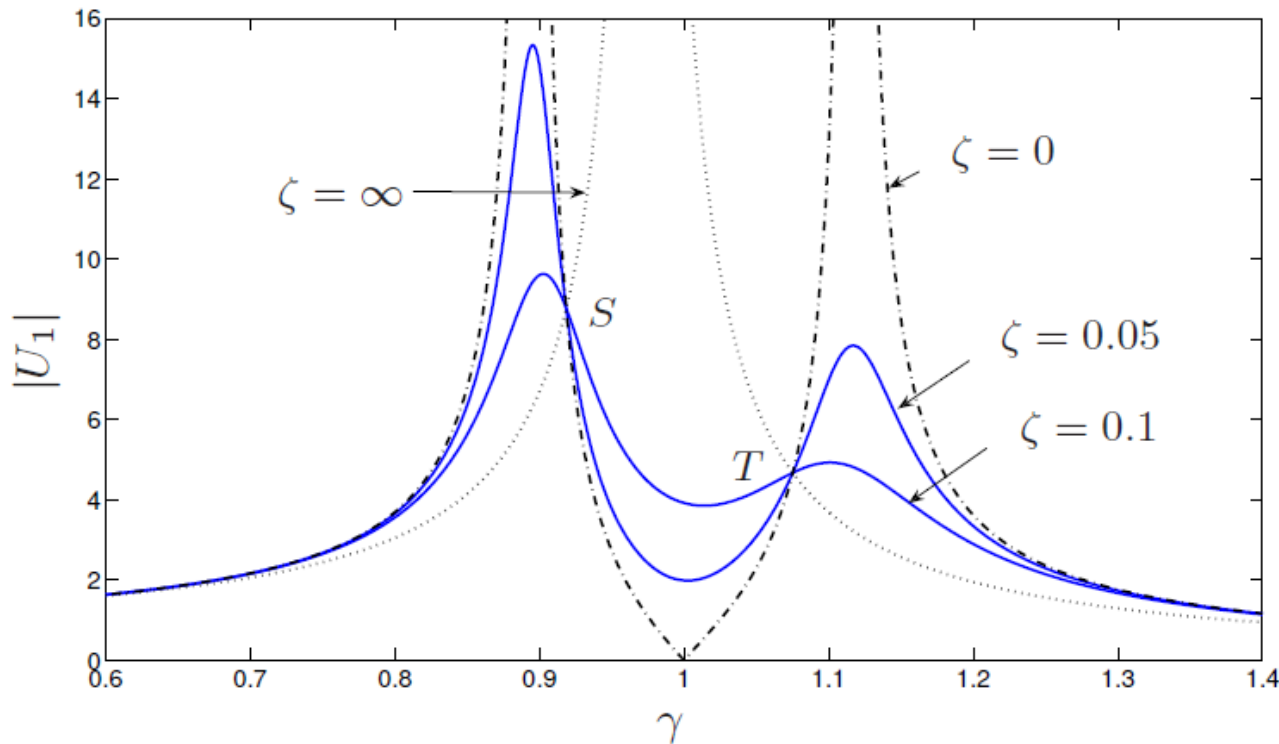
$$\gamma = \omega/\omega_0$$

On peut modifier l'amplitude du déplacement de m_1 en jouant sur ces paramètres.

Systèmes à 2 degrés de liberté

Réponse forcée harmonique

Evolution fréquentielle de l'amplitude du déplacement de m_1 pour $\kappa = 1/20$ et $\delta = 1$



$$\begin{aligned}\kappa &= m_2/m_1 \\ \delta &= \omega_a/\omega_0 \\ \gamma &= \omega/\omega_0\end{aligned}$$

Introduction

Systèmes à 1 degré de liberté

Vibrations libres

Réponse forcée harmonique

Systèmes à plusieurs degrés de liberté

Systèmes à 2 degrés de liberté

Systèmes à n degrés de liberté

Systèmes élastiques continus

Vibrations longitudinales de barres

Vibrations transversales des poutres

Vibrations de plaques/coques

Conception d'une structure vibrante

Systèmes à n degrés de liberté

Il est extrêmement délicat et fastidieux de résoudre les équations du mouvement lorsque le nombre de degrés de liberté (DDL) augmente ($n > 2$) : inversion des systèmes matriciels et intégration temporelle.

La projection de ces équations sur des **bases de modes de vibrations** permet de s'affranchir de ces difficultés : on ramène l'étude d'un problème à plusieurs DDLs à celle d'un ensemble de sous-problèmes à 1 DDL, découplés entre eux.

Systèmes à n degrés de liberté

Modes de vibrations

Vibrations libres d'un système conservatif à n DDLs données par le système matriciel :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{0\}$$

$[M]$ et $[K]$: matrices de masse et de raideur (taille $n \times n$)

$\{u\}$: vecteur des déplacements des DDLs du système (taille $n \times 1$)

Le problème aux valeurs propres permet de calculer les solutions (de la forme $\{u\} = \{X\}\cos(\omega t)$) par la résolution du système :

$$\det([K] - \omega_j^2 [M]) = 0$$

$$[K]\{X\}_j = \omega_j^2 [M]\{X\}_j$$

Les solutions obtenues $\{(\omega_j, \{X\}_j)\}_{j=1,\dots,n}$ représentent les **modes de vibration** du système.

Systèmes à n degrés de liberté

Modes de vibrations

Orthogonalité des modes de vibration vis-à-vis de $[M]$ et $[K]$

Soient 2 modes $(\omega_i, \{X\}_i)$ et $(\omega_j, \{X\}_j)$ pour lesquels $\omega_i \neq \omega_j$.

$$\begin{cases} [K]\{X\}_i = \omega_i^2 [M]\{X\}_i \\ [K]\{X\}_j = \omega_j^2 [M]\{X\}_j \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \{X\}_j^T [K]\{X\}_i = \omega_i^2 \{X\}_j^T [M]\{X\}_i \\ \{X\}_i^T [K]\{X\}_j = \omega_j^2 \{X\}_i^T [M]\{X\}_j \end{cases}$$

En prenant la transposée de la première équation ($[M]$ et $[K]$ étant symétriques) :

$$\begin{cases} \{X\}_i^T [K]^T \{X\}_j = \omega_i^2 \{X\}_i^T [M]^T \{X\}_j \\ \{X\}_i^T [K]\{X\}_j = \omega_j^2 \{X\}_i^T [M]\{X\}_j \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \{X\}_i^T [K]\{X\}_j = \omega_i^2 \{X\}_i^T [M]\{X\}_j \\ \{X\}_i^T [K]\{X\}_j = \omega_j^2 \{X\}_i^T [M]\{X\}_j \end{cases}$$

En soustrayant les 2 équations :

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \{X\}_i^T [M]\{X\}_j = 0 \quad \longrightarrow \quad \{X\}_i^T [M]\{X\}_j = 0 \quad \text{et} \quad \{X\}_i^T [K]\{X\}_j = 0$$

Définitions

Masses modales : $m_j = \{X\}_j^T [M] \{X\}_j$

Raideurs modales : $k_j = \{X\}_j^T [K] \{X\}_j$

Pulsations propres : $\omega_j = \sqrt{\frac{k_j}{m_j}}$

Modes de corps rigide : solutions particulières du problème telles que $[K]\{X\} = \{0\}$, c'est-à-dire associées à des valeurs propres nulles $\omega_j = 0$.

Nombre maximum de modes de corps rigides : 6 (3 translations et 3 rotations)

Modes de vibration

Les vecteurs propres $\{X\}_j$ sont définis à une constante près. Il peut être intéressant de les normer par rapport à la matrice de masse pour simplifier les équations :

$$\{X\}_j \rightarrow \frac{\{X\}_j}{\sqrt{\{X\}_j^T [M] \{X\}_j}} = \frac{\{X\}_j}{\sqrt{m_j}} \qquad m_j = \{X\}_j^T [M] \{X\}_j$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Nouvelles masses modales : } m_j = \frac{\{X\}_j^T}{\sqrt{m_j}} [M] \frac{\{X\}_j}{\sqrt{m_j}} = \frac{\{X\}_j^T [M] \{X\}_j}{m_j} = 1 \quad \forall j \\ \text{Pulsations propres : } \omega_j = \sqrt{k_j} \quad \forall j \end{array} \right.$$

Systèmes à n degrés de liberté

Décomposition modale

Les vecteurs propres $\{X\}_j$ sont orthogonaux vis-à-vis de la matrice $[M]$. Ils sont donc linéairement indépendants : la famille $\{\{X\}_j\}_{j=1,\dots,n}$ représente une base de vecteurs de dimension n égale au nombre de DDLs du système.

Le vecteur déplacement $\{u\}$ peut être exprimé sur la base des modes de vibration. Dans le cas sans modes de corps rigide, la **décomposition modale** s'écrit :

$$\{u\} = \sum_{j=1}^n \Phi_j \{X\}_j \quad \text{avec } \Phi_j \text{ les } \mathbf{amplitudes\ modales} \text{ (dépendantes du temps)}$$

Avec cette décomposition modale et l'orthogonalité des modes, il est possible de reformuler un problème matriciel de dimension n en n sous-problèmes à 1 DDL.

Systèmes à n degrés de liberté

Vibrations libres sans amortissement

Problème de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} [M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{0\} \\ \{u\}\big|_{t=0} = \{u_0\} \\ \{\dot{u}\}\big|_{t=0} = \{\dot{u}_0\} \end{array} \right.$$

$\{u_0\}$ et $\{\dot{u}_0\}$: vecteurs ($n \times 1$) exprimant les conditions initiales du système

Décomposition modale :

$$\{u\} = \sum_{j=1}^n \Phi_j \{X\}_j \qquad \{\ddot{u}\} = \sum_{j=1}^n \ddot{\Phi}_j \{X\}_j$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n \ddot{\Phi}_j [M] \{X\}_j + \sum_{j=1}^n \Phi_j [K] \{X\}_j = \{0\}$$

Systèmes à n degrés de liberté

Vibrations libres sans amortissement

$$\sum_{j=1}^n \ddot{\Phi}_j [M] \{X\}_j + \sum_{j=1}^n \Phi_j [K] \{X\}_j = \{0\} \quad \text{avec} \quad [K] \{X\}_j = \omega_j^2 [M] \{X\}_j$$

$$\longrightarrow \sum_{j=1}^n \ddot{\Phi}_j [M] \{X\}_j + \sum_{j=1}^n \Phi_j \omega_j^2 [M] \{X\}_j = \{0\}$$

$$\longrightarrow \sum_{j=1}^n (\ddot{\Phi}_j + \Phi_j \omega_j^2) [M] \{X\}_j = \{0\}$$

$$\longrightarrow \{X\}_i^T \sum_{j=1}^n (\ddot{\Phi}_j + \Phi_j \omega_j^2) [M] \{X\}_j = \{0\}$$

$$\longrightarrow \sum_{j=1}^n (\ddot{\Phi}_j + \Phi_j \omega_j^2) \{X\}_i^T [M] \{X\}_j = \{0\}$$

$$\longrightarrow \ddot{\Phi}_j + \omega_j^2 \Phi_j = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\text{car } \{X\}_i^T [M] \{X\}_j = 0 \text{ pour } i \neq j \\ \text{et } m_j = \{X\}_j^T [M] \{X\}_j = 1$$

Systèmes à n degrés de liberté

Vibrations libres sans amortissement

Condition initiale en déplacement :

$$\{u\}\Big|_{t=0} = \{u_0\} \quad \text{avec} \quad \{u\} = \sum_{j=1}^n \Phi_j \{X\}_j$$

$$\longrightarrow \sum_{j=1}^n \Phi_{j0} \{X\}_j = \{u_0\} \quad \text{avec} \quad \Phi_j\Big|_{t=0} = \Phi_{j0}$$

$$\longrightarrow \{X\}_i^T [M] \sum_{j=1}^n \Phi_{j0} \{X\}_j = \{X\}_i^T [M] \{u_0\}$$

$$\longrightarrow \sum_{j=1}^n \Phi_{j0} \{X\}_i^T [M] \{X\}_j = \{X\}_i^T [M] \{u_0\}$$

$$\longrightarrow \Phi_j\Big|_{t=0} = \Phi_{j0} = \{X\}_j^T [M] \{u_0\}$$

car $\{X\}_i^T [M] \{X\}_j = 0$ pour $i \neq j$
et $m_j = \{X\}_j^T [M] \{X\}_j = 1$

Systèmes à n degrés de liberté

Vibrations libres sans amortissement

Condition initiale en vitesse :

$$\{\dot{u}\}\Big|_{t=0} = \{\dot{u}_0\} \quad \text{avec} \quad \{\dot{u}\} = \sum_{j=1}^n \dot{\Phi}_j \{X\}_j$$

$$\longrightarrow \sum_{j=1}^n \dot{\Phi}_{j0} \{X\}_j = \{\dot{u}_0\} \quad \text{avec} \quad \dot{\Phi}_j\Big|_{t=0} = \dot{\Phi}_{j0}$$

$$\longrightarrow \{X\}_i^T [M] \sum_{j=1}^n \dot{\Phi}_{j0} \{X\}_j = \{X\}_i^T [M] \{\dot{u}_0\}$$

$$\longrightarrow \sum_{j=1}^n \dot{\Phi}_{j0} \{X\}_i^T [M] \{X\}_j = \{X\}_i^T [M] \{\dot{u}_0\}$$

$$\longrightarrow \dot{\Phi}_j\Big|_{t=0} = \dot{\Phi}_{j0} = \{X\}_j^T [M] \{\dot{u}_0\}$$

$$\begin{aligned} \text{car } \{X\}_i^T [M] \{X\}_j &= 0 \text{ pour } i \neq j \\ \text{et } m_j &= \{X\}_j^T [M] \{X\}_j = 1 \end{aligned}$$

Systèmes à n degrés de liberté

Vibrations libres sans amortissement

Conclusion : un problème de dimension n est équivalent aux n sous-problèmes suivants, indépendants entre eux et formulés en termes d'amplitudes modales Φ_j :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\Phi}_j + \omega_j^2 \Phi_j = 0 \quad j = 1, \dots, n \\ \Phi_j \Big|_{t=0} = \{X\}_j^T [M] \{u_0\} \\ \dot{\Phi}_j \Big|_{t=0} = \{X\}_j^T [M] \{\dot{u}_0\} \end{array} \right.$$

Les Φ_j dépendent du temps et s'expriment comme dans la partie à 1 DDL :

$$\Phi_j = \Phi_{j0} \cos(\omega_j t) + \frac{\dot{\Phi}_{j0}}{\omega_j} \sin(\omega_j t)$$

Déplacement du système (connaissant les formes propres $\{X\}_j$) : $\{u\} = \sum_{j=1}^n \Phi_j \{X\}_j$

Systèmes à n degrés de liberté

Vibrations libres amorties

Décomposition modale également possible en présence d'amortissement lorsque la matrice d'amortissement est proportionnelle à la matrice de masse et de rigidité (amortissement de Rayleigh) :

$$[C] = a[M] + b[K]$$

Dans ce cas, l'orthogonalité des formes propres est également vérifiée vis-à-vis de la matrice d'amortissement $[C]$.

Systèmes à n degrés de liberté

Vibrations libres amorties

Problème à traiter :

$$\left\{ \begin{array}{l} [M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{0\} \\ \{u\}\big|_{t=0} = \{u_0\} \\ \{\dot{u}\}\big|_{t=0} = \{\dot{u}_0\} \end{array} \right.$$

Décomposition modale :

$$\{u\} = \sum_{j=1}^n \Phi_j \{X\}_j \quad \{\dot{u}\} = \sum_{j=1}^n \dot{\Phi}_j \{X\}_j \quad \{\ddot{u}\} = \sum_{j=1}^n \ddot{\Phi}_j \{X\}_j$$

$$\longrightarrow \sum_{j=1}^n \ddot{\Phi}_j [M] \{X\}_j + \sum_{j=1}^n \dot{\Phi}_j (a[M] + b[K]) \{X\}_j + \sum_{j=1}^n \Phi_j [K] \{X\}_j = \{0\}$$

$$\text{avec} \quad [K] \{X\}_j = \omega_j^2 [M] \{X\}_j$$

Systèmes à n degrés de liberté

Vibrations libres amorties

$$\longrightarrow \sum_{j=1}^n \ddot{\Phi}_j [M] \{X\}_j + \sum_{j=1}^n \dot{\Phi}_j (a [M] \{X\}_j + b \omega_j^2 [M] \{X\}_j) + \sum_{j=1}^n \Phi_j \omega_j^2 [M] \{X\}_j = \{0\}$$

$$\longrightarrow \sum_{j=1}^n [\ddot{\Phi}_j + \dot{\Phi}_j (a + b \omega_j^2) + \Phi_j \omega_j^2] [M] \{X\}_j = \{0\}$$

$$\longrightarrow \ddot{\Phi}_j + \dot{\Phi}_j (a + b \omega_j^2) + \Phi_j \omega_j^2 = 0$$

On pose : $a + b \omega_j^2 = 2 \zeta_j \omega_j$

donc $\zeta_j = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\omega_j} + b \omega_j \right)$ les taux d'amortissement modaux

Systèmes à n degrés de liberté

Vibrations libres amorties

Par décomposition modale, on obtient n problèmes à 1 DDL :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\Phi}_j + 2\zeta_j \omega_j \dot{\Phi}_j + \omega_j^2 \Phi_j = 0 \\ \Phi_j \Big|_{t=0} = \{X\}_j^T [M] \{u_0\} \\ \dot{\Phi}_j \Big|_{t=0} = \{X\}_j^T [M] \{\dot{u}_0\} \end{array} \right. \quad j = 1, \dots, n$$

avec $\zeta_j = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\omega_j} + b\omega_j \right)$ les taux d'amortissement modaux

Systèmes à n degrés de liberté

Vibrations libres amorties

D'où

$$\Phi_j = e^{-\zeta_j \omega_j t} \left[\Phi_{j0} \cos(\omega_{jd} t) + \left(\frac{\dot{\Phi}_{j0} + \zeta_j \omega_{jd} \Phi_{j0}}{\omega_{jd}} \right) \sin(\omega_{jd} t) \right]$$

avec $\omega_{jd} = \omega_j \sqrt{1 - \zeta_j^2}$

Vecteur déplacement du système :

$$\{u\} = \sum_{j=1}^n \Phi_j \{X\}_j$$

Systèmes à n degrés de liberté

Vibrations forcées harmoniques

Oscillations forcées d'un système à n DDL avec amortissement visqueux, soumis à des forces harmoniques :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\}e^{i\omega t}$$

Solution stationnaire cherchée sous la forme : $\{u\} = \{U\}e^{i\omega t}$

Principe de la décomposition modale : $\{U\} = \sum_{j=1}^n \Phi_j \{X\}_j$

$$\longrightarrow \sum_{j=1}^n [\ddot{\Phi}_j + \dot{\Phi}_j(a + b\omega_j^2) + \Phi_j\omega_j^2][M]\{X\}_j = \{F\}$$

Systèmes à n degrés de liberté

Vibrations forcées harmoniques

$$\longrightarrow \{X\}_i^T \sum_{j=1}^n [\ddot{\Phi}_j + \dot{\Phi}_j(a + b\omega_j^2) + \Phi_j\omega_j^2][M]\{X\}_j = \{X\}_i^T \{F\}$$

$$\longrightarrow \ddot{\Phi}_j + 2\zeta_j\omega_j\dot{\Phi}_j + \omega_j^2 \Phi_j = F_j \quad \text{avec} \quad F_j = \{X\}_j^T \{F\} \quad \text{les forces modales}$$

$j = 1, \dots, n$

Les amplitudes modales Φ_j sont fonction de la pulsation d'excitation :

$$\Phi_j = \frac{F_j/k_j}{1 - (\omega/\omega_j)^2 + 2i\zeta_j \omega/\omega_j}$$