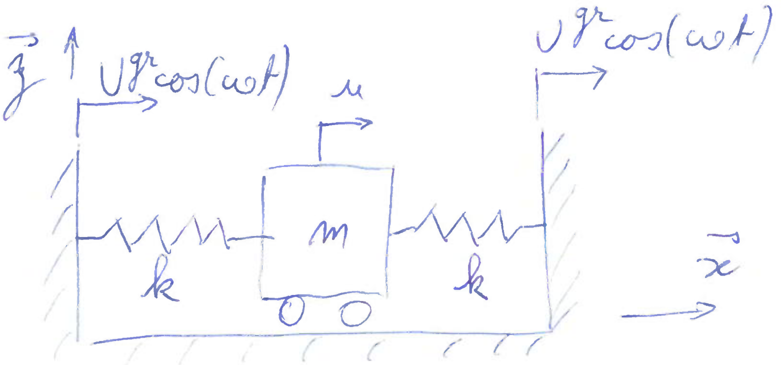
Correction DS 1

Exercice 1



1) * On isole la masse m. BAME :

- ressort 1 : $\vec{F_1} = -k(u - u^{gr})\,\vec{x}$
- ressort 2 : $\vec{F_2} = -k(u - u^{gr})\,\vec{x}$
- poids : $\vec{P} = -mg\,\vec{z}$
- réaction du sol : $\vec{R} = R\,\vec{z}$

* PFD en projection sur $\vec{x}$:

$$-k(u-u^{gr}) - k(u-u^{gr}) = m\ddot{u}$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{u} + 2ku = 2ku^{gr}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{u} + \frac{2k}{m}u = \frac{2k}{m}U^{gr}\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{u} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 U^{gr}\cos(\omega t)}$$ équation du mouvement

2) Résolution

* Equation homogène : $\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0$

Equation caractéristique : $r^2 + \omega_0^2 = 0$

$\Rightarrow r^2 = i^2\omega_0^2 \qquad \Rightarrow r = \pm i\omega_0$

D'où : $u = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

* Solution particulière de la forme : $u = C\cos(\omega t)$

$$\Rightarrow \quad -C\omega^2\cos(\omega t) + \omega_0^2 C\cos(\omega t) = \omega_0^2 U^{gr}\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \quad C(\omega_0^2 - \omega^2) = \omega_0^2 U^{gr}$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{\omega_0^2 U g r}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

D'où :

$$u = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \frac{\omega_0^2 U g r}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos(\omega t)$$

Conditions initiales :

$$\begin{cases} u(0) = 0 & (1) \\ \dot{u}(0) = 0 & (2) \end{cases}$$

avec

$$\dot{u} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t) - \frac{\omega\omega_0^2 U g r}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin(\omega t)$$

Donc :

$$(1) \Rightarrow \quad A + \frac{\omega_0^2 U g r}{\omega_0^2 - \omega^2} = 0 \quad \Rightarrow A = -\frac{\omega_0^2 U g r}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

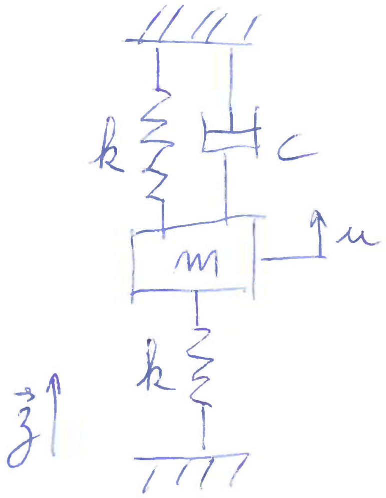
$$(2) \Rightarrow \quad B\omega_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

Finallement :

$$u = -\frac{\omega_0^2 U g r}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos(\omega_0 t) + \frac{\omega_0^2 U g r}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \boxed{u = \left(\frac{\omega_0^2 U g r}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\left[\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)\right]}$$

Exercice 2



1) On isole la masse m. BAME :

- ressort 1 : $\vec{F}_1 = -ku\vec{z}$
- ressort 2 : $\vec{F}_2 = -ku\vec{z}$
- amortisseur : $\vec{F} = -c\dot{u}\vec{z}$
- poids : $\vec{P} = -mg\vec{z}$

Rappel : le poids n'intervient pas directement dans le PFD lorsque u est défini par rapport à la position d'équilibre.

PFD : $-ku - ku - c\dot{u} = m\ddot{u}$

$$\Rightarrow \ddot{u} + \frac{c}{m}\dot{u} + \frac{2k}{m}u = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{u} + 2\xi\omega_0\dot{u} + \omega_0^2 u = 0}$$ équation du mouvement

car $2\xi\omega_0 = 2\dfrac{c}{2\sqrt{2km}}\sqrt{\dfrac{2k}{m}} = \dfrac{c}{m}$

2) Résolution :

Equation caractéristique : $r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$

$\Delta = 4\xi^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(\xi^2 - 1)$ avec $\xi < 1$

$= 4i^2\omega_0^2(1-\xi^2)$

$\Rightarrow r = -\xi\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$

On pose $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ la pulsation apparente.

$\Rightarrow r = -\xi\omega_0 \pm i\omega_d$

D'où :

$$u = e^{-\xi \omega_0 t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right]$$

Conditions initiales :

$$\begin{cases} u(0) = u_0 & (1) \\ \dot{u}(0) = 0 & (2) \end{cases}$$

avec :

$$\dot{u} = -\xi\omega_0 e^{-\xi\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right]$$
$$+ e^{-\xi\omega_0 t}\left[-A\omega_d\sin(\omega_d t) + B\omega_d\cos(\omega_d t)\right]$$

D'où :

$$(1) \Rightarrow A = u_0$$

$$(2) \Rightarrow -\xi\omega_0 A + B\omega_d = 0$$

$$\Rightarrow B = \frac{\xi\omega_0}{\omega_d} A = \frac{\xi u_0}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

Finallement :

$$\boxed{u = u_0 e^{-\xi\omega_0 t}\left[\cos(\omega_d t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_d t)\right]}$$

3) Amplitude maximale

$$|u|_{max} = u_0 e^{-\xi\omega_0 t}\sqrt{1 + \frac{\xi^2}{1-\xi^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{|u|_{max} = \frac{u_0}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t}}$$

4) Diminution de l'amplitude :

$$d = \frac{|u|_{t+nT_d}}{|u|_t}$$ avec $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$ la période apparente et n le nombre d'oscillations

$$\Rightarrow d = \frac{e^{-\xi\omega_0(t+nT_d)}}{e^{-\xi\omega_0 t}}$$

$$\Rightarrow d = e^{-n\xi\omega_0 T_d}$$

$$\Rightarrow \ln d = -n\xi\omega_0 T_d$$

$$\Rightarrow \ln\frac{1}{d} = n\xi\omega_0\frac{2\pi}{\omega_d}$$

$$\Rightarrow \ln\frac{1}{d} = n\xi\frac{2\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\Rightarrow (1-\xi^2)\ln^2\frac{1}{d} = 4\pi^2 n^2\xi^2$$

$$\Rightarrow \left(4\pi n^2 + \ln^2\frac{1}{d}\right)\xi^2 = \ln^2\frac{1}{d}$$

$$\Rightarrow \boxed{\xi = \frac{\ln\frac{1}{d}}{\sqrt{4\pi^2 n^2 + \ln^2\frac{1}{d}}}}$$

avec $d = 1 - d\%$