FDEG Faculté de droit, économie & gestion, Université d'Orléans	**Licence EG** **TECHNIQUES QUANTITATIVES**	**2022-2023** **CC1** **durée : 1h30**
Nom-Prénom :		

DL_n : développement limité d'ordre n.

EXERCICE 1 : Soit la fonction définie pour x ∈ par $f(x) = e^{1-\sqrt{1+4x}}$.

1) a) Vérifier, en utilisant la formule de Taylor, que le DL_2 en 0 de f est : $f(x) = 1 - 2x + 4x^2 + o(x^2)$ (reste)

$f(0) = e^{1-\sqrt{1+4(0)}} = e^{1-\sqrt{1}} = e^{1-1} = e^0 = 1$.

$f(x) = e^{1-\sqrt{1+4x}} = e^{1-(1+4x)^{1/2}}$.

$f'(x) = u' e^u = = -\frac{1}{2}(4)(1+4x)^{1/2-1}\, e^{1-(1+4x)^{1/2}} = -2(1+4x)^{-1/2}\, e^{1-(1+4x)^{1/2}}$; $f'(0) = -2(1)\, e^0 = -2(1) = -2$.

$f''(x) = u'v + uv' = -2(-\frac{1}{2})(4)(1+4x)^{-1/2-1}\, e^{1-(1+4x)^{1/2}} + (-2)(1+4x)^{-1/2}(-\frac{1}{2})(4)(1+4x)^{1/2-1}\, e^{1-(1+4x)^{1/2}}$

$= 4(1+4x)^{-3/2}\, e^{1-(1+4x)^{1/2}} + 4(1+4x)^{-1/2}(1+4x)^{-1/2}\, e^{1-(1+4x)^{1/2}}$

$= 4(1+4x)^{-3/2}\, e^{1-(1+4x)^{1/2}} + 4(1+4x)^{-1}\, e^{1-(1+4x)^{1/2}}$

$= 4(1+4x)^{-3/2}\, e^{1-(1+4x)^{1/2}}[1 + (1+4x)^{1/2}] = 4(1+4x)^{-3/2}\, e^{1-(1+4x)^{1/2}}[1 + \sqrt{4x+1}]$

$f''(0) = 4(1)^{-3/2}\, e^0[1 + \sqrt{1}] = 4(1)(1)(2) = 8$.

On obtient donc (formule de Taylor) : $\mathbf{f(x)} = 1 + (-2)x + \frac{8}{2}x^2 + o(x^2)$ $= \mathbf{1 - 2x + 4x^2 + o(x^2)}$

b) En déduire une valeur approchée de $d = e^{1-\sqrt{1,12}}$. (d = f(…))

d = f(0,03) (1,12 = 1 + 4(0,03)) et 0,03 est proche de 0 .

Donc $\mathbf{f(0,03)} \approx 1 - 2(0,03) + 4(0,03)^2 \approx 1 - 0,06 + 4(0,0009)$

$\approx 1 - 0,06 + 0,0036 \approx \mathbf{0,9436}$

2) a) On admet que le DL_2 en 0 de la fonction définie pour x > 1 par $g(x) = \sqrt{1-x}$ est : $g(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$

En déduire :

le DL_2 en 0 de la fonction définie par $h(x) = \sqrt{1+4x}$, puis celui de la fonction u définie par $u(x) = 1 - \sqrt{1+4x}$.

$h(x) = \sqrt{1+4x} = \sqrt{1-(-4x)} = g(-4x) = g(v)$ avec $v = -4x$ qui est de la forme kx^α avec $k = -4$ et $\alpha = 1 \in$ IN*

Le DL_2 en 0 h est donc : $h(x) = 1 - \frac{1}{2}(-4x) - \frac{1}{8}(-4x)^2 + o(x^2) = 1 + 2x - \frac{16x^2}{8} + o(x^2) = 1 + 2x - 2x^2 + o(x^2)$

Et celui de u en 0 est $\mathbf{u(x)} = 1 - (1 + 2x - 2x^2 + o(x^2)) = \mathbf{-2x + 2x^2 + o(x^2)}$

b) Rappeler le DL_2 en 0 de la fonction définie par $v(x) = e^x$.

On a $\mathbf{e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}$

c) Retrouver en utilisant le questions 2a) et 2b) que le DL_2 en 0 de f est : $f(x) = e^{1-\sqrt{1+4x}} = 1 - 2x + 4x^2 + o(x^2)$

$f(x) = e^u$ avec $u(x) = 1 - \sqrt{1+4x}$.

$u(0) = 1 - 1 - \sqrt{1} = 1 - 1 = 0$.

u admet un DL_2 en 0 : $u(x) = -2x + 2x^2 + o(x^2)$

Donc, par composition, f admet un DL_2 en 0 .

$\mathbf{f(x)} = 1 + (-2x + 2x^2) + \frac{1}{2}(-2x + 2x^2)^2 + o(x^2) = 1 - 2x + 2x^2 + \frac{1}{2}(4x^2) + o(x^2)$

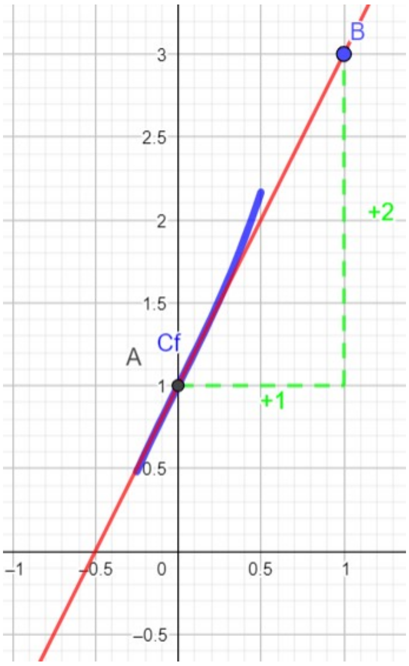
$= 1 - 2x + 2x^2 + 2x^2 + o(x^2)$

$\mathbf{= 1 - 2x + 4x^2 + o(x^2)}$

EXERCICE 2 :

On admet que le DL_3 en 0 de la fonction f définie par $f(x) = e^{\sqrt{1+4x}-1}$ est $f(x) = 1 + 2x + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$

1) Proposer un tracé local de C_f , courbe représentative de f, pour x voisin de 0.



→ f(0) = 1 ; A(0 ;1) ∈ C_f

→ f ’(0) = 2 ;
Une équation de la tangente à Cf en A est y = 1 + 2x.
A ∈ (T)
Pour obtenir un second point, soit on utilise A et la pente 2 :
on obtient le point B,
soit on remarque par exemple que si x = 1/2,
y = 1 + 2(1/2) = 1 + 1 = 2 : (1/2 ;2) ∈ Cf.

→ $f(x) - (1 + 2x) = \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$.

Si x est proche de 0, $f(x) - (2 - 3x) \approx \frac{4}{3}x^3$.

Or $x^3 < 0$ si $x < 0$, $x^3 > 0$ si $x > 0$ et $\frac{4}{3} > 0$.

Donc : $f(x) - (1 + 2x) < 0$ si $x < 0$: Cf est en dessous de (T)
$f(x) - (1 + 2x) > 0$ si $x > 0$: Cf est au dessus de (T)

2) Déterminer le DL_3 en 0 de la fonction g définie pour $x \neq 2$ par $g(x) = \frac{1}{2-x}$.

$g(x) = \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-u}$ avec $u = \frac{1}{2}x$.

Or on sait que le DL_2 en 0 de $\frac{1}{1-x}$ est $1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$.

u est de la forme kx^α avec $k = \frac{1}{2}$ et $\alpha = 1 \in$ IN*.

Le DL_3 en 0 de g est donc : $\frac{1}{2}(1+(\frac{1}{2}x) +(\frac{1}{2}x)^2 +(\frac{1}{2}x)^3 + o(x^3)) = \frac{1}{2}(1 +\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 +\frac{1}{8}x^3 + o(x^3))$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

3) Déduire des questions précédentes le DL_3 en 0 de $t(x) = \frac{e^{\sqrt{1+4x}-1}}{2-x}$.

$t(x) = f(x)\,g(x) = (1 + 2x + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3))\,(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3))$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

On développe en ne conservant que les

$$+ x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3$$

termes de degré inférieurs ou égaux à 3.

$$+\frac{2}{3}x^3 + o(x^3) = \frac{1}{2} + \frac{5}{4}x + \frac{5}{8}x^2 + \frac{47}{48}x^3 + o(x^3)$$

EXERCICE 3 : Déterminer les limites suivantes à l'aide de développements limités :

1) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{x}$ Cherchons le DL_1 en 0 de $e^{3x} - 1$.

$f(x) = e^{3x} - 1 = f(0) + f'(0)\,x + o(x)$; $f(0) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$, $f'(x) = 3e^{3x}$ donc $f'(0) = 3\,e^0 = 3(1) = 3$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0+3x+o(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x+o(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{3x}{x}+\frac{o(x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \left(3 + \frac{x\varepsilon(x)}{x}\right) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$= \lim_{x\to 0} (3 + \varepsilon(x)) = 3 + 0 = 3.$$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)-x^2}{x^2}$ Cherchons le DL_2 en 0 de $\ln(1 + x^2)$.

On sait que $\ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

$f(x) = \ln(1 + x^2) = \ln(1 + u)$ avec $u = x^2$ qui est de la forme kx^α avec $k = 1$ et $\alpha = 2 \in \mathbb{N}^*$

Le DL_2 en 0 f est donc : $f(x) = (x^2) - \frac{1}{2}(x^2) + o(x^2) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^2) = x^2 + o(x^2) + o(x^2) = x^2 + o(x^2)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)-x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+o(x^2)-x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\varepsilon(x)}{x^2}) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$= \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

EXERCICE 4: Pour chacune des fonctions suivantes : déterminer la primitive de f sur I qui s'annule en 1.

1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x-1}}$ $\quad I = \left]\frac{1}{4};+\infty\right[$

$f(x) = (4x - 1)^{-1/2} = k\ u'\,u^n$?

$n = -1/2$ $\quad u = 4x - 1$ $\quad u' = 4$

$f(x) = (\frac{1}{4})((4)(4x - 1)^{-1/2} = \frac{1}{4}(4)(4x - 1)^{-1/2} = k\ u'\,u^n$ avec $k = \frac{1}{4}$.

Une primitive de f sur I est $F(x) = \frac{1}{4}\,\frac{1}{-1/2+1}\,(4x - 1)^{-1/2+1} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{1/2}\,(4x - 1)^{1/2} = \frac{1}{4}\,(2)\,\sqrt{4x-1} = \frac{1}{2}\sqrt{4x-1}$.

Cherchons le réel c tel que $F(1) + c = 0$; $F(1) + c = 0$ ssi $c = -F(1)$.

La primitive recherché est $H(x) = F(x) - F(1) = \frac{1}{2}\sqrt{4x-1} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{3x}}$ $\quad I =]0;+\infty[$ $\quad f(x) = k\,u'\,e^u$?

$u = \frac{1}{3x} = \frac{1}{3}\,x^{-1}$; $\quad u' = \frac{1}{3}(-1)\,x^{-1-1} = -\frac{1}{3}\,x^{-2} = -\frac{1}{3}.\frac{1}{x^2}$

$f(x) = -3\,(-\frac{1}{3}).\frac{1}{x^2}\,e^{\frac{1}{3x}} = -3(-\frac{1}{3}\,\frac{1}{x^2})\,e^{\frac{1}{3x}} = k\,u'\,e^u$ avec $k = -3$.: une primitive de f sur I est $F(x) = -3\,e^{\frac{1}{3x}}$.

Cherchons le réel c tel que $F(1) + c = 0$; $F(1) + c = 0$ ssi $c = -F(1)$.

La primitive recherché est $H(x) = F(x) - F(1) = -3\,e^{\frac{1}{3x}} - (-3\,e^{\frac{1}{3}}) = .\,-3\,e^{\frac{1}{3x}} + 3\,e^{\frac{1}{3}}$.

3) $f(x) = \frac{6x^5+2x^3}{2x^6+x^4+20}$ $\quad I = \mathbb{R}$ $\quad u = 2x^6 + x^4 + 20$; $\quad u' = 12x^5 + 4x^3$

$f(x) = \frac{1}{2}.\frac{2(6x^5+2x^3)}{2x^6+x^4+20} = \frac{1}{2}\,\frac{12x^5+4x^3}{2x^6+x^4+20} = k\,\frac{u'}{u}$ avec $k = \frac{1}{2}$:

une primitive de f sur I est $F(x) = \frac{1}{2}\ln(|2x^6 + x^4 + 20|) = \frac{1}{2}\ln(2x^6 + x^4 + 20)$ car $2x^6 + x^4 + 20 > 0$ sur I

Cherchons le réel c tel que $F(1) + c = 0$; $F(1) + c = 0$ ssi $c = -F(1)$. puisque $2x^6$, $x^4 \geq 0$ et $20 > 0$ sur I.

La primitive recherché est $H(x) = F(x) - F(1) = \frac{1}{2}\ln(2x^6 + x^4 + 20) - \frac{1}{2}\ln(23)$

EXERCICE 5

1) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^4 - x^3 - 9x^2 + 13x + 5 = (x^2 + 3x)(x^2 - 4x + 3) + 4x + 5$.

On développe :

$(x^2 + 3x)(x^2 - 4x + 3) + 4x + 5 = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 3x^3 - 12x^2 + 9x + 4x + 5 = x^4 - x^3 - 9x^2 + 13x + 5$

2) Déterminer **alors** les réels a, b ,c, et d tels que $\dfrac{x^4 - x^3 - 9x^2 + 13x + 5}{x^2 - 4x + 3} = ax^2 + bx + \dfrac{cx + d}{x^2 - 4x + 3}$

$$\frac{x^4 - x^3 - 9x^2 + 13x + 5}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x^2 + 3x)(x^2 - 4x + 3) + 4x + 5}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x^2 + 3x)\cancel{(x^2 - 4x + 3)}}{\cancel{x^2 - 4x + 3}} + \frac{4x + 5}{x^2 - 4x + 3}$$

$$= x^2 + 3x + \frac{4x + 5}{x^2 - 4x + 3}$$

Donc a = 1, b = 3, c = 4 et d = 5.

(la question 1) donne le résultat de la division euclidienne de $x^4 - x^3 - 9x^2 + 13x + 5$ par $x^2 - 4x + 3$.

3) Déterminer les réels A et B tels que $\dfrac{4x + 5}{x^2 - 4x + 3} = \dfrac{A}{x - 1} + \dfrac{B}{x - 3}$

$$\frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 3} = \frac{A(x - 3) + B(x - 1)}{(x - 1)(x - 3)} = \frac{Ax - 3A + Bx - B}{x^2 - 3x - x + 3} = \frac{(A + B)x - 3A - B}{x^2 - 4x + 3}$$

Il y a égalité avec f(x) ssi $\begin{cases} A + B = 4 \\ -3A - B = 5 \end{cases}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ ssi } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 17 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + 3\,L_1$$

$$\text{ssi } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 17 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2$$

$$\text{ssi } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9/2 \\ 17/2 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow (1/2)L_1 \text{ puis } L_2 \leftarrow (1/2)L_2$$

Ce qui correspond au système $\begin{cases} A = -9/2 \\ B = 17/2 \end{cases}$. **On a donc** $\dfrac{4x + 5}{x^2 - 4x + 3} = \dfrac{-9/2}{x - 1} + \dfrac{17/2}{x - 3}$.

4) Déterminer une primitive de $f(x) = \dfrac{x^4 - x^3 - 9x^2 + 13x + 5}{x^2 - 4x + 3}$ sur $I =]3\,;+\infty[$

$f(x) = x^2 + 3 - \dfrac{9}{2}\dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{17}{2}\dfrac{1}{x - 3}\ ) = x^2 + 3 - \dfrac{9}{2}\dfrac{u'}{u} + \dfrac{17}{2}\dfrac{u'}{u}$ avec $u = x - 1$, $u' = 1$, et $u = x - 3$, $u' = 1$

Une primitive de f sur I est $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{9}{2}\ln(|x - 1|) + \dfrac{17}{2}\ln(|x - 3|)$

$= \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{9}{2}\ln(x - 1) + \dfrac{17}{2}\ln(x - 3)$ car $x - 1 > 0$ sur I et $x - 3 > 0$ sur I