Exercice 8 :

1) Vérifier que le DL_3 en 0 de la fonction $f(x) = \sqrt{1-x}$ est égal à $1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$.

$f(x) = \sqrt{1-x} = (1-x)^{1/2}$ $\qquad\qquad$ $f(0) = \sqrt{1-x} = \sqrt{1} = 1.$

$f\,'(x) = \frac{1}{2}(-1)\ (1-x)^{1/2-1} = -\frac{1}{2}\ (1-x)^{-1/2}$; $f\,'(0) = -\frac{1}{2}\ (1)^{-1/2} = -\frac{1}{2}\ (1) = -\frac{1}{2}$.

$f\,''(x) = -\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-1)\ (1-x)^{-1//2-1} = -\frac{1}{4}\ (1-x)^{-3/2}$; $f\,''(0) = -\frac{1}{4}\ (1)^{-3/2} = -\frac{1}{4}\ (1) = -\frac{1}{4}$.

$f\,'''(x) = -\frac{1}{4}\ (-\frac{3}{2})(-1)\ (1-x)^{-3/2-1} = -\frac{3}{8}\ (1-x)^{-5/2}$; $f\,''(0) = -\frac{3}{8}\ (1)^{-5/2} = -\frac{3}{8}\ (1) = -\frac{3}{8}$.

On obtient donc (formule de Taylor) :

$f(x) = 1 + (-\frac{1}{2})\ x + \frac{-1/4}{2}x^2 + \frac{-3/8}{6}x^3 + o(x^3) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3).$

2) Déterminer le DL_3 en 0 de la fonction $g(x) = \frac{1}{2+x}$.

$g(x) = \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+((1/2)x)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-((-1/2)x)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-u}$ avec $u = -\frac{1}{2}x$.

Or on sait que le DL_3 en 0 de $\frac{1}{1-x}$ est $1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$.

u tend vers 0 lorsque x tend vers 0 et est de la forme kx^{α} avec $k = -\frac{1}{2}$ et $\alpha = 1 \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{1}{2}(1 + (-\frac{1}{2}x) + (-\frac{1}{2}x)^2 + (-\frac{1}{2}x)^3 + o(x^3)) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + o(x^3))$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3).$$

Le DL_3 en 0 de g est donc : $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$.

3) En déduire le DL_3 en 0 de la fonction $t(x) = \sqrt{1-x} \times \frac{1}{2+x} = f(x)\,g(x)$.

$$t(x) = f(x)\,g(x) = (1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3).)\ (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3))$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3$$
$$-\frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3$$
$$-\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{32}x^3$$
$$-\frac{1}{32}x^3 + o(x^3)$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{3}{16}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + o(x^3)$$

(On développe en ne conservant que les termes de degré inférieurs ou égaux à 3, les autres termes étant des $o(x^3)$).

Le DL_3 en 0 de t est donc $t(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{3}{16}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + o(x^3)$.

4) Déterminer alors une valeur approchée de $\dfrac{\sqrt{0,96}}{2,04}$.

$\dfrac{\sqrt{0,96}}{2,04} = \dfrac{\sqrt{1-0,04}}{2+0,04} = t(0,04)$.

0,04 est proche de 0 .

Donc $t(0,04) \approx \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}(0,04) + \dfrac{3}{16}(0,04)^2 - \dfrac{1}{8}(0,04)^3 \approx \dfrac{1}{2} - 0,02 + \dfrac{3}{16}(0,0016) - \dfrac{1}{8}(0,000064)$

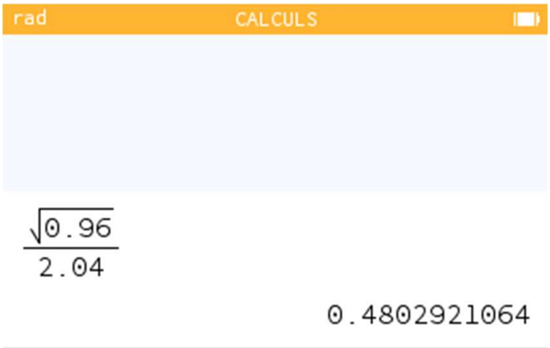
$\approx 0,5 - 0,02 + 3(0,0001) - 0,000008$

$\approx 0,50 - 0,02 + 0,0003 - 0,000008$

$\approx 0,48 + 0,000292$

$\approx 0,480292$

NB : avec la machine :



5) Déterminer le DL_3 en 0 de la fonction $h(x) = \sqrt{1-\ln(1+x)}$.

$h(x) = \sqrt{1-u} = f(u)$ avec $u = \ln(1 + x)$.

f admet un DL_3 en 0 : $1 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 - \dfrac{1}{16}x^3 + o(x^3)$.

$u = \ln(1+x) \xrightarrow[x\to 0]{} \ln(1) = 0$

et u admet un DL_3 en 0 : $x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)$.

h admet donc un DL_3 en 0 que l'on peut trouver à l'aide de celui de f.

$h(x) = 1 - \dfrac{1}{2}(x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)). - \dfrac{1}{8}(x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3))^2 - \dfrac{1}{16}(x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3))^3 + o(x^3)$.

Or : $(x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3))^2 = (x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)) \times (x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3))$

$= x^2 - \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{1}{2}x^3 + o(x^3)$ (multiplication de deux DL)

$= x^2 - x^3 + o(x^3)$

Et $(x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3))^3 = (x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)) \times (x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3))^2$

$= (x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)) \times (x^2 - x^3 + o(x^3))$

$= x^3 + o(x^3)$ (multiplication de deux DL)

Donc $h(x) = 1 - \dfrac{1}{2}(x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)). - \dfrac{1}{8}(x^2 - x^3 + o(x^3)) - \dfrac{1}{16}(x^3 + o(x^3)) + o(x^3)$.

$= 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{6}x^3$

$- \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{8}x^3$

$- \dfrac{1}{16}x^3 + o(x^3) = 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{8}x^2 - \dfrac{5}{48}x^3 + o(x^3)$: DL_3 en 0 de h.