EXERCICE 1:

1) Déterminer trois réels A, B et C tels que : $x^2 + 6x + 25 = A\left[(Bx+C)^2+1\right]$ pour $x \in IR$.

2) En déduire la valeur de l'intégrale $E = \int_{-7}^{1} \frac{1}{x^2+6x+25}dx$.

3) Calculer l'intégrale $F = \int_{-7}^{1} \frac{x+3}{x^2+6x+25}dx$.

4) Déterminer, en utilisant les deux questions précédentes, la valeur de l'intégrale $K = \int_{-7}^{1} \frac{4x}{x^2+6x+25}dx$.

5) L'intégrale généralisée $L = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^2+6x+25}dx$ est-elle convergente ? Si oui, que vaut-elle ?

1) $x^2+6x+25 = (x+3)^2 - 3^2 + 25$

$= (x+3)^2 - 9 + 25$

$= (x+3)^2 + 16$

$= 16\left[\frac{1}{16}(x+3)^2 + 1\right]$

$= 16\left[\left(\frac{1}{4}(x+3)\right)^2 + 1\right]$

$= 16\left[\left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}\right)^2 + 1\right]$: les réels $A = 16$, $B = \frac{1}{4}$ et $C = \frac{3}{4}$ conviennent

2) $E = \int_{-7}^{1} \frac{1}{16\left(1+\left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}\right)^2\right)}dx = \int_{-7}^{1} \frac{1}{16}.4 \frac{\frac{1}{4} \;\; u'}{\underbrace{1+\left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}\right)^2}_{1+u^2}}dx$ $k = \frac{4}{4}$

$= \left[\frac{1}{4}\arctan\left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}\right)\right]_{-7}^{1}$

$= \frac{1}{4}\arctan\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{4}\arctan\left(-\frac{7}{4}+\frac{3}{4}\right)$

$= \frac{1}{4}\arctan(1) - \frac{1}{4}\arctan(-1)$

$= \frac{1}{4}\times\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2.\frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{8} = A$

3) $F = \int_{-7}^{1} \frac{1}{2} \frac{2(x+3)}{x^2+6x+25}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-7}^{1} \frac{\overbrace{2x+6}^{u'}}{\underbrace{x^2+6x+25}_{u}}\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[\ln(|\underbrace{x^2+6x+25}_{>0 \text{ sur } \mathbb{R}}|)\right]_{-7}^{1}$

car $\Delta = 36-100 < 0$ et $a = 1 > 0$

$= \frac{1}{2}\left(\ln(1+6+25) - \ln(49-42+25)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\ln(32) - \ln(32)\right)$

$= \frac{1}{2} \times 0 = 0 = B$

4) $K = \int_{-7}^{1} \frac{4x}{x^2+6x+25}\,dx = 4 \times \int_{-7}^{1} \frac{x}{x^2+6x+25}\,dx$

$= 4\int_{-7}^{1} \frac{x+3-3}{x^2+6x+25}\,dx$

OU :

voir page suivante

$= 4\left(\int_{-7}^{1} \frac{x+3}{x^2+6x+25}\,dx - \int_{-7}^{1} \frac{3}{x^2+6x+25}\,dx\right)$

$= 4\left(F - 3\int_{-7}^{1} \frac{1}{x^2+6x+25}\,dx\right)$

$= 4(F - 3E)$

$= 4\left(0 - 3\times\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{3\times\cancel{4}\times\pi}{\cancel{8}\,2} = -\frac{3\pi}{2}$

5) $L = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^2+6x+25}\,dx$

* Etude de la convergence de L :

soit $a \leq 0$

$$L(a) = \int_a^1 \frac{1}{x^2+6x+25}\,dx = \left[\frac{1}{4}\arctan\left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}\right)\right]_a^1$$

$$= \frac{1}{4}\arctan(1) - \frac{1}{4}\arctan\left(\frac{1}{4}a+\frac{3}{4}\right)$$

$$\xrightarrow[a \to -\infty]{} \frac{1}{4} \times \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{16}$$

ER :

L est CV et vaut $\frac{3\pi}{16}$

4) $$K = \int_{-7}^{1} \frac{4x}{x^2+6x+25}\,dx = 2 \times \int_{-7}^{1} \frac{2x+6-6}{x^2+6x+25}\,dx$$

$$= 2\left(\int_{-1}^{7} \frac{2x+6}{x^2+6x+25}\,dx - \int_{-1}^{7} \frac{6}{x^2+6x+25}\,dx\right)$$

$$= 2\left(\underset{\swarrow \text{ voir 3)}}{0} - 6E\right)$$

$$= -12E = -12 \times \frac{\pi}{8} = -\frac{3\pi}{2}$$

EXERCICE 2:

L'intégrale $A = \int_8^{+\infty} \frac{1}{(4x-7)^{3/2}}\,dx$ est–elle convergente ? Si oui, que vaut–elle ?

soit $a \geq 8$

$u = 4x-7$ | $u' = 4$

$m-1 = -\frac{3}{2}$ | $m = -\frac{1}{2}$

$$A(a) = \int_8^a (4x-7)^{-\frac{3}{2}}\,dx = \int_8^a \underbrace{\frac{1}{4}(-2)}_{k = -\frac{1}{2}} \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)}_{m} \underbrace{4}_{u'} \underbrace{(4x-7)^{-\frac{3}{2}}}_{u^{m-1}}\,dx$$

$$A(a) = \left[-\frac{1}{2}(4x-7)^{-\frac{1}{2}}\right]_8^a = \left[-\frac{1}{2\sqrt{4x-7}}\right]_8^a$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{4a-7}} - \left(-\frac{1}{2\sqrt{32-7}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{4a-7}} + \frac{1}{2\sqrt{25}}$$

$$= \frac{1}{10} - \frac{1}{2\sqrt{4a-7}}$$

$$\xrightarrow[a \to +\infty]{} \frac{1}{10} - \frac{1}{2\sqrt{+\infty}} = \frac{1}{10} - \frac{1}{2(+\infty)}$$

$$= \frac{1}{10} - \frac{1}{+\infty}$$

$$= \frac{1}{10} - 0$$

$$= \frac{1}{10} \in \mathbb{R}$$

Donc A est convergente et vaut $\frac{1}{10}$

EXERCICE 3 : Soit f la fonction définie sur I =]1/2 ;+ ∞[par : $f(x) = \dfrac{6+3x^2}{(2x-1)(x^3+1)}$.

1) Déterminer trois réels a, b et c tels que : pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ $f(x) = \dfrac{a}{2x-1} + \dfrac{bx^2+c}{x^3+1}$.

On admettra pour continuer que a = 6, b = –3 et c = 0.

2) En déduire une primitive de f sur]1/2 ;+ ∞[.

3) L'intégrale généralisée $A = \int_1^{+\infty} f(x)dx$ est–elle convergente ? Si oui, quelle est sa valeur ?

1) $$\frac{a}{2x-1} + \frac{bx^2+c}{x^3+1} = \frac{a(x^3+1) + (2x-1)(bx^2+c)}{(2x-1)(x^3+1)}$$

$$= \frac{ax^3+a+2bx^3+2cx-bx^2-c}{(2x-1)(x^3+1)}$$

$$= \frac{(a+2b)x^3 - bx^2 + 2cx + a - c}{(2x-1)(x^3+1)}$$

Il y a égalité avec $f(x)$ ssi $\begin{cases} a+2b=0 \\ -b=3 \\ 2c=0 \\ a-c=6 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} b=-3 \\ c=0 \\ a=-2b=-2(-3)=6 \\ a=6+c=6+0=6 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} a=6 \\ b=-3 \\ c=0 \end{cases}$

Donc $f(x) = \dfrac{6}{2x-1} - \dfrac{3x^2}{x^3+1}$

2) $f(x) = 3 \times \dfrac{\overbrace{2}^{u'}}{\underbrace{2x-1}_{u}} - \dfrac{\overbrace{3x^2}^{u'}}{\underbrace{x^3+1}_{u}}$

Donc une primitive de f sur I est $F(x) = 3\ln(|\underbrace{2x-1}_{>0 \text{ sur } I}|) - \ln(|\underbrace{x^3+1}_{>0 \text{ sur } I}|)$

$= 3\ln(2x-1) - \ln(x^3+1)$

3) soit $a \geq 1$ $\quad A(a) = \displaystyle\int_1^a f(x)\,dx = F(a) - F(1)$

$= 3\ln(2a-1) - \ln(a^3+1) - (3\underbrace{\ln(1)}_{=0} - \ln(2))$

$= \underbrace{3\underbrace{\ln(\underbrace{2a-1}_{+\infty})}_{+\infty}}_{+\infty} - \underbrace{\ln(\underbrace{a^3+1}_{+\infty})}_{+\infty} + \ln(2)$

$a \to +\infty$ F.I

$A(a) = \ln((2a-1)^3) - \ln(a^3+1) + \ln(2)$

$= \ln\left(\dfrac{(2a-1)^3}{a^3+1}\right) + \ln(2) \xrightarrow[a \to +\infty]{} \ln(8) + \ln(2) = \ln(2^3) + \ln(2)$

$= 3\ln(2) + \ln(2)$

$= 4\ln(2)$

car $\lim\limits_{a\to+\infty} \dfrac{(2a-1)^3}{a^3+1} = \lim\limits_{a\to+\infty} \dfrac{(2a)^3}{a^3}$

$= \lim\limits_{a\to+\infty} \dfrac{8\cancel{a^3}}{\cancel{a^3}} = 8$

$\lim\limits_{a\to+\infty} A(a) = 4\ln(2) \in \mathbb{R}$ donc A est convergente et vaut $4\ln(2)$.

EXERCICE 4

Soit la fonction définie sur IR par f(x) = x arctan(x) .

Déterminer, à l'aide d'une intégration par parties, une primitive de f sur IR, puis la primitive de f sur IR qui vaut 1/2 en 0.

Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$ revient à calculer l'intégrale $H(x) = \displaystyle\int_{\underbrace{\ldots}_{\text{constante } \in D_f}}^{x} f(t)\,dt = \int_{\ldots}^{x} t\arctan(t)\,dt$

$u' = t \qquad\qquad\quad | \quad u = \dfrac{1}{2}t^2$

$v = \arctan(t) \quad | \quad v' = \dfrac{1}{1+t^2}$

IPP : $H(x) = \left[\dfrac{1}{2}t^2\arctan(t)\right]_{\ldots}^{x} - \displaystyle\int_{\ldots}^{x} \dfrac{1}{2}\,\dfrac{t^2}{1+t^2}\,dt$

$= \dfrac{1}{2}x^2\arctan(x) - 0 - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\ldots}^{x}\dfrac{t^2}{1+t^2}\,dt$ $\quad H_1(x)$

Calcul de $H_1(x)$

$\begin{array}{r|l} t^2 & t^2+1 \\ \hline -(t^2 \quad +1) & 1 \\ \hline -1 & \end{array}$

$\dfrac{t^2}{1+t^2} = 1 - \dfrac{1}{t^2+1}$

$H_1(x) = \displaystyle\int_{\ldots}^{x}\left(1-\dfrac{1}{t^2+1}\right)dt = \Big[t - \arctan(t)\Big]_{\ldots}^{x} = x - \arctan(x) - \ldots$

Donc $H(x) = x \arctan(x) - \dots - \frac{1}{2}\left(x - \arctan(x) - \dots\right)$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}x^2\arctan(x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan(x)}_{\text{primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R}} - \underbrace{\dots}_{\text{constante}}$$

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$\frac{1}{2}x^2\arctan(x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan(x) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

On cherche c tel que $\frac{1}{2}\underbrace{0^2\arctan(0)}_{=0} - \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}\underbrace{\arctan(0)}_{=0} + c = \frac{1}{2}$

On obtient $c = \frac{1}{2}$.

La primitive recherchée est donc égale à :

$$x\arctan(x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}$$

EXERCICE 5: Les questions 1) et 2) sont indépendantes.

1) a) Calculer, grâce au changement de variable x = t – 2, l'intégrale $A = \int_0^1 \frac{10(2t-1)}{(t-2)^6}\,dt$.

bornes : si $t = 0$, $x = 0 - 2 = -2$

si $t = 1$, $x = 1 - 2 = -1$

dt : $x = t - 2 \iff t = x + 2$; $\frac{dt}{dx} = (x+2)' = 1$ donc $dt = dx$

fonction : $\frac{10(2t-1)}{(t-2)^6} = \frac{10(2(x+2)-1)}{x^6} = \frac{10(2x+4-1)}{x^6}$

$$= \frac{20x+30}{x^6}$$

$$= \frac{20x}{x^6} + \frac{30}{x^6}$$

$$= \frac{20}{x^5} + \frac{3}{x^6}$$

Donc $A = \int_{-2}^{-1}\left(\frac{20}{x^5} + \frac{30}{x^6}\right)dx$

$$A = \int_{-2}^{1}\left(20x^{-5} + 30x^{-6}\right)dx = \left[20\,\frac{x^{-5+1}}{\underbrace{-5+1}_{-4}} + 30\,\frac{x^{-6+1}}{\underbrace{-6+1}_{-5}}\right]_{-2}^{-1}$$

$$= \left[-\frac{5}{x^4} - \frac{6}{x^5}\right]_{-2}^{-1}$$

$$= -\frac{5}{(-1)^4} - \frac{6}{(-1)^5} - \left(-\frac{5}{(-2)^4} - \frac{6}{(-2)^5}\right)$$

$$= -\frac{5}{1} - \frac{6}{-1} + \frac{5}{16} + \frac{6}{-32}$$

$$= 1 + \frac{5}{16} - \frac{3}{16}$$

$$= 1 + \frac{2}{16} = 1 + \frac{1}{8} = \frac{8+1}{8} = \frac{9}{8}$$

b) On admet que pour tout a > 2 on a $\displaystyle\int_a^4 \frac{10(2t-1)}{(t-2)^6}dt = \frac{5a-4}{(a-2)^5} - \frac{1}{2}$.

L'intégrale généralisée $\displaystyle B = \int_2^4 \frac{10(2t-1)}{(t-2)^6}dt$ est–elle convergente ? Si oui, que vaut–elle ?

NB :

$$\int_a^4 \frac{10(2t-1)}{(t-6)^2}\,dt = \int_{a-2}^{2}\left(\frac{20}{x^5} + \frac{30}{x^6}\right)dx$$

$$= \left[-\frac{5}{x^4} - \frac{6}{x^5}\right]_{a-2}^{2}$$

$$= -\frac{5}{16} - \frac{6}{32} - \left(-\frac{5}{(a-2)^4} - \frac{6}{(a-2)^5}\right)$$

$$= -\frac{5}{16} - \frac{3}{16} + \frac{5}{(a-2)^4} + \frac{6}{(a-2)^5}$$

$$= -\frac{8}{16} + \frac{5(a-2)+6}{(a-2)^5} = -\frac{1}{2} + \frac{5a-10+6}{(a-2)^5}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{5a-4}{(a-2)^5}$$

$$\lim_{a \to 2^+} \int_a^4 \frac{10(2t-1)}{(t-2)^6}\,dt = \lim_{a \to 2^+} \frac{5a-4}{(a-2)^6} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{10-4}{(0^+)^6} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{6}{0^+} - \frac{1}{2} = +\infty - \frac{1}{2} = +\infty$$

L'intégrale généralisé B est donc divergente.

2) a) Montrer que $C = \displaystyle\int_{1/2}^{2} \frac{1}{t^2\sqrt{1+t^2}}\,dt$ est égal à $D = \displaystyle\int_{1/2}^{2} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ (<u>indice</u> : poser $x = \frac{1}{t}$)

b) En déduire la valeur de C.

<u>a</u> Changement de variable dans C.

nouvelle variable : $x = \frac{1}{t} \iff xt = 1 \iff t = \frac{1}{x}$

bornes : si $t = \frac{1}{2}$, $x = 2$

si $t = 2$, $x = \frac{1}{2}$

dt : $t = \frac{1}{x}$; $\frac{dt}{dx} = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; donc $dt = -\frac{1}{x^2}dx$

fonction : $$\frac{1}{t^2\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} \times \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{x^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= x^2 \times \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}}$$

$$= x^2 \times \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}} = x^2 \times \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$ ($\sqrt{x^2} = x$ car $x > 0$)

$$= \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$$

donc $C = \int_{2}^{1/2} \frac{\cancel{x^3} \; x}{\sqrt{1+x^2}} \left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right) dx$

$= -\int_{2}^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = D$

$D = \int_{\frac{1}{2}}^{2} x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 2}_{k=1} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{m} \cdot \underbrace{2x}_{u'} \underbrace{(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}_{u^{m-1}} dx$ $\quad u = 1+x^2 \quad u' = 2x \quad \Big| \; m-1 = -\frac{1}{2} \quad m = \frac{1}{2}$

$= \left[(1+x^2)^{\frac{1}{2}} \right]_{\frac{1}{2}}^{2}$

$= \sqrt{1+2^2} - \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{5} - \sqrt{1+\frac{1}{4}} = \sqrt{5} - \sqrt{\frac{5}{4}} = \sqrt{5} - \frac{1}{2}\sqrt{5} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$

EXERCICE 6

1) a) Déterminer le DL_2 en 0 de la fonction $f(x) = \arctan(2x)$.

b) On admet que le DL_3 en 0 de la fonction $f(x) = \arctan(2x)$ est : $2x - \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)$

En déduire une valeur approchée du réel arctan(0,6).

1) a) $f(x) = \arctan(2x)$

$f'(x) = \frac{2}{1+(2x)^2} = \frac{2}{1+4x^2}$

$= 2(1+4x^2)^{-1}$

$f''(x) = 2(-1) \times 8x (1+4x^2)^{-1-1}$

$= -16x(1+4x^2)^{-2}$

$f(0) = \arctan(0) = 0$

$f'(0) = 2(1+4\times 0)^{-1}$
$= 2\times 1^{-1}$
$= 2\times 1 = 2$

$f''(0) = -16\times 0 (1+4\times 0)^{-2} = 0$

Le DL_2 en 0 est donc (formule de Taylor)

$0 + 2\times x + \frac{0}{2}x^2 + o(x^2) = 2x + o(x^2)$

b $0{,}6 = 2\times 0{,}3$

$\arctan(0{,}6) = f(0{,}3)$; $0{,}3$ est proche de 0

donc $f(0{,}3) \simeq 2\times 0{,}3 - \frac{8}{3}(0{,}3)^3$

$\simeq 0{,}6 - \frac{8}{3}(0{,}3)(0{,}3)^2$

$\simeq 0{,}6 - 8\times 0{,}1 \times 0{,}09$

$\simeq 0{,}6 - 8\times 0{,}009$

$\simeq 0{,}6 - 0{,}072$

$\simeq 0{,}528$

2) Déterminer le DL_3 en 0 de la fonction $h(x) = \dfrac{1}{3-4x}$.

$h(x) = \dfrac{1}{3-4x} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{1-\frac{4x}{3}} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{1-u}$ avec $u = \dfrac{4x}{3}$

u est de la forme kx^α avec $k=\frac{4}{3}$ et $\alpha = 1 > 0$. $u(0)=0$

et on sait que le DL_3 en 0 de $\dfrac{1}{1-x}$ est : $1+x+x^2+x^3+o(x^3)$

Donc le DL_3 en 0 de h est :

$$\frac{1}{3}\left(1+\frac{4}{3}x+\left(\frac{4}{3}x\right)^2+\left(\frac{4}{3}x\right)^3+o(x^3)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1+\frac{4}{3}x+\frac{16}{9}x^2+\frac{64}{27}x^3+o(x^3)\right)$$

$$= \frac{1}{3}+\frac{4}{9}x+\frac{16}{27}x^2+\frac{64}{81}x^3+o(x^3)$$

3) a) Déduire des questions précédentes que :

le DL_3 en 0 de la fonction $v(x) = \dfrac{\arctan(2x)}{3-4x}$ est $\dfrac{2}{3}x + \dfrac{8}{9}x^2 + \dfrac{8}{27}x^3 + o(x^3)$.

b) Que vaut $v'''(0)$?

c) Que vaut la limite lorsque x tend vers 0 de $\dfrac{3v(x)-2x}{x^2}$?

a $v(x) = f(x)\times h(x)$

$$v(x) = \left(2x - \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)\right)\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{9}x + \frac{16}{27}x^2 + \frac{64}{81}x^3 + o(x^3)\right)$$

$$= \frac{2}{3}x + \frac{8}{9}x^2 + \frac{32}{27}x^3 - \frac{8}{9}x^3 + o(x^3)$$

$$= \frac{2}{3}x + \frac{8}{9}x^2 + \left(\frac{32-24}{27}\right)x^3 + o(x^3)$$

$$= \frac{2}{3}x + \frac{8}{9}x^2 + \frac{8}{27}x^3 + o(x^3)$$

b v est trois dérivable donc on aurait pu obtenir le DL_3 en 0 en utilisant la formule de Taylor.

Par identification on obtient $\frac{v'''(0)}{6} = \frac{8}{27}$ d'où $v'''(0) = \frac{8}{\cancel{27}\,9} \times \cancel{6}\,2 = \frac{16}{9}$.

c $3v(x) - 2x = 3\left(\frac{2}{3}x + \frac{8}{9}x^2 + \frac{8}{27}x^3 + o(x^3)\right) - 2x$

$$= \cancel{2x} + \frac{8}{3}x^2 + \frac{8}{9}x^3 + o(x^3) - \cancel{2x}$$

$$= \frac{8}{3}x^2 + \frac{8}{9}x^3 + o(x^3)$$

Donc $\frac{3v(x) - 2x}{x^2} = \frac{\frac{8}{3}x^2}{x^2} + \frac{\frac{8}{9}x^3}{x^2} + \frac{o(x^3)}{x^2}$

$$= \frac{8}{3} + \frac{8}{9}x + \frac{x^3\varepsilon(x)}{x^2} \quad \text{avec } \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{8}{9}x + x\varepsilon(x)$$

$$\xrightarrow[x\to 0]{} \frac{8}{3} + \frac{8}{9}\times 0 + 0\times 0 = \frac{8}{3} + 0 + 0 = \frac{8}{3}$$

NB : le DL_2 en 0 de $v(x)$ aurait suffi.