FACULTÉ DE DROIT ÉCONOMIE & GESTION

Licence EG - Semestre 3 - 2023-2024
TECHNIQUES QUANTITATIVES
Calcul intégral (exercices) (1/2)

Exercice 1

Montrer que $F(x) = 7+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{3x^3}$ est une primitive sur]0, +∞[de la fonction

$f(x) = \frac{-x^2+2x-5}{x^4}$. Déterminer une autre primitive de f sur I.

Exercice 2

Soient les fonctions f et g définies sur $I =]-\frac{1}{2};+\infty[$ par $f(x) = \frac{ax+b}{\sqrt{2x+1}}$ et $g(x) = \frac{4x+9}{(2x+1)^{3/2}}$.

1) Quelles doivent–être les valeurs des réels a et b pour que f soit une primitive de g sur I?
2) Déterminer alors la primitive de g qui vaut 2 en 5.

Exercice 3 La fonction définie sur I =]0, +∞[par g(x) = –1 a-t-elle pour primitive sur I la fonction définie sur I par $G(x) = \ln(1 + e^{-x}) - \ln(1 + e^{x})$?

Exercice 4 Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué :

$a(x) = 1 +2x - x^2 + \frac{4}{3}x^5$, $I = \mathbb{R}$

$b(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{9}{4\sqrt{x}} + 2$, $I = \mathbb{R}^{+*}$

$c(x) = 4\sqrt{x} - 3x^{3/4} + \frac{5}{x\sqrt{x}} - \frac{8}{x^3}$, $I = \mathbb{R}^{+*}$

$d(x) = (4-9x)^5 - 1$, $I = \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{x^3+x^2}{(3x^4+4x^3+2)^5}$, $I =]0, +\infty[$

$g(x) = 3x\sqrt{6x^2+1}$, $I = \mathbb{R}$

$h(x) = \frac{3}{4x\sqrt{\ln(x)}}$, $I =]1, +\infty[$

$k(x) = 4e^x - 15$, $I = \mathbb{R}$

$p(x) = 2e^{8x+5}$, $I = \mathbb{R}$

$q(x) = -2e^{-x}$, $I = \mathbb{R}$

$r(x) = (4x^5 - 15x^8)\,e^{5x^9-2x^6+1}$, $I = \mathbb{R}$

$s(x) = \frac{2}{25x^2}e^{\frac{4}{5x}}$, $I =]0, +\infty[$

$t(x) = \frac{1}{x}$, $I =]0, +\infty[$

$\alpha(x) = \frac{1}{x}$, $J =]-\infty, 0[$

$\beta(x) = \frac{4}{4x+3}$, $I = \left]-\frac{3}{4},+\infty\right[$ puis $v(x) = \frac{4x}{4x+3}$

$\gamma(x) = \frac{5x^3+3x}{5x^4+6x^2+8}$, $I = \mathbb{R}$

Exercice 5 Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué :

$a(x) = \frac{60e^{5x}}{1+4e^{5x}}$, $I = \mathbb{R}$

$b(x) = 4(e^{-x})^5$, $I = \mathbb{R}$

$c(x) = 256e^x(3 + 4e^x)^{15}$, $I = \mathbb{R}$

$d(x) = \frac{\ln(x)}{x}$, $I =]0, +\infty[$

$f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$, $I =]1, +\infty[$

<u>Exercice 6</u> : Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué :

$a(x) = \dfrac{90x+12}{45x^2+12x-1}$, I =]1/15; +∞[$\qquad$ $b(x) = \dfrac{4x+1}{45x^2+12x-1}$, I =] –1/3; 1/15[

$c(x) = \dfrac{1}{4x^2-20x+25}$, I =]5/2; +∞[$\qquad$ $d(x) = \dfrac{1-3x}{(5-x)^2}$, I =]– ∞ ; 5[

$v(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, I = ℝ $\quad$ $f(x) = \dfrac{1}{1+4x^2}$, I = ℝ $\quad$ $g(x) = \dfrac{1}{25+x^2}$, I = ℝ

$h(x) = \dfrac{1}{16+5x^2}$ $\qquad$ $v(x)m(x) = \dfrac{1}{45x^2+12x+1}$, I = ℝ $\quad$ $n(x) = \dfrac{90x+7}{45x^2+12x+1}$, I = ℝ

<u>Exercice 7</u> : Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur I = ℝ.:

$f(x) = \dfrac{1}{5x^2-2x+1}$, $g(x) = \dfrac{10x-2}{5x^2-2x+1}$, $h(x) = \dfrac{x}{5x^2-2x+1}$ et $v(x) = \dfrac{10x^2}{5x^2-2x+1}$.

<u>Exercice 9</u> On considère la fonction f définie sur ℝ par : $f(x) = \dfrac{15x^3-x^2+30x-6}{3x^2+x+4}$.

1) Déterminer les réels a,b,c et d tels que, pour tout x, on a : $f(x) = ax + b + \dfrac{cx+d}{3x^2+x+4}$.

2) En déduire une primitive de f sur ℝ, puis celle qui s'annule pour x = 1.

<u>Exercice 10</u> : Calculer les intégrales suivantes :

1) $A = \displaystyle\int_1^5 \frac{4t^3-5t+3}{2t}dt$ $\qquad$ 2) $B = \displaystyle\int_{-1}^0 x^3(1-5x)^2dx$ $\qquad$ 3) $C = \displaystyle\int_{-1}^2 \frac{4}{(5-2t)^3}dt$

4) $D = \displaystyle\int_{-1}^{1/2} \frac{5u}{3+4u^2}du$ $\qquad$ 5) $E = \displaystyle\int_0^1 \frac{du}{1+u^2}$ $\qquad$ 6) $F = \displaystyle\int_{-3/\sqrt{5}}^4 \frac{1}{9+5t^2}dt$

7) $G = \displaystyle\int_{-1}^3 2^x dx$ $\qquad$ 8) $H = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

<u>Exercice 11</u>

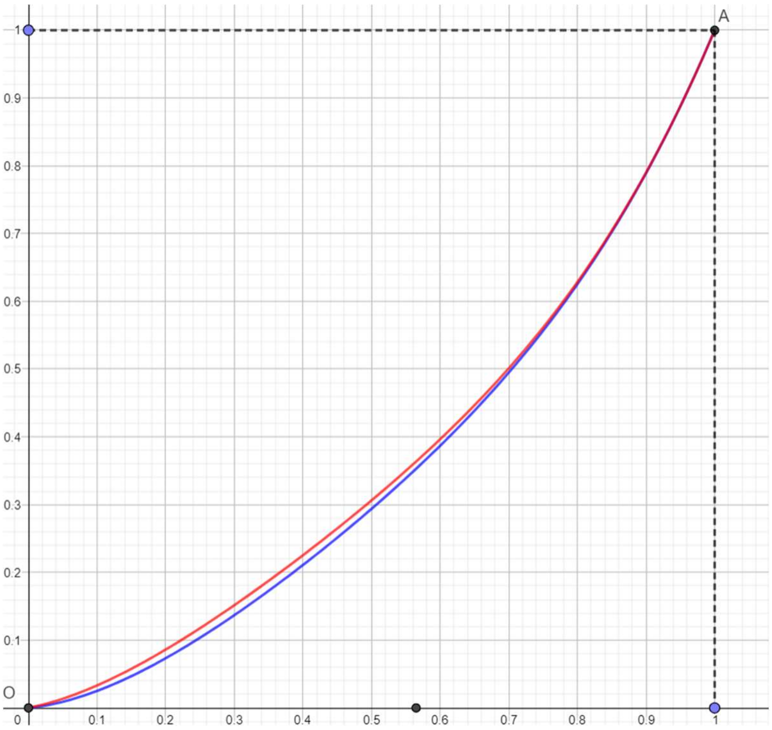
1) Trouver p > 4/5 tel que $\displaystyle\int_1^p \frac{10}{(4-5t)^3}dt = 99$.

2) Trouver c > 0 tel que $\displaystyle\int_c^5 \frac{1}{3t+1}dt = \ln(2)$.

<u>Exercice 12</u> : On considère la fonction f définie sur ℝ définie par : $f(t) = \begin{cases} \dfrac{5}{2} \text{ si } x<4 \\ \dfrac{1}{3\sqrt{x}} \text{ si } x \geq 4 \end{cases}$

Calculer $\displaystyle\int_{-15}^1 f(t)dt$, $\displaystyle\int_9^{16} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_{-1}^{25} f(t)dt$.

Exercice 13 : Voici les courbes approchant les courbes de Lorenz rendant compte de la concentration du revenu des ménages dans un même pays en 2 020 et 2 021.



L'une correspond à la représentation sur l'intervalle [0 ; 1] de la fonction $g : x \mapsto 1,3x^4 - 2,1x^3 + 1,7x^2 + 0,1x$ et l'autre à celle de la fonction $f : x \mapsto 1,3x^4 - 2x^3 + 1,5x^2 + 0,2x$.

1) Interpréter g(0,5) et f(0,5).
2) En 2 020 :
  a) Quel pourcentage du revenu des ménages se partagent les 40% des ménages les plus pauvres?
  b) Quelle part du total des revenus les 20% des ménages les plus riches se partagent-ils ?
  c) Calculer l'intégrale $\int_0^1 (x - f(x))\,dx$. En déduire le coefficient de Gini du revenu en 2020.
3) Calculer le coefficient de Gini du revenu en 2021.

Exercice 14 Calculer, grâce à une intégration par parties, les intégrales suivantes :

$A = \int_1^9 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$ $\quad B = \int_{5/6}^1 3xe^{6x-5}dx$ $\quad C = \int_3^7 \ln(5t^2 - 4t - 1)dt$

$D = \int_{-1}^{\sqrt{3}} x^3 \arctan(x)dx$ $\quad E = \int_0^{1/2} 36x^3(4x^2 - 1)^8 dx$

Exercice 15 : Utiliser un changement de variable pour calculer les intégrales suivantes :

$A = \int_0^{2\ln 2} \frac{dx}{1 + 2e^{5x}}$ $\quad B = \int_1^e \frac{(\ln(t))^2 + 9\ln(t) + 14}{t\ (2 + \ln(t))^4}dt$

$C = \int_0^{\ln(5)} \frac{e^x}{2 - 2e^x + e^{2x}}dx$ (poser $t = e^x - 1$) $\quad D = \int_1^{16/5} \frac{dx}{\sqrt{x}\ (5x + 16)}$

Exercice 16

Dans chacun des cas suivants, déterminer la primitive sur I qui vaut 2 en 1 de la fonction f définie par :

1) $f(x) = \ln(x)$, $I = \mathbb{R}^{+*}$ 2) $f(x) = \arctan(x)$, $I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = x^2 (2x+1)^{(-3/2)}$, $I =]-1/2 ;+\infty[$

Exercice 17 : Soient $A = \int_2^6 \frac{1}{t^3} e^{\frac{2}{t}} dt$ et $B = \int_{1/3}^1 x\, e^x dx$.

1) Calculer, grâce à une intégration par parties, l'intégrale B.

2) Soit $A = \int_2^6 \frac{1}{t^3} e^{\frac{2}{t}} dt$. Déterminer le réel k tel que $A = k \int_{1/3}^1 x\, e^x dx$. En déduire la valeur de A.

Exercice 18

Une étude statistique a permis d'établir qu'à partir du début de l'année 2010, le taux des ménages équipés d'un ordinateur dans une ville V est donné approximativement, en fonction du nombre t d'années écoulées depuis le début de l'année 2010, par :

$$f(t) = \frac{1}{1+1{,}25e^{-0{,}09t}} = \frac{e^{0{,}09t}}{e^{0{,}09t}+1{,}25}.$$

On suppose que f (t) est une approximation satisfaisante, au moins jusqu'en 2030, du taux des ménages équipés d'un ordinateur dans la ville V.

En utilisant cette approximation, déterminer une valeur approchée du pourcentage moyen des ménages équipés entre le début de l'année 2014 et le début de l'année 2023.

Exercice 19

1) Soit $u_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n e^t\, dt$ pour $n \geq 0$. Calculer u_0 et u_1.

2) Trouver, pour tout $n \neq 0$, une relation entre u_n et u_{n+1} et en déduire que : $u_n\ u_n = e - 1 - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!}$

3) Montrer que, pour tout $n \neq 0$: $0 \leq u_n \leq \frac{e}{n!}$. En déduire que : $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!} \right) = e$.

Exercice 20

Soit f une application continue de I vers $\mathbb{R}$ où I est un intervalle.

Soient a et b deux réels de I. On suppose que $\int_a^b f(x)dx = 0$.

Montrer qu'il existe alors un réel $c \in]a ;b[$ tel que $f(c) = 0$.