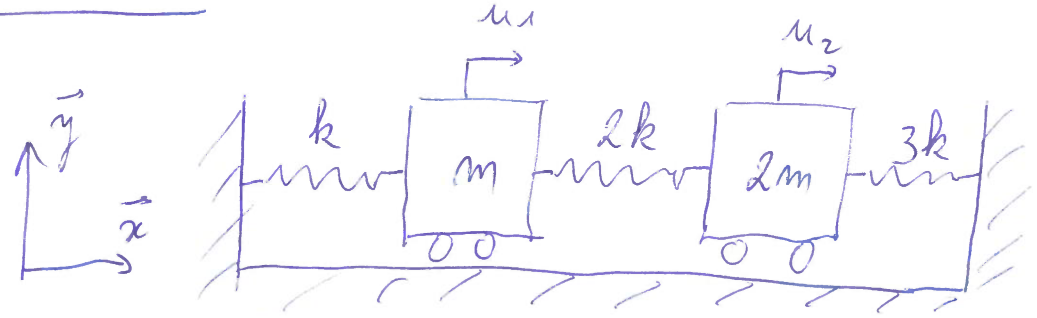
Correction DS2

Exercice 1



1) * On isole la masse m

BAME :

- ressort 1 : $\vec{F_1} = -k u_1 \vec{x}$
- ressort 2 : $\vec{F_2} = 2k(u_2 - u_1)\vec{x}$
- poids : $\vec{P} = -mg\vec{y}$
- réaction du sol : $\vec{R} = R_1\vec{y}$

PFD en projection sur $\vec{x}$:

$$-k u_1 + 2k(u_2 - u_1) = m\ddot{u}_1$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{u}_1 + 3k u_1 - 2k u_2 = 0 \qquad (1)$$

* On isole la masse 2m. BAME :

- ressort 2 : $\vec{F_2} = -2k(u_2 - u_1)\vec{x}$
- ressort 3 : $\vec{F_3} = -3k u_2 \vec{x}$
- poids : $\vec{P} = -2mg\vec{y}$
- réaction du sol : $\vec{R} = R_2\vec{y}$

PFD en projection sur $\vec{x}$:

$$-2k(u_2 - u_1) - 3k u_2 = 2m\ddot{u}_2$$

$$\Rightarrow 2m\ddot{u}_2 + 5k\,u_2 - 2k\,u_1 = 0 \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) peuvent s'écrivent sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3k & -2k \\ -2k & 5k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) On cherche la solution de ce système sous la forme :

$$\left|\begin{array}{l} u_1 = U_1 \cos(\omega t) \\ u_2 = U_2 \cos(\omega t) \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \ddot{u}_1 = -\omega^2 U_1 \cos(\omega t) \\ \ddot{u}_2 = -\omega^2 U_2 \cos(\omega t) \end{array}\right.$$

D'où :
$$\begin{pmatrix} -m\omega^2 + 3k & -2k \\ -2k & -2m\omega^2 + 5k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solution non triviale si le déterminant de la matrice est nul :

$$\begin{vmatrix} -m\omega^2 + 3k & -2k \\ -2k & -2m\omega^2 + 5k \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow (3k - m\omega^2)(5k - 2m\omega^2) - 4k^2 = 0$$

$$\rightarrow 15k^2 - 6mk\omega^2 - 5mk\omega^2 + 2m^2\omega^4 - 4k^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2m^2\omega^4 - 11mk\omega^2 + 11k^2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega^4 - \frac{11}{2}\frac{k}{m}\omega^2 + \frac{11}{2}\left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega^4 - \frac{11}{2}\omega_0^2\omega^2 + \frac{11}{2}\omega_0^4 = 0 \qquad \text{avec } \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Résolution :

$$\Delta = \frac{121}{4}\omega_0^4 - 22\omega_0^2 = \frac{33}{4}\omega_0^4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 = \dfrac{\frac{11}{2}\omega_0^2 - \frac{\sqrt{33}}{2}\omega_0^2}{2} = \left(\dfrac{11-\sqrt{33}}{4}\right)\omega_0^2 \\ \omega_2^2 = \dfrac{\frac{11}{2}\omega_0^2 + \frac{\sqrt{33}}{2}\omega_0^2}{2} = \left(\dfrac{11+\sqrt{33}}{4}\right)\omega_0^2 \end{cases}$$

ω_1 et ω_2 sont les 2 pulsations propres du système.

Recherche des modes propres $\vec{X}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} -m\omega^2+3k & -2k \\ -2k & -2m\omega^2+5k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3k-m\omega^2)a - 2kb = 0 & (3) \\ -2ka + (5k-2m\omega^2)b = 0 & (4) \end{cases}$$

- Pour $\omega = \omega_1$, on choisit $b = 1$

$$(4) \Rightarrow a = \frac{5}{2} - \frac{m}{k}\omega_1^2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{\omega_0^2}\left(\frac{11-\sqrt{33}}{4}\right)\omega_0^2$$

$$= \frac{10-11+\sqrt{33}}{4} = \frac{\sqrt{33}-1}{4}$$

$$\Rightarrow \vec{X}_1\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{33}-1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Pour $\omega = \omega_2$, on choisit $a = 1$

$$(3) \Rightarrow b = \frac{3}{2} - \frac{m}{2k}\omega_2^2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2\omega_0^2}\left(\frac{11+\sqrt{33}}{4}\right)\omega_0^2$$

$$= \frac{12-11-\sqrt{33}}{8} = \frac{1-\sqrt{33}}{8}$$

$$\Rightarrow \vec{X}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{33}}{8} \end{pmatrix}$$

3) Deplacements :

$$[u] = A[X_1]\cos(\omega_1 t) + B[X_2]\cos(\omega_2 t)$$

avec A et B deux constantes à determiner par les conditions initiales (non données ici).

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 = A\left(\frac{\sqrt{33}-1}{4}\right)\cos(\omega_1 t) + B\cos(\omega_2 t) \\ u_2 = A\cos(\omega_1 t) + B\left(\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)\cos(\omega_2 t) \end{cases}$$

Exercice 2

On a :

$$V(x) = A\,ch(\beta x) + B\,sh(\beta x) + C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x)$$

$$V'(x) = A\beta\,sh(\beta x) + B\beta\,ch(\beta x) - C\beta\sin(\beta x) + D\beta\cos(\beta x)$$

$$V''(x) = A\beta^2 ch(\beta x) + B\beta^2 sh(\beta x) - C\beta^2\cos(\beta x) - D\beta^2\sin(\beta x)$$

1) Conditions aux bords :

* En $x = 0$ (encastrement)

Deplacement nul : $V(0) = 0$ (1)

Rotation nulle : $V'(0) = 0$ (2)

* En $x = L$ (appui simple) :

Deplacement nul : $V(L) = 0$ (3)

Moment nul : $V''(L) = 0$ (4) $(M_{f_z} = EI_{Gz}V'')$

2) On en déduit :

(1) $\Rightarrow A + C = 0$

(2) $\Rightarrow B + D = 0$

(3) $\Rightarrow A\,ch(\beta L) + B\,sh(\beta L) + C\cos(\beta L) + D\sin(\beta L) = 0$

(4) $\Rightarrow A\,ch(\beta L) + B\,sh(\beta L) - C\cos(\beta L) - D\sin(\beta L) = 0$

Si on additionne les 2 dernières équations, on obtient :

$A\,ch(\beta L) + B\,sh(\beta L) = 0$

Si on les soustrait, on obtient :

$$C\cos(\beta L) + D\sin(\beta L) = 0$$

On en déduit le système à résoudre :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ ch(\beta L) & sh(\beta L) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\beta L) & \sin(\beta L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solution non nulle si le déterminant de la matrice est nulle. On développe par rapport à la première ligne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ sh(\beta L) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta L) & \sin(\beta L) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ ch(\beta L) & sh(\beta L) & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\beta L) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} sh(\beta L) & 0 \\ 0 & \cos(\beta L) \end{vmatrix} - ch(\beta L) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sin(\beta L) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \cos(\beta L)\, sh(\beta L) - \sin(\beta L)\, ch(\beta L) = 0$$

3) La fonction $f(x) = \cos(x)\, sh(x) - \sin(x)\, ch(x)$ est nulle pour $x \simeq 3{,}9$ et $x \simeq 7{,}1$. On en déduit les fréquences propres :

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{\beta_1^2}{2\pi}\sqrt{\frac{EI_{Gz}}{\rho S}} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{3{,}9}{L}\right)^2\sqrt{\frac{EI_{Gz}}{\rho S}}$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{7{,}1}{L}\right)^2\sqrt{\frac{EI_{Gz}}{\rho S}}$$