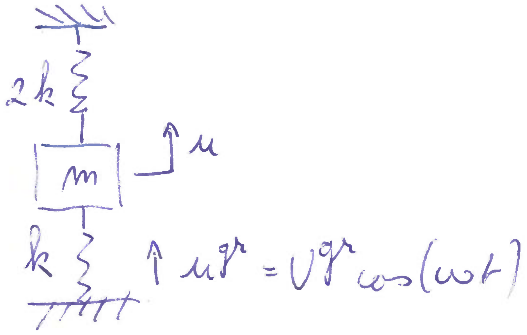
# Correction DS 1

## Exercice 1




1) On isole la masse m. BAME :
- ressort 1 ($2k$) : $-2ku$
- ressort 2 ($k$) : $-k(u-u^{gr})$

PFD : $-2ku - k(u-u^{gr}) = m\ddot{u}$

$$\Rightarrow \ddot{u} + \frac{3k}{m}u = \frac{k}{m}U^{gr}\cos(\omega t)$$

avec $\dfrac{3k}{m} = \omega_0^2$

et $\dfrac{k}{m} = \dfrac{\omega_0^2}{3}$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{u} + \omega_0^2 u = \frac{\omega_0^2 U^{gr}}{3}\cos(\omega t)}$$ équation du mouvement

2) Résolution

* Equation homogène : $\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0$

  Solution : $u = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

* Solution particulière de la forme $u = U\cos(\omega t)$

$$\Rightarrow -U\omega^2\cos(\omega t) + \omega_0^2 U\cos(\omega t) = \frac{\omega_0^2 U^{gr}}{3}\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow U(\omega_0^2 - \omega^2) = \frac{\omega_0^2 U^{gr}}{3}$$

$$\Rightarrow U = \frac{\omega_0^2 U^{gr}}{3(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

* Solution générale :

$$u(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \frac{\omega_0^2 U g r}{3(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos(\omega t)$$

* Conditions initiales :

$$u(0) = 0 \qquad (1)$$

$$\dot{u}(0) = 0 \qquad (2)$$

avec $\dot{u} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t) - \frac{\omega_0^2 U g r\,\omega}{3(\omega_0^2-\omega^2)}\sin(\omega t)$

D'où :

$(2) \Rightarrow B\omega_0 = 0 \Rightarrow B = 0$

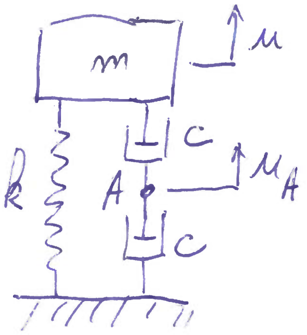
$(1) \Rightarrow A + \frac{\omega_0^2 U g r}{3(\omega_0^2-\omega^2)} = 0 \Rightarrow A = -\frac{\omega_0^2 U g r}{3(\omega_0^2-\omega^2)}$

Enfin :

$$u(t) = -\frac{\omega_0^2 U g r}{3(\omega_0^2-\omega^2)}\cos(\omega_0 t) + \frac{\omega_0^2 U g r}{3(\omega_0^2-\omega^2)}\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow u(t) = \frac{\omega_0^2 U g r}{3(\omega_0^2-\omega^2)}\left[\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)\right]$$

# Exercice 2




1) * On isole m. BAME :

- ressort : $-ku$
- amortisseur 1 : $-c(\dot{u}-\dot{u}_A)$

PFD : $-ku - c(\dot{u}-\dot{u}_A) = m\ddot{u}$ (1)

* On isole A. BAME :

- amortisseur 1 : $c(\dot{u}-\dot{u}_A)$
- amortisseur 2 : $-c\dot{u}_A$

PFD (A n'a pas de masse) :

$$-c\dot{u}_A + c(\dot{u}-\dot{u}_A) = 0$$

$$\Rightarrow \dot{u} - 2\dot{u}_A = 0 \quad \Rightarrow \dot{u}_A = \frac{\dot{u}}{2}$$

On injecte dans (1) :

$$m\ddot{u} + ku + c\left(\dot{u} - \frac{\dot{u}}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{u} + \frac{c}{2}\dot{u} + ku = 0$$

↳ amortisseur de coefficient $c/2$ équivalent aux 2 amortisseurs en série

$$\Rightarrow \ddot{u} + \frac{c}{2m}\dot{u} + \frac{k}{m}u = 0$$

avec $\frac{c}{2m} = \frac{4\xi\sqrt{km}}{2m} = 2\xi\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\xi\omega_0$

et $\frac{k}{m} = \omega_0^2$

D'où l'équation du mouvement :

$$\ddot{u} + 2\xi\omega_0 \dot{u} + \omega_0^2 u = 0$$

2) Résolution :

Equation caractéristique : $r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$

$\Rightarrow \Delta = 4\xi^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(\xi^2 - 1) < 0$ car $\xi < 1$

$\Rightarrow r = -\xi\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1-\xi^2} = -\xi\omega_0 \pm i\omega_d$

D'où :

$$u(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right]$$

Amplitude :

$$|u(t)|_{max} = e^{-\xi\omega_0 t}\sqrt{A^2+B^2} \quad \text{avec } |u(t)|_{max} = A_0$$

$$|u(t+nT_d)|_{max} = e^{-\xi\omega_0(t+nT_d)}\sqrt{A^2+B^2} \quad \text{avec } T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

D'où :

$$\frac{|u(t+nT_d)|_{max}}{|u(t)|_{max}} = \frac{e^{-\xi\omega_0(t+nT_d)}}{e^{-\xi\omega_0 t}} = e^{-\xi\omega_0 nT_d}$$

$$\Rightarrow |u(t+nT_d)|_{max} = A_0 e^{-\xi\omega_0 nT_d}$$

avec $T_d = \dfrac{2\pi}{\omega_d} = \dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$

$$\Rightarrow |u(t+nT_d)|_{max} = A_0 e^{-\frac{2\pi n\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$