Exercice 1 :

Etudier la convergence des intégrales suivantes. Calculer, lorsque c'est possible, leur valeur.

1) $A = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^5} dt$ $\quad A = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^5} dt$ $\quad$ Soit $a > 1$. $\quad$ Soit l'intégrale $A(a) = \int_1^{a} \frac{1}{t^5} dt$.

$$A(a) = \int_1^a t^{-5} dt = \left[\frac{t^{-5+1}}{-5+1}\right]_1^a = \left[\frac{t^{-4}}{-4}\right]_1^a = \left[\frac{1}{-4t^4}\right]_1^a = -\frac{1}{4a^4} - \left(-\frac{1}{4\times 1^4}\right) = -\frac{1}{4a^4} + \frac{1}{4}$$

$$\lim_{a\to+\infty} A(a) = \lim_{a\to+\infty} \left(-\frac{1}{4a^4} + \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4(+\infty)} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{+\infty} + \frac{1}{4} = -0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \in IR.$$

L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^5} dt$ est convergente et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^5} dt = \frac{1}{4}$.

2) $B = \int_{-\infty}^{2} \frac{x^7}{16+x^8} dx$ $\quad B = \int_{-\infty}^{2} \frac{x^7}{16+x^8} dx$ $\quad$ Soit $a < 2$. $\quad$ Soit l'intégrale $B(a) = \int_a^{2} \frac{x^7}{16+x^8} dx$.

$B(a) = \int_a^2 \frac{x^7}{16+x^8} dx = \int_a^2 \frac{1}{8}\frac{8x^7}{16+x^8} dx = \int_a^2 k\frac{u'}{u} dx$ avec $k = (1/8)$, $u = 16 + x^8$ et $u' = 8x^7$

$$= \left[\frac{1}{8}\ln(16+x^8)\right]_a^2 \text{ car } 16 + x^8 > 0 \text{ pour tout x de IR}$$

$$= \frac{1}{8}\ln(16+(2)^8) - \frac{1}{8}\ln(16+a^8)$$

$$= \frac{1}{8}\ln(16+256) - \frac{1}{8}\ln(16+a^8)$$

$$= \frac{1}{8}\ln(272) - \frac{1}{8}\ln(16+a^8)$$

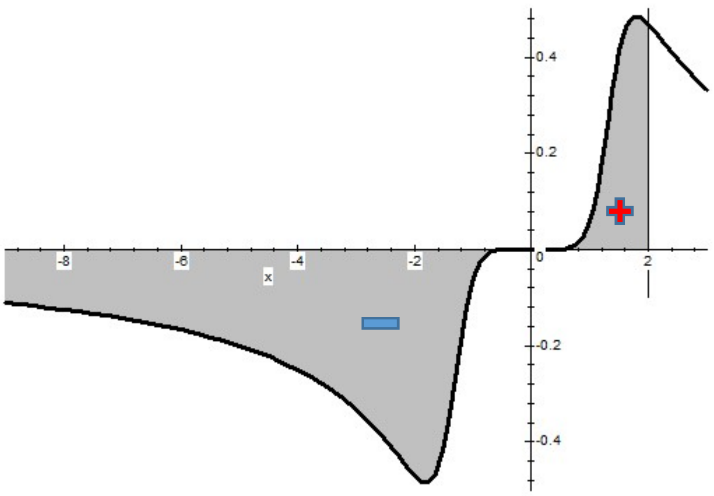
$$\lim_{a\to-\infty} B(a) = \lim_{a\to-\infty} \left(\frac{1}{8}\ln(272) - \frac{1}{8}\ln(16+a^8)\right) = \lim_{a\to-\infty} \left(\frac{1}{8}\ln(272) - \frac{1}{8}\ln(a^8)\right)$$

$$= \frac{1}{8}\ln(272) - \frac{1}{8}\ln(+\infty) \qquad \text{(8 est pair)}$$

$$= \frac{1}{8}\ln(272) - \frac{1}{8}(+\infty)$$

$$= \frac{1}{8}\ln(272) - (+\infty)$$

$$= -\infty \qquad \text{limite non finie}$$



L'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{2} \frac{x^7}{16+x^8} dx$ est divergente .

3) $C = \int_0^1 \frac{1}{t^5}\,dt$ $\qquad C = \int_0^1 \frac{1}{t^5}\,dt$: 0 n'appartient pas au domaine de définition de f.

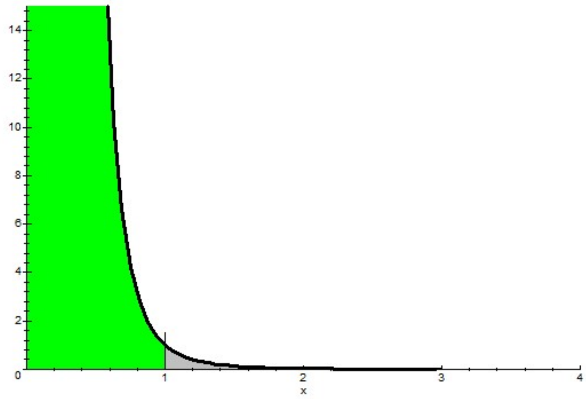
Soit $0 < a < 1$. Soit l'intégrale $C(a) = \int_a^1 \frac{1}{t^5}\,dt$.

$$C(a) = \int_a^1 t^{-5}dt = \left[\frac{1}{-4t^4}\right]_a^1 = -\frac{1}{4\times 1^4} - \left(-\frac{1}{4a^4}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4a^4}$$

$$\lim_{a\to 0} C(a) = \lim_{a\to 0}\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4a^4}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4(0^+)} \quad (\text{« + » car 4 est pair})$$

$$= -\frac{1}{4} + (+\infty) = +\infty : \text{ limite non finie}$$

L'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{1}{t^{-5}}\,dt$ est divergente .



$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^5}\,dt$: convergente et égale à $\frac{1}{4}$

$\int_0^1 \frac{1}{t^5}\,dt$: divergente

<u>NB</u>: L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^5}\,dt$ est divergente car $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^5}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{t^5}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^5}\,dt$ et $\int_0^1 \frac{1}{t^5}\,dt$ est divergente.

4) $D = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$

$$D = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = D_1 + D_2 \text{ (relation de Chasles)}$$

D est convergente si D_1 et D_2 le sont

* $D_1 = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+t^2}\,dt$: Soit $a < 0$. Soit l'intégrale $D_1(a) = \int_a^0 \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

$$D_1(a) = \int_a^0 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \left[\arctan(t)\right]_a^0 = \arctan(0) - \arctan(a) = 0 - \arctan(a) = -\arctan(a)$$

$$\lim_{a\to-\infty} D_1(a) = \lim_{a\to-\infty} (-\arctan(a)) = -\arctan(-\infty) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \in \mathrm{IR}.$$

L'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ est convergente et vaut $\frac{\pi}{2}$.

* $D_2 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$: Soit $0 < a$. Soit l'intégrale $D_2(a) = \int_0^{a} \frac{1}{1+t^2}dt$.

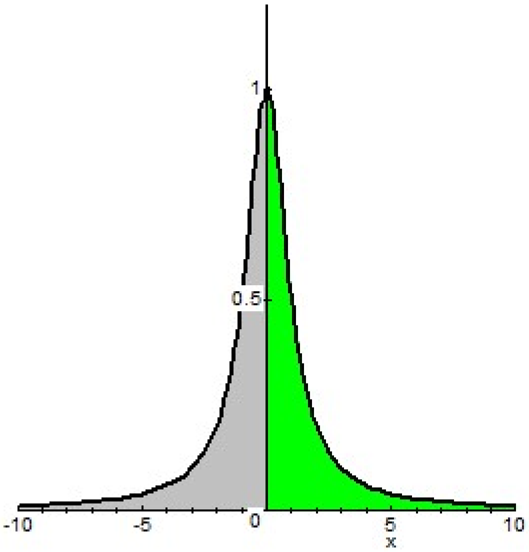
$D_2(a) = \int_0^{a} \frac{1}{1+t^2}dt = \left[\arctan(t)\right]_0^a = \arctan(a) - \arctan(0) = \arctan(a) - 0 = \arctan(a)$

$\lim\limits_{a \to +\infty} D_2(a) = \lim\limits_{a \to +\infty} (\arctan(a)) = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2} \in IR.$

L'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ est convergente et vaut $\frac{\pi}{2}$.

<u>CCL</u> : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ est convergente

et vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+t^2}dt + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$



$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+t^2}dt$ convergente et égale à $\frac{\pi}{2}$

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ convergente et égale à $\frac{\pi}{2}$

5) $E = \int_0^1 \frac{1}{t}dt$ $\qquad$ $E = \int_0^1 \frac{1}{t}dt$: 0 n'appartient pas au domaine de définition de f.

Soit $0 < a < 1$. Soit l'intégrale $E(a) = \int_a^1 \frac{1}{t}dt$.

$E(a) = \int_a^1 \frac{1}{t}dt = \left[\ln(t)\right]_a^1$ car $t > 0$ sur $[a ; 1]$

$= \ln(1) - \ln(a) = 0 - \ln(a) = - \ln(a)$

$\lim\limits_{a \to 0+} E(a) = \lim\limits_{a \to 0+} (- \ln(a)) = - \ln(0^+) = - (- \infty) = +\infty$: limite non finie

L'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{1}{t}dt$ est divergente

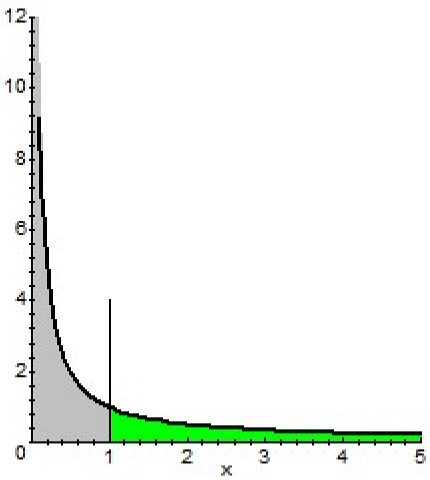
6) $F = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ $\quad F = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ $\quad$ Soit $a > 1$. $\quad$ Soit l'intégrale $F(a) = \int_1^{a} \frac{1}{t}\,dt$.

$F(a) = \int_1^{a} \frac{1}{t}\,dt = [\ln(t)]_1^a$ (car $t > 0$ sur $[1\,;a]$) $= \ln(a) - \ln(1) = \ln(a) - 0 = \ln(a)$

$\lim_{a\to+\infty} F(a) = \lim_{a\to+\infty} (\ln(a)) = \ln(+\infty) = +\infty$: limite non finie

L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ est divergente

<u>NB</u> : $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt = \int_0^{1} \frac{1}{t}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$; $\int_0^{1} \frac{1}{t}\,dt$ est divergente…et donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ est divergente.



$\int_0^{1} \frac{1}{t}\,dt$ est divergente

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ est divergente

7) $G = \int_0^{+\infty} \frac{2}{5t+3}\,dt$ $\quad G = \int_0^{+\infty} \frac{2}{5t+3}\,dt$

Soit $a > 0$. $\quad$ Soit l'intégrale $G(a) = \int_0^{a} \frac{2}{5t+3}\,dt$.

$G(a) = \int_0^{a} 2\frac{1}{5}\frac{5}{5t+3}\,dt = \int_0^{a} k\frac{u'}{u}\,dt$ avec $k = 2/5$, $u = 5t + 3$ et $u' = 5$

$= \left[\frac{2}{5}\ln(5t+3)\right]_0^a$ ($5t + 3 > 0$ sur $[0\,;a]$ donc pas de valeur absolue)

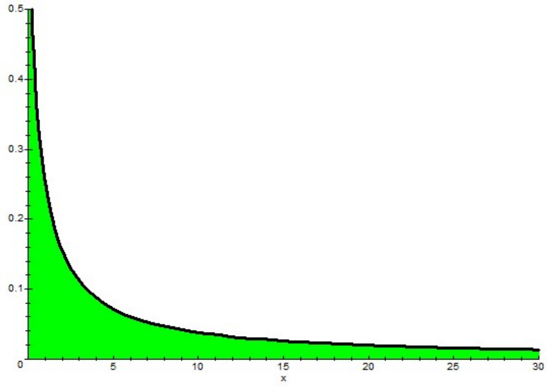
$= \frac{2}{5}\ln(5a + 3) - \frac{2}{5}\ln(5(0) + 3)$

$= \frac{2}{5}\ln(5a + 3) - \frac{2}{5}\ln(3)$

$\lim_{a\to+\infty} G(a) = \lim_{a\to+\infty} (\frac{2}{5}\ln(5a + 3) - \frac{2}{5}\ln(3)) = \frac{2}{5}\ln(+\infty) - \frac{2}{5}\ln(3) = \frac{2}{5}(+\infty) - \frac{2}{5}\ln(3)$

$= +\infty - \frac{2}{5}\ln(3) = +\infty$

Limite non finie



L'intégrale généralisée $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{2}{5t+3}dt}$ est divergente

8) $I = \boxed{\int_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^4}dt}$ $\qquad I = \int_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^4}dt$

Soit $a > e^2$; $I(a) = \int_{e^2}^{a} \frac{1}{t(\ln(t))^4}dt$

$$I(a) = \int_{e^2}^{a} \frac{1}{t}(\ln(t))^{-4}dt = \int_{e^2}^{a} ku'u^n dt \text{ avec } k = 1,\ n = -4\ ,\ u = \ln(t) \text{ et } u' = 1/t$$

$$= \left[\frac{1}{-4+1}(\ln(t))^{-4+1}\right]_{e^2}^{a}$$

$$= \left[-\frac{1}{3(\ln(t))^3}\right]_{e^2}^{a}$$

$$= -\frac{1}{3(\ln(a))^3} - \left(-\frac{1}{3(\ln(e^2))^3}\right)$$

$$= -\frac{1}{3(\ln(a))^3} + \frac{1}{3(2\ln(e))^3}$$

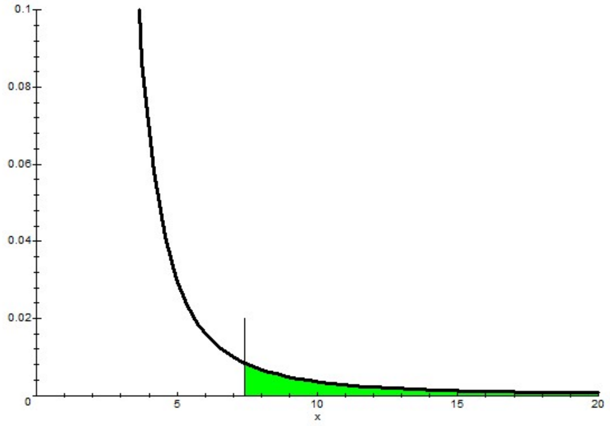
$$= -\frac{1}{3(\ln(a))^3} + \frac{1}{3(2)^3}$$

$$= -\frac{1}{3(\ln(a))^3} + \frac{1}{24}$$

$$\lim_{a\to+\infty} I(a) = \lim_{a\to+\infty} \left(-\frac{1}{3(\ln(a))^3} + \frac{1}{24}\right) = -\frac{1}{3(+\infty)^3} + \frac{1}{24} = -\frac{1}{3(+\infty)} + \frac{1}{24}$$

$$= -\frac{1}{+\infty} + \frac{1}{24}$$

$$= -0 + \frac{1}{24} = \frac{1}{24} \in \mathrm{IR}\ .$$



L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^4}dt$ est donc convergente et $\displaystyle\int_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^4}dt = \frac{1}{24}$.

9) $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{x^3}{16+x^8}dx$ $\qquad$ $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{x^3}{16+x^8}dx$

Soit $a < 2$; $J(a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{x^3}{16+x^8}dx$

$$\frac{x^3}{16+x^8} = \frac{x^3}{16(1+\frac{1}{16}x^8)} = \frac{x^3}{16(1+(\frac{1}{4}x^4)^2)} = \frac{1}{16}\frac{x^3}{1+(\frac{1}{4}x^4)^2}$$

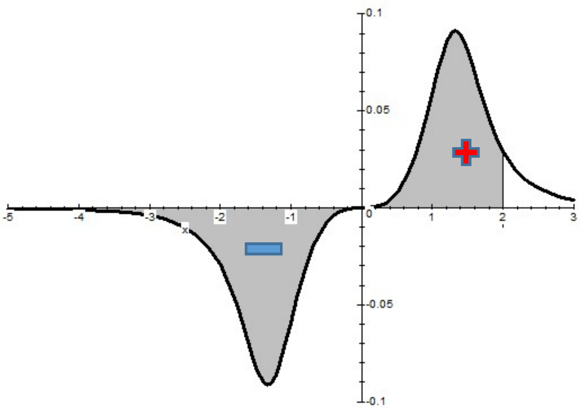
$$= k\frac{u'}{1+u^2} \text{ avec } k = \frac{1}{16},\ u = \frac{1}{4}x^4 \text{ et } u' = x^3$$

Donc $J(a) = \left[\frac{1}{16}\arctan(\frac{1}{4}x^4)\right]_a^2 = \frac{1}{16}\arctan(\frac{1}{4}2^4) - \frac{1}{16}\arctan(\frac{1}{4}a^4) = \frac{1}{16}\arctan(4) - \frac{1}{16}\arctan(\frac{1}{4}a^4)$

$$\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{16}\arctan(4) - \frac{1}{16}\arctan(\frac{1}{4}a^4)\right) = \frac{1}{16}\arctan(4) - \frac{1}{16}\arctan(+\infty)$$

$$= \frac{1}{16}\arctan(4) - \frac{1}{16}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\arctan(4) - \frac{\pi}{32} \text{ : limite finie}$$



L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{x^3}{16+x^8}dx$ est donc convergente

et $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{x^3}{16+x^8}dx = \frac{1}{16}\arctan(4) - \frac{\pi}{32}$.

10) $K = \int_{-\infty}^{0} te^{-\frac{t^2}{2}}dt$ $\qquad$ $K = \int_{-\infty}^{0} te^{-\frac{t^2}{2}}dt$

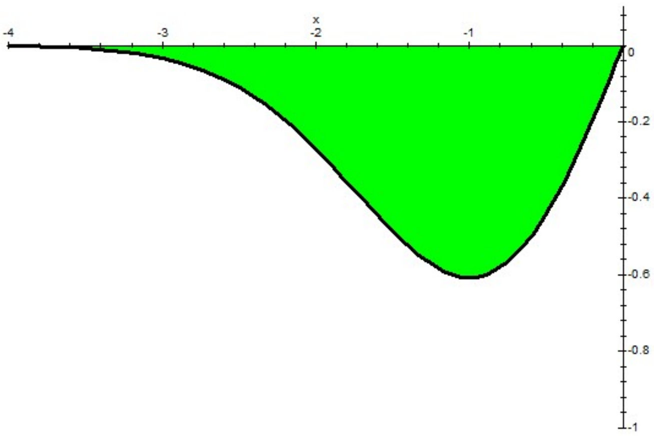
Soit $a < 0$; $K(a) = \int_{a}^{0} te^{-\frac{t^2}{2}}dt$

$$K(a) = \int_{a}^{0} (-1)(-1)te^{-\frac{t^2}{2}}dt = \int_{a}^{0} -(-t)e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$= \int_{a}^{0} ku'e^{u}dt \text{ avec } k = -1,\ u = -\frac{1}{2}t^2 \text{ et } u' = -t$$

$$= \left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_a^0 = -e^0 - (-e^{-\frac{a^2}{2}}) = -1 + e^{-\frac{a^2}{2}}$$

$$\lim_{a\to-\infty} (-1 + e^{-\frac{a^2}{2}}) = -1 + e^{-\frac{(-\infty)^2}{2}} = -1 + e^{-\frac{+\infty}{2}} = -1 + e^{-\infty} = -1 + 0 = -1 \in \mathrm{IR}$$



L'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{0} te^{-\frac{t^2}{2}}dt$ est donc convergente et vaut -1.

11) $L = \int_{-\infty}^{-1} \frac{2}{3+4x}dx$ $\qquad$ $L = \int_{-\infty}^{-1} \frac{2}{3+4x}dx$

Soit $a < -1$. $\qquad$ Soit l'intégrale $L(a) = \int_{a}^{-1} \frac{2}{4x+3}dx$.

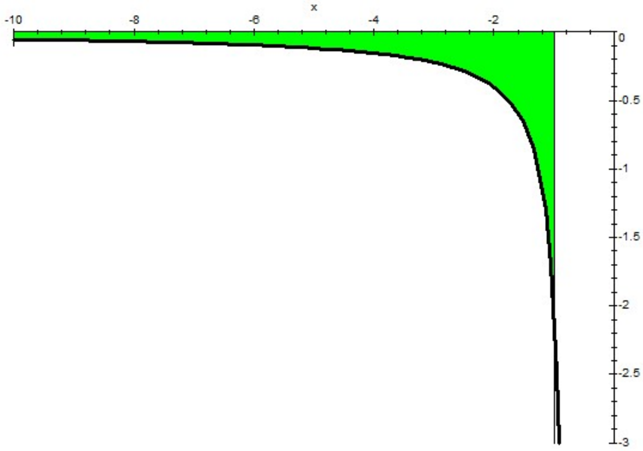
$$L(a) = \int_{a}^{-1} 2\frac{1}{4}\frac{4}{4x+3}dx = \int_{a}^{-1} k\frac{u'}{u}dx \text{ avec } k = 1/2 \text{ , } u = 4x+3 \text{ et } u' = 4$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln(|4x+3|)\right]_a^{-1} \quad (4x + 3 < 0 \text{ sur } [a\ ;-1] \text{ donc valeur absolue})$$

$$= \frac{1}{2}\ln(|-1|) - \frac{1}{2}\ln(|4a + 3|)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1) - \frac{1}{2}\ln(|4a + 3|) = -\frac{1}{2}\ln(|4a + 3|)$$

$$\lim_{a\to-\infty} L(a) = \lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}\ln(|4a+3|)\right) = -\frac{1}{2}\ln(|-\infty|) = -\frac{1}{2}\ln(+\infty) = -\frac{1}{2}(+\infty) = -\infty$$ Limite non finie



L'intégrale généralisée $\boxed{\int_{-\infty}^{-1}\frac{2}{3+4x}dx}$

est divergente

12) $M = \boxed{\int_{8/3}^{3}\frac{2}{(3x-8)^5}dx}$ $\qquad M = \int_{8/3}^{3}\frac{2}{(3x-8)^5}dx$.

Soit $8/3 < a < 3$; $M(a) = \int_{a}^{3}\frac{2}{(3x-8)^5}dx$

$$L(a) = \int_{a}^{3} 2(3x-8)^{-5}dx = \int_{a}^{3} 2\times\frac{1}{3}(3)(3x-8)^{-5}dx$$

$$= \int_{a}^{3}\frac{2}{3}(3)(3x-8)^{-5}dx$$

$$= \int_{a}^{3} ku'u^n dx$$ avec $k = 2/3$, $n = -5$, $u = 3x - 8$ et $u' = 3$

$$= \left[\frac{2}{3}\times\frac{1}{-5+1}(3x-8)^{-5+1}\right]_a^3$$

$$= \left[-\frac{1}{6(3x-8)^4}\right]_a^3$$

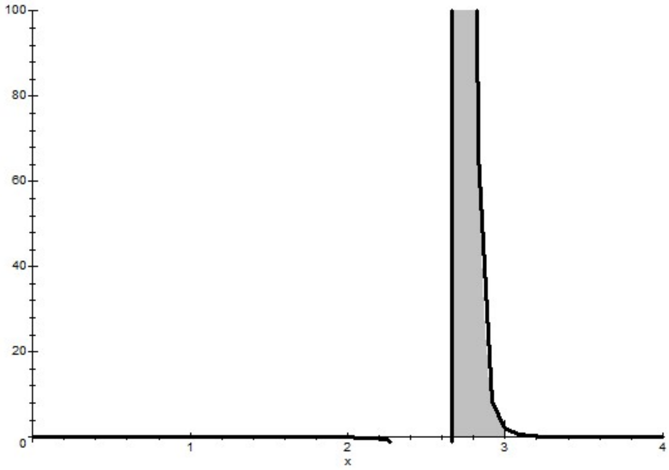
$$= -\frac{1}{3(3(3)-8)^4} - \left(-\frac{1}{6(3a-8)^4}\right)$$

$$= -\frac{1}{6(1)^4} - \left(-\frac{1}{6(3a-8)^4}\right)$$

$$= -\frac{1}{6} + \frac{1}{6(3a-8)^4}$$

$$\lim_{a\to(8/3)^+}\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{6(3a-8)^4}\right) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6(0^+)^4} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6(0^+)} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{0^+} = -\frac{1}{6} + (+\infty) = +\infty :$$

limite non finie



L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{8/3}^{3} \frac{2}{(3x-8)^5}\,dx$ est divergente.

13) $N = \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{12}{(6t-5)^4}\,dt$ Soit $a > 1$. Soit l'intégrale $N(a) = \displaystyle\int_{1}^{a} \frac{12}{(6t-5)^4}\,dt$.

$$N(a) = \int_{1}^{a} \frac{12}{(6t-5)^4}\,dt = \int_{1}^{a} 12(6t-5)^{-4}\,dt$$

$$= \int_{1}^{a} 12\frac{1}{6}\times 6(6t-5)^{-4}\,dt$$

$$= \int_{1}^{a} ku'u^n\,dt \text{ avec } k = 2,\ n = -4,\ u = 6t-5 \text{ et } u' = 6$$

$$= \left[2\frac{1}{-4+1}(6t-5)^{-4+1}\right]_1^a = \left[-\frac{2}{3(6t-5)^3}\right]_1^a$$

$$= -\frac{2}{3(6a-5)^3} - \left(-\frac{2}{3(6(1)-5)^3}\right)$$

$$= -\frac{2}{3(6a-5)^3} + \frac{2}{3(1)^3}$$

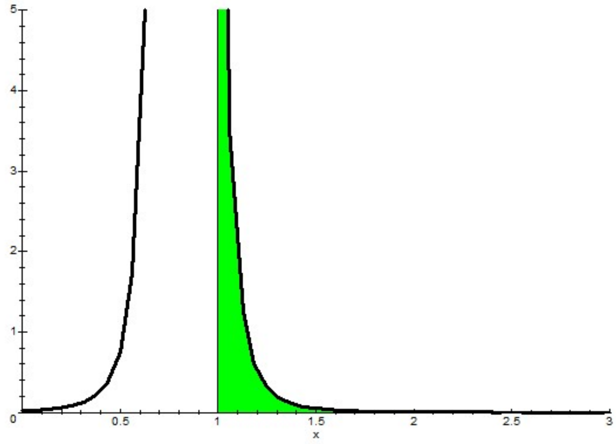
$$= -\frac{2}{3(6a-5)^3} + \frac{2}{3(1)} = -\frac{2}{3(6a-5)^3} + \frac{2}{3}$$

$$\lim_{a\to+\infty} N(a) = \lim_{a\to+\infty} \left(-\frac{2}{3(6a-5)^3} + \frac{2}{3}\right)$$ (limite en l'infini d'un polynôme :

$$= \lim_{a\to+\infty} \left(-\frac{2}{3(6a)^3} + \frac{2}{3}\right)$$ on prend le terme de plus haut degré)

$$= \lim_{a\to+\infty} \left(-\frac{2}{3(216a^3)} + \frac{2}{3}\right)$$

$$= \lim_{a\to+\infty} \left(-\frac{2}{648a^3} + \frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{324a^3} + \frac{2}{3} = -\frac{1}{+\infty} + \frac{2}{3} = -0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$: limite finie



L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{12}{(6t-5)^4}dt$ est donc convergente et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{12}{(6t-5)^4}dt = \frac{2}{3}$.

14) $O = \displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ $O = \displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}dt$. $\dfrac{1}{\sqrt{t}} = \dfrac{1}{t^{1/2}}$

Soit $a > 4$; $O(a) = \displaystyle\int_4^{a} t^{-1/2}dt = \left[\frac{t^{-1/2+1}}{-1/2+1}\right]_4^a = \left[\frac{t^{1/2}}{1/2}\right]_4^a = 2\sqrt{a} - 2\sqrt{4} = 2\sqrt{a} - 4$.

$\lim\limits_{a\to+\infty} O(a) = \lim\limits_{a\to+\infty} (2\sqrt{a} - 4) = 2(+\infty) - 4 = +\infty + 4 = +\infty$: limite non finie.

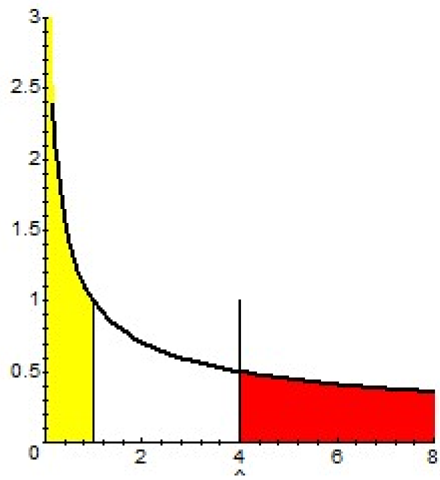
donc $O = \displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ est divergente.

15) $P = \displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ $P = \displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{t}}dt$.

Soit $0 < a < 1$; $P(a) = \displaystyle\int_a^{1} t^{-1/2}dt = \left[\frac{t^{-1/2+1}}{-1/2+1}\right]_a^1 = \left[\frac{t^{1/2}}{1/2}\right]_a^1 = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{a} = 2 - 2\sqrt{a}$.

$\lim\limits_{a\to0^+} P(a) = \lim\limits_{a\to0^+} (2 - 2\sqrt{a}) = 2 - 2(0) = 2 - 0 = 2$: limite finie.

Donc $P = \displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ est convergente et vaut 2.



16) $Q = \int_{16}^{+\infty} \frac{1}{t\,(\sqrt[4]{t})^5}\,dt$ $\qquad$ $Q = \int_{16}^{+\infty} \frac{1}{t\,(\sqrt[4]{t})^5}\,dt$

$$\frac{1}{t\,(\sqrt[4]{t})^5} = \frac{1}{t\,(t^{1/4})^5} = \frac{1}{t\,(t^{5/4})} = \frac{1}{t^{1+5/4}} = \frac{1}{t^{9/4}}$$

Soit $a > 16$; $Q(a) = \int_{16}^{a} t^{-9/4}dt = \left[\frac{t^{-9/4+1}}{-9/4+1}\right]_{16}^{a} = \left[\frac{t^{-5/4}}{-5/4}\right]_{4}^{a} = -\frac{4}{5}a^{-5/4} - (-\frac{4}{5}16^{-5/4})$

$$= -\frac{4}{5}a^{-5/4} + \frac{4}{5}(2^4)^{-5/4}$$
$$= -\frac{4}{5}a^{-5/4} + \frac{4}{5}(2^{4\times(-5/4)})$$
$$= -\frac{4}{5}a^{-5/4} + \frac{4}{5}\times 2^{-5}$$
$$= -\frac{4}{5}a^{-5/4} + \frac{4}{5\times 2^5}$$
$$= -\frac{4}{5}a^{-5/4} + \frac{4}{5\times 32}$$
$$= -\frac{4}{5}a^{-5/4} + \frac{1}{5\times 8}$$
$$= -\frac{4}{5}a^{-5/4} + \frac{1}{40}$$

<u>Rappel</u> : Soient un réel β et t un réel strictement positif. $t^\beta = e^{\beta\ln(t)}$

Si $\beta > 0$, $\lim_{t\to+\infty} t^\beta = \lim_{t\to+\infty} e^{\beta\ln(t)} = e^{\beta(+\infty)} = e^{+\infty} = +\infty$

Si $\beta < 0$, $\lim_{t\to+\infty} t^\beta = \lim_{t\to+\infty} e^{\beta\ln(t)} = e^{\beta(+\infty)} = e^{-\infty} = 0$

$-5/4 < 0$.

$\lim_{a\to+\infty} Q(a) = \lim_{a\to+\infty} (-\frac{4}{5}a^{-5/4} + \frac{1}{40}) = -\frac{4}{5}(0) + \frac{1}{40} = 0 + \frac{1}{40} = \frac{1}{40}$: limite finie.

Donc l'intégrale généralisée $Q = \int_{16}^{+\infty} \frac{1}{t\,(\sqrt[4]{t})^5}\,dt$ est convergente et vaut $\frac{1}{40}$.

<u>NB</u> : Plus généralement : soit $c > 0$; l'intégrale généralisée $\int_{c}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$ est convergente ssi $\alpha > 1$.

17) $R = \int_{0}^{16} \frac{1}{t\,(\sqrt[4]{t})^5}\,dt$ $\qquad$ $R = \int_{0}^{16} \frac{1}{t\,(\sqrt[4]{t})^5}\,dt$

Soit $0 < a < 16$; $R(a) = \int_{a}^{16} t^{-9/4}dt = \left[\frac{t^{-9/4+1}}{-9/4+1}\right]_{a}^{16} = \left[\frac{t^{-5/4}}{-5/4}\right]_{a}^{16} = -\frac{4}{5}16^{-5/4} - (-\frac{4}{5}a^{-5/4})$

$$= \frac{1}{40} - \frac{4}{5}a^{-5/4}.$$

<u>Rappel</u> : Soient un réel β et t un réel strictement positif. $t^\beta = e^{\beta\ln(t)}$

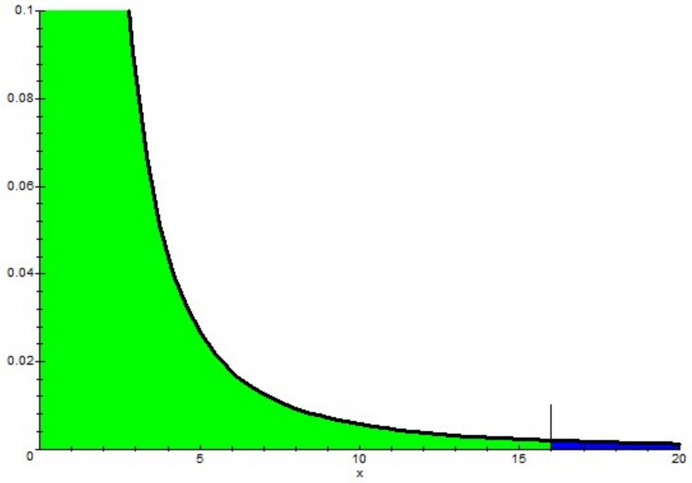
Si $\beta > 0$, $\lim_{t\to 0^+} t^\beta = \lim_{t\to 0^+} e^{\beta\ln(t)} = e^{\beta(-\infty)} = e^{-\infty} = 0$

Si $\beta < 0$, $\lim_{t\to 0^+} t^\beta = \lim_{t\to 0^+} e^{\beta\ln(t)} = e^{\beta(+\infty)} = e^{+\infty} = +\infty$

$-5/4 < 0$.

$$\lim_{a\to 0^+} R(a) = \lim_{a\to 0^+} \left(\frac{1}{40} - \frac{4}{5}a^{-5/4}\right) = \frac{1}{40} - \frac{4}{5}(-\infty) = \frac{1}{40} + (+\infty) = +\infty$$: limite non finie.

Donc l'intégrale généralisée $R = \displaystyle\int_0^{16} \frac{1}{t\,(\sqrt[4]{t})^5}\,dt$ est divergente.



18) $S = \displaystyle\int_0^1 \ln x \, dx$ $\qquad$ $S = \displaystyle\int_0^1 \ln x \, dx$

Soit $0 < a < 1$; $S(a) = \displaystyle\int_0^1 \ln x \, dx = \int_a^1 1 \times \ln x \, dx$

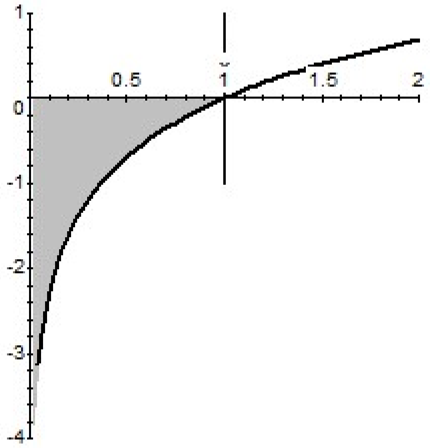
<u>IPP</u> : $v = \ln(x)$ $\qquad$ $v' = 1/x$
$u' = 1$ $\qquad$ $u = x$

$$S(a) = \left[x \times \ln(x)\right]_a^1 - \int_a^1 \frac{1}{x}(x)dx = 1\times\ln(1) - a\ln(a) - \int_a^1 1dx$$

$$= 0 - a\ln(a) - \left[x\right]_a^1 = -a\ln(a) - (1-a) = -a\ln(a) - 1 + a.$$

$\displaystyle\lim_{a\to 0^+} a\ln(a)$ = « $0 \times (-\infty)$ » : F.I. mais on admet que $\displaystyle\lim_{a\to 0^+} a\ln(a) = 0$.

$\displaystyle\lim_{a\to 0^+} (-a\ln(a) - 1 + a) = -0 - 1 + 0 = -1$: limite finie .



L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \ln x \, dx$ est donc convergente et

$\displaystyle\int_0^1 \ln x \, dx = -1$.