UNIVERSITE D'ORLEANS
FACULTÉ DE DROIT ÉCONOMIE & GESTION

Sujet d'examen des semestres impairs 1ère session
Année universitaire 2022-2023

Intitulé de l'épreuve : **Techniques quantitatives** Nom de l'enseignant : **A.Batakis – C. Poignard – N.Raffinat**

Année : **2** Mention / Spécialité / Parcours : **Licence économie et gestion– majeure économie**

Durée de l'épreuve : **2h30**

Documents autorisés : **aucun** Matériels autorisés : **aucun**

Toutes les réponses doivent être justifiées

EXERCICE 1:

1) Déterminer trois réels A, B et C tels que : $x^2 + 6x + 25 = A\left[(Bx+C)^2+1\right]$ pour $x \in$ IR.

2) En déduire la valeur de l'intégrale $E = \int_{-7}^{1} \frac{1}{x^2+6x+25}dx$.

3) Calculer l'intégrale $F = \int_{-7}^{1} \frac{x+3}{x^2+6x+25}dx$.

4) Déterminer, en utilisant les deux questions précédentes, la valeur de l'intégrale $K = \int_{-7}^{1} \frac{4x}{x^2+6x+25}dx$.

5) L'intégrale généralisée $L = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^2+6x+25}dx$ est-elle convergente ? Si oui, que vaut-elle ?

EXERCICE 2:

L'intégrale $A = \int_{8}^{+\infty} \frac{1}{(4x-7)^{3/2}}dx$ est–elle convergente ? Si oui, que vaut–elle ?

EXERCICE 3 : Soit f la fonction définie sur I =]1/2 ;+ ∞[par : $f(x) = \frac{6+3x^2}{(2x-1)(x^3+1)}$.

1) Déterminer trois réels a, b et c tels que : pour tout $x \in I$ $f(x) = \frac{a}{2x-1} + \frac{bx^2+c}{x^3+1}$.

On admettra pour continuer que a = 6, b = –3 et c = 0.
2) En déduire une primitive de f sur]1/2 ;+ ∞[.

3) L'intégrale généralisée $A = \int_{1}^{+\infty} f(x)dx$ est–elle convergente ? Si oui, quelle est sa valeur ?

EXERCICE 4

Soit la fonction définie sur IR par $f(x) = x \arctan(x)$.

Déterminer, à l'aide d'une intégration par parties, une primitive de f sur IR, puis la primitive de f sur IR qui vaut 1/2 en 0.

EXERCICE 5: Les questions 1) et 2) sont indépendantes.

1) a) Calculer, grâce au changement de variable $x = t - 2$, l'intégrale $A = \int_0^1 \frac{10(2t-1)}{(t-2)^6} dt$.

b) On admet que pour tout $a > 2$ on a $\int_a^4 \frac{10(2t-1)}{(t-2)^6} dt = \frac{5a-4}{(a-2)^5} - \frac{1}{2}$.

L'intégrale généralisée $B = \int_2^4 \frac{10(2t-1)}{(t-2)^6} dt$ est–elle convergente ? Si oui, que vaut–elle ?

2) a) Montrer que $C_1 = \int_{1/2}^{2} \frac{1}{t^2 \sqrt{1+t^2}} dt$ est égal à $C_2 = \int_{1/2}^{2} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ (<u>indice</u> : poser $x = \frac{1}{t}$)

b) En déduire la valeur de C_1.

EXERCICE 6 (DL_n : développement limité d'ordre n)

1) a) Déterminer le DL_2 en 0 de la fonction $f(x) = \arctan(2x)$.

b) On admet que le DL_3 en 0 de la fonction $f(x) = \arctan(2x)$ est : $2x - \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)$.

En déduire une valeur approchée du réel $\arctan(0{,}6)$.

2) Déterminer le DL_3 en 0 de la fonction $h(x) = \frac{1}{3-4x}$.

3) a) Déduire des questions précédentes que :

le DL_3 en 0 de la fonction $v(x) = \frac{\arctan(2x)}{3-4x}$ est $\frac{2}{3}x + \frac{8}{9}x^2 + \frac{8}{27}x^3 + o(x^3)$.

b) Que vaut $v'''(0)$?

c) Que vaut la limite lorsque x tend vers 0 de $\frac{3v(x)-2x}{x^2}$?