FDEG — FACULTÉ DE DROIT ÉCONOMIE & GESTION UNIVERSITÉ D'ORLÉANS	**Licence EG** 2022-2023 **TECHNIQUES QUANTITATIVES CC2** durée : 1h30 **Documents et calculatrices interdits**
Nom-Prénom :	

Toutes les réponses doivent être justifiées

EXERCICE 1: Calculer les intégrales suivantes en déterminant une primitive des fonctions considérées

1) $A = \int_0^2 xe^{5x}dx$ $u' = e^{5x} = \underset{k}{\frac{1}{5}} \cdot \underset{u'}{5}\, \underset{e^u}{e^{5x}}$ | $u = \frac{1}{5}e^{5x}$

$v = x$ | $v' = 1$

IPP: $A = \left[x \cdot \frac{1}{5}e^{5x}\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{1}{5} \cdot e^{5x} \cdot 1\, dx$

$= \frac{2}{5}e^{10} - 0 - \frac{1}{5}\int_0^2 e^{5x}dx$

$= \frac{2}{5}e^{10} - \frac{1}{5}\left[\frac{1}{5}e^{5x}\right]_0^2$

$= \frac{2}{5}e^{10} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}e^{10} - \frac{1}{5}\underbrace{e^0}_{1}\right)$

$A = \frac{2}{5}e^{10} - \frac{1}{25}e^{10} + \frac{1}{25}$

$= \frac{9}{25}e^{10} + \frac{1}{25}$

2) $B = \int_0^1 \ln(x^2+4)dx = \int_0^1 1 \times \ln(x^2+4)\, dx$; $u' = 1$, $v = \ln(x^2+4)$ | $u = x$, $v' = \frac{2x}{x^2+4}$

$B = \left[x\ln(x^2+4)\right]_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{2x}{x^2+4}dx = \ln(5) - 0 - \int_0^1 \frac{2x^2}{x^2+4}dx$ B_1

B_1 :

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 & x^2+4 \\ \hline -(2x^2 \quad +8) & 2 \\ -8 & \end{array}$$

$\frac{2x^2}{x^2+4} = 2 - \frac{8}{x^2+4} = 2 - \frac{8}{4} \times \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}$

$= 2 - \underbrace{2 \times 2}_{k=4} \frac{\overset{u'}{\frac{1}{2}}}{\underbrace{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}_{1+u^2}}$

$B = \ln(5) - \left[2x - 4\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^1$

$= \ln(5) - \left[2 - 4\arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \left(0 - 4\underbrace{\arctan(0)}_{=0}\right)\right] = \ln(5) - 2 + 4\arctan\left(\frac{1}{2}\right) = B$

EXERCICE 2

1) a) Déterminer trois réels A, B et C tels que : $t^2 + t + 1 = A\left[(Bt+C)^2+1\right]$ pour $x \in IR$.

$t^2+t+1 = \left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1$

$= \left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1$

$= \left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

$= \frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right]$

$= \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1\right]$

$= \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]$

$A = \frac{3}{4}$, $B = \frac{2}{\sqrt{3}}$ et $C = \frac{1}{\sqrt{3}}$

b) En déduire la valeur de $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{t^2+t+1}\,dt$.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\frac{3}{4}\left(1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)}\,dt = \int_0^1 \underbrace{\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}_{k=\frac{2\sqrt{3}}{3}}\ \frac{\overbrace{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{u'}}{\underbrace{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}_{1+u^2}}\,dt$$

$\sqrt{3}$

$$I_1 = \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\arctan\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)-\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{3}\times\frac{\pi}{\cancel{6}\,3} = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi = I_1$$

2) Calculer les intégrales $I_2 = \int_0^1 \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,dt$ et $I_3 = \int_0^1 \frac{2t}{t^2+t+1}\,dt$.

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\overbrace{2t+1}^{u'}}{\underbrace{t^2+t+1}_{u}}\,dt = \Big[\ln(\underbrace{|t^2+t+1|}_{>0 \text{ sur } [0;1]})\Big]_0^1 = \ln(3) - \underbrace{\ln(1)}_{=0} = \ln(3)$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{2t+1-1}{t^2+t+1} = \int_0^1 \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,dt - \int_0^1 \frac{1}{t^2+t+1}\,dt$$

$$= I_2 - I_1 = \ln(3) - \frac{\sqrt{3}}{9}\pi.$$

3) A l'aide d'une intégration par parties et des questions précédentes, calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \ln(t^2+t+1)\,dt$.

$$I = \int_0^1 \underbrace{1}_{u'} \times \underbrace{\ln(t^2+t+1)}_{v}\,dt = \Big[\underbrace{t}_{u}\times\underbrace{\ln(t^2+t+1)}_{v}\Big]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{t}_{u}\times\underbrace{\frac{(2t+1)}{t^2+t+1}}_{v'}\,dt$$

$$= \ln(3) - 0 - \underbrace{\int_0^1 \frac{t(2t+1)}{t^2+t+1}\,dt}_{A}$$

$$A = \int_0^1 \frac{2t^2+t}{t^2+t+1}\,dt$$

$$\begin{array}{r|l} 2t^2+t & t^2+t+1 \\ -(2t^2+2t+2) & \overline{2} \\ \hline -t-2 & \end{array}$$

$$\frac{2t^2+t}{t^2+t+1} = 2 + \frac{-t-2}{t^2+t+1} = 2 - \frac{t+2}{t^2+t+1}$$

$$A = \int_0^1 \left(2 - \frac{t+2}{t^2+t+1}\right)dt = \int_0^1 2\,dt - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t}{t^2+t+1}\,dt - 2\int_0^1 \frac{1}{t^2+t+1}\,dt$$

$$= [2t]_0^1 - \frac{1}{2}I_3 - 2I_1$$

$$A = 2 - 0 - \frac{1}{2}\left(\ln(3) - \frac{\sqrt{3}}{9}\pi\right) - 2\times\frac{\sqrt{3}}{3}\pi = 2 - \frac{1}{2}\ln(3) + \frac{\sqrt{3}}{9}\pi\underbrace{\left(\frac{1}{2}-2\right)}_{-\frac{3}{2}}$$

Ccl : $I = \ln(3) - \left(2 - \frac{1}{2}\ln(3) - \frac{\cancel{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{\cancel{9}\,3}\pi\right) = -2 + \frac{3}{2}\ln(3) + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$

EXERCICE 3

1) Effectuer la division euclidienne de $12x^4 - 12x^3 + 15x^2 - 7x + 3$ par $4x^3 - 4x^2 + x$.

$$\begin{array}{l|l} 12x^4 - 12x^3 + 15x^2 - 7x + 3 & 4x^3 - 4x^2 + x \quad \deg Q = 3 \\ -(12x^4 - 12x^3 + 3x^2) & \\ \hline \underbrace{12x^2 - 7x + 3}_{\deg R = 2 < \deg Q} & 3x \end{array}$$

Donc $\underbrace{12x^4 - 12x^3 + 15x^2 - 7x + 3}_{P(x)} = 3x(4x^3 - 4x^2 + x) + 12x^2 - 7x + 3$

2) En déduire que $\dfrac{12x^4 - 12x^3 + 15x^2 - 7x + 3}{4x^3 - 4x^2 + x} = 3x + \dfrac{12x^2 - 7x + 3}{4x^3 - 4x^2 + x} = f(x)$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x) \times 3x + R(x)}{Q(x)} = \frac{\cancel{Q(x)} \times 3x}{\cancel{Q(x)}} + \frac{R(x)}{Q(x)} = 3x + \frac{12x^2 - 7x + 3}{4x^3 - 4x^2 + x}$$

3) Déterminer les réels A et B tels que $\underbrace{\dfrac{12x^2 - 7x + 3}{4x^3 - 4x^2 + x}}_{g(x)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{(2x-1)^2}$

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{(2x-1)^2} = \frac{A(2x-1)^2 + Bx}{x(2x} = \frac{A(4x^2 - 4x + 1) + Bx}{x(4x^2 - 4x + 1)}$$

$$= \frac{4Ax^2 - 4Ax + A + Bx}{4x^3 - 4x^2 + x}$$

$$= \frac{4Ax^2 + (B - 4A)x + A}{4x^3 - 4x^2 + x}$$

Il y a égalité avec $g(x)$ ssi $\begin{cases} 4A = 12 \\ B - 4A = -7 \\ A = 3 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} A = 3 \\ B = -7 + 4A = -7 + 12 \\ \quad = 5 \end{cases}$

On admettra que A = 3 et B = 5

4) Calculer en utilisant les questions précédentes $K = \displaystyle\int_1^2 \frac{12x^4 - 12x^3 + 15x^2 - 7x + 3}{4x^3 - 4x^2 + x} dx$.

$$K = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \left(3x + \frac{12x^2 - 7x + 3}{4x^3 - 4x^2 + x}\right) dx = \int_1^2 \left(3x + \frac{3}{x} + \frac{5}{(2x-1)^2}\right)$$

$$K = \int_1^2 3x\,dx + \int_1^2 3 \times \frac{1}{x}\,dx + \int_1^2 \underbrace{5 \times \frac{1}{2} \times (-1)}_{k} \underbrace{(-1)}_{n} \times \underbrace{2}_{u'} \underbrace{(2x-1)^{-2}}_{u^{n-1}} dx$$

$$= \left[\frac{3}{2}x^2\right]_1^2 + \left[3\ln(\underbrace{|x|}_{>0})\right]_1^2 + \left[-\frac{5}{2}(2x-1)^{-1}\right]_1^2$$

$$= 6 - \frac{3}{2} + 3\ln(2) - \underbrace{3\ln(1)}_{=0} - \frac{5}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{5}{2} \times \frac{1}{1} = 3\ln(2) + \frac{36 - 9 - 5 + 15}{6}$$

$$= 3\ln(2) + \frac{37}{6} = K$$

EXERCICE 4:

1) Calculer à l'aide du changement de variable $x = \sqrt{t} - 5$ l'intégrale $B = \displaystyle\int_{36}^{49} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}-5}\,dt$.

$x = \sqrt{t} - 5 \iff x+5 = \sqrt{t} \iff t = (x+5)^2 \quad (x+5>0)$

* <u>bornes</u> : si $t = 36$, $x = \sqrt{36} - 5 = 6-5 = 1$

si $t = 49$, $x = \sqrt{49} - 5 = 7 - 5 = 2$

* on dérive $t = (x+5)^2$, on obtient $\dfrac{dt}{dx} = 2\times 1\,(x+5)^{2-1}$

donc $dt = 2(x+5)\,dx$

* <u>fonction</u> : $\dfrac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}-5} = \dfrac{x+5}{x}$

$$B = \int_1^2 \frac{x+5}{x} \times 2(x+5)\,dx = \int_1^2 2\times \frac{x^2+10x+25}{x}\,dx = 2\int_1^2 \left(x+10+25\times\frac{1}{x}\right)dx$$

$$B = 2\left[\frac{1}{2}x^2 + 10x + 25\ln(\underset{>0}{x})\right]_1^2 = 2\left(2+20+25\ln(2) - \left(\frac{1}{2}+10+25\underbrace{\ln(1)}_{=0}\right)\right)$$

$$B = 2\left(\frac{23}{2} + 25\ln(2)\right) = 23 + 50\ln(2)$$

2) a) Soit $A = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2x^2-6x+5}\,dx$.

A l'aide du changement de variable $t = 2x - 3$, montrer que $A = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{t^2+1}\,dt$ où a et b sont deux réels à déterminer.

En déduire la valeur de A.

$t = 2x - 3 \iff t+3 = 2x \iff x = \frac{1}{2}t + \frac{3}{2}$

<u>bornes</u> : si $x = 1$, $t = -1$; si $x = 2$, $t = 1$

<u>dx</u> : on dérive $x = \frac{1}{2}t + \frac{3}{2}$; on obtient $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{2}$ donc $dx = \frac{1}{2}dt$

<u>fonction</u> : $\dfrac{1}{2\left(\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}\right)+5} = \dfrac{1}{2\left(\frac{1}{4}t^2+\frac{3}{2}t+\frac{9}{4}\right) - 3t - 9 + 5}$

$= \dfrac{1}{\frac{1}{2}t^2 + \cancel{3t} + \frac{9}{2} - \cancel{3t} - 4} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}}$

$$A = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2}\,dt = \int_{\underset{a}{-1}}^{\overset{b}{1}} \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$A = [\arctan(t)]_{-1}^{1} = \underbrace{\arctan(1)}_{\frac{\pi}{4}} - \underbrace{\arctan(-1)}_{-\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2}$$

b) On admet que $A = \dfrac{\pi}{2}$. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{2x^2-6x+5}\,dx$. $= C$

$$\frac{1}{4}\int_1^2 \frac{4x-6+6}{2x^2-6x-5}\,dx = \frac{1}{4}\left(\int_1^2 \frac{\overset{u'}{4x-6}}{\underset{u}{2x^2-6x-5}} + \int_1^2 \frac{6}{2x^2-6x+5}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln(2x^2-6x+5)\right]_1^2 + \frac{1}{4}\times 6\int_1^2 \frac{1}{2x^2-6x+5}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\underbrace{\ln(1)}_{=0} - \underbrace{\ln(1)}_{=0}\right) + \frac{3}{2}A$$

$$= \frac{3}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi = C$$