FACULTÉ DE DROIT ÉCONOMIE & GESTION

Licence EG - Semestre 3 - 2023-2024

TECHNIQUES QUANTITATIVES

Calcul intégral (exercices)(2/2)

Exercice 1 :

Etudier la convergence des intégrales suivantes. Calculer, lorsque c'est possible, leur valeur.

$A = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^5}\,dt$ $\quad B = \int_{-\infty}^{2} \frac{x^7}{16+x^8}\,dx$ $\quad C = \int_0^1 \frac{1}{t^5}\,dt$ $\quad D = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$

$E = \int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$ $\quad F = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ $\quad G = \int_0^{+\infty} \frac{2}{5t+3}\,dt$

$I = \int_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^4}\,dt$ $\quad J = \int_{-\infty}^{2} \frac{x^3}{16+x^8}\,dx$ $\quad K = \int_{-\infty}^{0} t e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ $\quad L = \int_{-\infty}^{-1} \frac{2}{3+4x}\,dx$

$M = \int_{8/3}^{3} \frac{2}{(3x-8)^5}\,dx$ $\quad N = \int_1^{+\infty} \frac{12}{(6t-5)^4}\,dt$ $\quad O = \int_4^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ $\quad P = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$

$Q = \int_{16}^{+\infty} \frac{1}{t\,(\sqrt[4]{t})^5}\,dt$ $\quad R = \int_0^{16} \frac{1}{t\,(\sqrt[4]{t})^5}\,dt$ $\quad S = \int_0^1 \ln x\,dx$

Exercice 2 : Soient $F(x) = \frac{2x-3}{x^2+1}$ et $f(x) = \frac{-2x^2+6x+2}{(x^2+1)^2}$ deux fonctions définies sur IR.

1) Montrer que F est une primitive de f sur IR.

2) L'intégrale généralisée $I = \int_0^{+\infty} f(x)dx$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa valeur ?

Exercice 3 :

1) Déterminer trois constantes réelles A, B et C tels que :

$$p(x) = 5x^2 - 12x + 9 = A \times \left[(Bx+C)^2 + 1\right] \text{ pour } x \in \text{IR}.$$

2) Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \frac{1}{p(x)} = \frac{1}{5x^2-12x+9}$.

a) L'intégrale $\int_{9/5}^{+\infty} \frac{1}{5x^2-12x+9}\,dx$ est–elle convergente ? Si oui, donner sa valeur.

b) L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{5x^2-12x+9}\,dx$ est–elle convergente ? Si oui, donner sa valeur.

Exercice 4 :

1) Trouver a tel que $\int_a^{+\infty} 5e^{1-2t}dt = 45/2$

2) Trouver b > 0 tel que $\int_0^{+\infty} te^{-bt}dt = 1/3$ (faire une IPP)

Exercice 5 : Soit f la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{-55}{4x^2-5x-6}$.

1) Déterminer deux réels a et b tels que : pour tout $x \in]2;+\infty[$ $\quad f(x) = \dfrac{a}{4x+3} + \dfrac{b}{x-2}$.

2) En déduire la primitive de f sur $]2;+\infty[$ qui s'annule en 3.

3) Les intégrales généralisées $E = \displaystyle\int_3^{+\infty} f(x)dx$ et $F = \displaystyle\int_2^{3} f(x)dx$ sont–elles convergentes ?

Si oui, que valent–elles ?

Exercice 6 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \dfrac{-150x^2+54}{(2x+5)(10x^3+9)}$.

1) Déterminer deux constantes réelles a et b tels que : pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ $\quad f(x) = \dfrac{a}{2x+5} + \dfrac{bx^2+c}{10x^3+9}$.

2) En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}^+$.

3) L'intégrale généralisée $A = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ est–elle convergente ? Si oui, quelle est sa valeur ?

Exercice 7 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{16}{(3x+5)^4} & \text{si } x < -2 \\ -1 & \text{si } -2 \leq x \leq 5 \\ ke^{-2x+10} & \text{si } x > 5 \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$.

1) L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ est–elle convergente ? Si oui, quelle est sa valeur ?

2) Déterminer k pour que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_5^{+\infty} f(x)\,dx$ soit convergente et égale à 8.

Exercice 8 : Soit la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} f(t) = 3e^{-3t} & \text{si } t \geq 0 \\ f(t) = 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$.

Etudier la fonction définie sur IR par $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

Exercice 9 : On pose, pour tout $x \geq 1$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$.

1) a) Calculer $\Gamma(1)$.

b) Soit n un nombre entier strictement positif. On admet que $\Gamma(n)$ existe.
Démontrer alors que $\Gamma(n+1)$ existe et trouver une relation entre $\Gamma(n+1)$ et $\Gamma(n)$.

c) En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in IN^*$.

2) En admettant que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, et par un changement de variable adéquat, calculer la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.