Exercice 16

3) $f(x) = x^2 (2x+1)^{-3/2}$, I =]–1/2 ;+ ∞[.

La fonction $H(x) = \int_{\dots}^{x} f(t)dt$ est une primitive calculer cette intégrale à l'aide d'une IPP.

$u' = (2t+1)^{-3/2} = (\frac{1}{2})(2)(2t+1)^{-3/2}$ = « k u' u^n » ¦ $u = \frac{1}{2} \times \frac{1}{-3/2+1}(2t+1)^{(-3/2+1)} = -(2t+1)^{-1/2}$

$v = t^2$ ¦ $v' = 2t$

$$H(x) = [-(2t+1)^{-1/2} \times t^2]_{\dots}^{x} - \int_{\dots}^{x} -(2t+1)^{-1/2}(2t)dt$$

$$= -(2x+1)^{-1/2} \times x^2 - \dots + \int_{\dots}^{x} t \times 2(2t+1)^{-1/2}dt$$

$$= -(2x+1)^{-1/2} \times x^2 - \dots + B(x) \text{ avec } B(x) = \int_{\dots}^{x} t \times 2(2t+1)^{-1/2}dt$$

IPP pour calculer B(x) :

$u' = 2(2t+1)^{-1/2}$ = « u' u^n » ¦ $u = \frac{1}{-1/2+1}(2t+1)^{(-1/2+1)} = 2(2t+1)^{1/2}$

$v = t$ ¦ $v' = 1$

$$B(x) = [2(2t+1)^{1/2} \times t]_{\dots}^{x} - \int_{\dots}^{x} 2(2t+1)^{-1/2}(1)dt$$

$$= 2(2x+1)^{1/2} \times x - \dots - \int_{\dots}^{x} 2(2t+1)^{1/2}dt$$

$$= 2(2x+1)^{-1/2} \times x - \dots - T(x) \text{ avec } T(x) = \int_{\dots}^{x} 2(2t+1)^{1/2}dt$$

$g(t) = 2(2t+1)^{1/2}$ = « u' u^n » donc une primitive est $G(t) = \frac{1}{1/2+1}(2t+1)^{(1/2+1)} = \frac{2}{3}(2t+1)^{3/2}$

D'où $T(x) = [\frac{2}{3}(2t+1)^{3/2}]_{\dots}^{x} = \frac{2}{3}(2x+1)^{3/2} - \dots$

On a donc $H(x) = -(2x+1)^{-1/2} \times x^2 + 2(2x+1)^{1/2} \times x - \frac{2}{3}(2x+1)^{3/2} - \dots$

Une primitive de f sur I est $F(x) = \frac{1}{3}(2x+1)^{-1/2}(-3x^2 + 6(2x+1)x - 2(2x+1)^2)$

$$= \frac{1}{3}(2x+1)^{-1/2}(-3x^2 + 12x^2 + 6x - 2(4x^2 + 4x + 1))$$

$$= \frac{1}{3}(2x+1)^{-1/2}(-3x^2 + 12x^2 + 6x - 8x^2 - 8x - 2)$$

$$= \frac{1}{3}(2x+1)^{-1/2}(x^2 - 2x - 2)$$

$$= \frac{x^2 - 2x - 2}{3\sqrt{2x+1}}.$$

Ou : Calcul de $H(x) = \int_{\dots}^{x} f(t)dt = \int_{\dots}^{x} t^2(2t+1)^{-3/2}dt$ à l'aide d'un changement de variable.

Nouvelle variable : a = 2t + 1.

$a = 2t + 1 \Leftrightarrow 2t = a - 1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}(a-1)$

* bornes :

Si t = … alors a = …

Si t = x alors a = 2x + 1

* dt : $t = \frac{1}{2}(a-1)$

On dérive : $\frac{dt}{da} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$ donc $dt = \frac{1}{2}da$

* fonction : $x^2 (2x+1)^{-3/2} = (\frac{1}{2}(a-1))^2 a^{-3/2} = (\frac{1}{2})^2 (a-1)^2 a^{-3/2} = \frac{1}{4}(a-1)^2 a^{-3/2}$

Changement de variable :

$$H(x) = \int_{\dots}^{x} f(t)dt = \int_{\dots}^{x} t^2(2t+1)^{-3/2}dt = \int_{\dots}^{2x+1} \frac{1}{4}(a-1)^2 a^{-3/2} \frac{1}{2}da = \frac{1}{8}\int_{\dots}^{2x+1} (a-1)^2 a^{-3/2}da$$

$$= \frac{1}{8}\int_{\dots}^{2x+1} (a^2 - 2a + 1)a^{-3/2}da$$

$$= \frac{1}{8}\int_{\dots}^{2x+1} (a^{2-3/2} - 2a^{1-3/2} + a^{-3/2})da$$

$$= \frac{1}{8}\int_{\dots}^{2x+1} (a^{1/2} - 2a^{-1/2} + a^{-3/2})da$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{1/2+1}a^{1/2+1} - 2\frac{1}{-1/2+1}a^{-1/2+1} + \frac{1}{-3/2+1}a^{-3/2+1}\right]_{\dots}^{2x+1}$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{2}{3}a^{3/2} - 4a^{1/2} - 2a^{-1/2}\right]_{\dots}^{2x+1}$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{2}{3}(2x+1)^{3/2} - 4(2x+1)^{1/2} - 2(2x+1)^{-1/2}\right) - \dots$$

$$= \frac{1}{12}(2x+1)^{3/2} - \frac{1}{2}(2x+1)^{1/2} - \frac{1}{4}(2x+1)^{-1/2} - \dots$$

Une primitive de f sur I est $G(x) = \frac{1}{12}(2x+1)^{3/2} - \frac{1}{2}(2x+1)^{1/2} - \frac{1}{4}(2x+1)^{-1/2}$

NB : $\frac{1}{12}(2x+1)^{3/2} - \frac{1}{2}(2x+1)^{1/2} - \frac{1}{4}(2x+1)^{-1/2} = \frac{1}{12}(2x+1)^{-1/2}\left((2x+1)^2 - 6(2x+1) - 3\right)$

$$= \frac{1}{12}(2x+1)^{-1/2}(4x^2 + 4x + 1 - 12x - 6 - 3)$$

$$= \frac{1}{12}(2x+1)^{-1/2}(4x^2 - 8x - 8)$$

$$= \frac{4}{12}(2x+1)^{-1/2}(x^2 - 2x - 2)$$

$$= \frac{1}{3}(2x+1)^{-1/2}(x^2 - 2x - 2) = \frac{x^2-2x-2}{3\sqrt{2x+1}} = F(x).$$