# Déduction naturelle

Jules Chouquet

## 1 À quoi doit ressembler une preuve en déduction naturelle

### 1.1 Définitions et notations

**Le symbole $\vdash$ :** il se prononce "taquet" ou parfois "thèse". Quand on écrit $A_1, \ldots, A_n \vdash A$, cela doit se lire "j'ai une démonstration de la formule $A$ sous hypothèses $A_1, \ldots, A_n$. Une suite de symboles de cette forme s'appelle un **séquent** [1]
Dans un séquent de déduction naturelle, **Il y a une et une seule formule à droite du taquet**.
Une règle est composée d'un **séquent conclusion**, et d'un nombre fini de **séquents prémisses** (0,1,2, ou 3).

**Remarque terminologique** **hypothèse $\neq$ prémisse**. On parlera d'**hypothèses** pour les formules qui se trouvent à gauche du taquet "$\vdash$", ce sont les suppositions qui sont encore présentes dans notre preuve. Les hypothèses sont donc une partie du séquent. En revanche on parlera de prémisse pour parler des séquents dont on a besoin pour composer un nouveau séquent. Par exemple, dans la preuve suivante :

$$\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\text{ax} \qquad \dfrac{}{B \vdash B}\,\text{ax}}{A, B \vdash A \wedge B}\,\wedge\text{i}$$

les *prémisses* de l'utilisation de la règle $\wedge$i (voir la liste des règles en fin de document) sont les deux séquents : $A \vdash A$ et $B \vdash B$. En revanche, les *hypothèses* du dernier séquent $A, B \vdash A \wedge B$ sont $A$ et $B$. Et on a en effet une preuve de la formule $A \wedge B$ sous hypothèses $A$ et $B$.

**Notation** On utilise les lettres grecques majuscules $\Gamma, \Delta, \ldots$ pour abréger les ensembles de formules quelconques. Attention, ils peuvent tout à fait être **vides**.
Donc quand on écrit par exemple $\Gamma, A \vdash B$, cela signifie en général que l'on démontre $B$ avec l'hypothèse $A$, et *éventuellement* d'autres hypothèses (que l'on n'a pas besoin de connaître ici. Alors que si on écrit $A$, c'est souvent qu'il est important dans la preuve.)
Quand on écrit juste $\Gamma \vdash A$, c'est qu'on ne précise pas du tout les hypothèses pour la preuve de $A$, si ça se trouve, $\Gamma$ est égal à $\emptyset$, l'ensemble vide. **Mais** si on retrouve $\Gamma$ ailleurs dans la preuve, c'est toujours le même, c'est-à-dire que s'il y a des hypothèses, on doit toujours les garder ! (sauf si une règle nous autorise à enlever une hypothèses). Nous verrons des exemples.
Le plus souvent, on lira une règle de bas en haut, parce qu'on se demandera, selon le connecteur principal de notre formule, ce qu'il faut faire pour la démontrer. Donc on se concentrera sur la conclusion, et on regardera comment faire pour avoir les prémisses, de façon à avoir le droit d'appliquer la règle adaptée.

1. Attention, il existe un système de preuves qui s'appelle *calcul des séquents*, mais qui est différent de la déduction naturelle que nous voyons ici.

**Démontrer une formule** On considère qu'une formule $A$ est **démontrée** quand on a réussi à écrire une preuve en déduction naturelle, dont cette formule est la conclusion, et où **il n'y a plus d'hypothèses**. La conclusion est donc $\vdash A$.
En logique propositionnelle, toutes les tautologies peuvent être démontrées en déduction naturelle.

**Ensembles de formules dans les hypothèses**

Dans la présentation des règles de ce cours, il y a plusieurs choses **importantes** à garder en tête :

— Un ensemble de formules est un ensemble au sens de la théorie des ensembles, c'est-à-dire que chaque élément n'apparaît **qu'une fois**.
Si je reprends la règle $\wedge$i présentée plus haut, cela veut dire que si les deux séquents prémisses ont des hypothèses en commun, elles n'apparaissent qu'une fois dans le séquent conclusion, par exemple :
$$\dfrac{p, q \vdash p \qquad p \vdash p}{p, q \vdash p \wedge p}\ \wedge\text{i}$$
est une inférence valide, je conserve toutes les hypothèses des prémisses, mais je n'écris pas de doublons.

— Dans les règles, les ensembles de formules notés $\Gamma, \Delta, \ldots$ peuvent être vides ou aussi grands que l'on veut. Par exemple, la règle d'axiome donnée dans la section suivante peut être utilisée comme ceci :
$$\dfrac{}{p \vdash p}\ \text{ax}$$
Mais on peut avoir besoin de l'utiliser comme ceci :
$$\dfrac{}{p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z \vdash p}\ \text{ax}$$

— Dans un ensemble, l'ordre n'est pas important. Donc dans l'exemple au-dessus, l'utilisation de la règle est correct même si $p$ n'est pas la dernière formule qui est écrite. (par contre, dans une règle de déduction, l'ordre des prémisses est fixé et on ne peut pas les intervertir.

## 1.2 Explication des règles

Dans cette section, je vais passer en revue quelques règles pour expliquer leur fonctionnement. Les règles sont rassemblées en fin de document. C'est aussi l'occasion de présenter des petits exemples de preuves basiques qui les utilisent.
**Rappel** Les lettres majuscules $A, B, \ldots$ valent pour n'importe quelle formule, donc dans les règles on peut les remplacer par des variables propositionnelles, ou par des formules composées.

### 1.2.1 Axiomes

La première règle, celle qui permet à une preuve en déduction naturelle de commencer (c'est-à-dire que sans elle, toutes les preuves seraient infinies...), est celle de l'axiome. C'est la seule règle sans prémisse, qui affirme que si une formule $A$ est dans notre ensemble d'hypothèses, alors on a déjà une preuve de $A$.
De la même façon, $\top$ qui est la constante vraie, est prouvée à partir de n'importes quelles hypothèses.

$$\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\,\mathsf{ax} \qquad\qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash \top}\,\top$$

Remarquez que si l'on ne mettait pas $\Gamma$ dans la règle, on serait embêtés car on ne pourrait pas prouver certaines formules. Par exemple, on ne pourrait pas prouver $p \to (q \to p)$ ni $p \to \top$ alors que ce sont des tautologies.

### 1.2.2 Règles d'introduction

Les règles d'introduction sont celles qui permettent de construire une formule en rajoutant un nouveau connecteur qui n'était pas déjà dans les prémisses. (le "i" indique que c'est une règle d'introduction)

**Implication** Par exemple, la règle suivante, qui introduit le connecteur "$\to$" est sans doute la plus simple, car c'est une traduction immédiate du raisonnement hypothétique : Si, en supposant $A$, je suis capable de prouver $B$, alors ça revient à prouver $A \to B$ (et je n'ai plus besoin de supposer $A$).

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\to\mathsf{i}$$

Avec les règles données, je peux déjà présenter quelques exemples de preuves de tautologies (dont les deux citées plus haut, qui donnent des exemples où $\Gamma$ n'est pas vide) :

$$\dfrac{\dfrac{}{p \vdash p}\,\mathsf{ax}}{\vdash p \to p}\to\mathsf{i} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p, q \vdash p}\,\mathsf{ax}}{p \vdash q \to p}\to\mathsf{i}}{\vdash p \to (q \to p)}\to\mathsf{i} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{}{p \vdash \top}\,\mathsf{ax}}{\vdash p \to \top}\to\mathsf{i}$$

**Conjonction** La règle d'introduction pour la conjonction est tout aussi simple : si j'arrive à prouver $A$, et que j'arrive à prouver $B$, alors j'arrive à prouver $A \wedge B$.
Attention, ici il ne faut pas oublier de rassembler les hypothèses, car si j'ai fait des suppositions pour prouver l'une ou l'autre des deux formules, alors ces suppositions sont encore en cours pour la preuve de la conjonction !

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \wedge B}\wedge\mathsf{i}$$

Grâce à cette règle, je peux rassembler mes conclusions, si par exemple je veux prouver la formule $p \to (q \to (p \wedge q))$, je peux l'utiliser :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash p}\,\mathsf{ax} \qquad \dfrac{}{p \vdash q}\,\mathsf{ax}}{p, q \vdash p \wedge q}\wedge\mathsf{i}}{p \vdash q \to (p \wedge q)}\to\mathsf{i}}{\vdash p \to (q \to (p \wedge q))}\to\mathsf{i}$$

**Négation** Pour introduire le symbole de la négation, il faut utiliser la constante fausse $\bot$. En effet, l'idée est que si l'on a démontré une contradiction (la constante $\bot$ peut être interprétée comme une formule contradictoire), avec une hypothèse, alors ça signifie que cette hypothèse est elle-même contradictoire avec les autres.
Rappelez-vous d'ailleurs que $\neg A$ est toujours équivalent à $A \to \bot$. De ce point de vue, cette règle est une formulation spécifique de la règle $\to$i vue plus haut.

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\neg\mathsf{i}$$

Si par exemple je veux prouver $\neg(p \wedge \neg p)$, je dois d'abord prouver que $p \wedge \neg p$ est contradictoire. Pour cette preuve, on a besoin de la règle d'élimination de la négation qui permet d'obtenir $\perp$ à partir d'une contradiction, je donnerai donc cet exemple plus loin.
Mais on peut déjà prouver des petits théorèmes, comme $\neg\perp$ (qui est équivalent à $\top$, donc est bien une tautologie) :

$$\dfrac{\dfrac{}{\perp \vdash \perp}\text{ax}}{\vdash \neg\perp}\neg\text{i}$$

**Disjonction** L'introduction de la disjonction consiste simplement à formaliser le fait que si on sait prouver $A$, alors on sait prouver $A \vee B$ (ou $B \vee A$, comme les formules sont dans un certain ordre, on a besoin de deux règles). On a rarement besoin de cette règle pour finir une preuve, car finalement $B$ ne nous intéresse pas dans cette conclusion, et le théorème est plus faible (puisque on ne sait plus si c'est $A$ ou $B$ qui est vrai) que si l'on se contentait de $A$. Mais on peut en avoir besoin dans des raisonnements par cas, quand on a par exemple un cas où on suppose $A$, et un cas où on suppose $B$. L'exemple détaillé présenté dans une section suivante illustrera une preuve de la sorte.
**Remarque :** la lettre g ou d indique si dans la conclusion, c'est la formule de gauche où celle de droite dont on avait déjà une preuve. Si j'ai prouvé $A \vee B$ avec $\vee$i-d, c'est que je disposais d'une preuve de $B$.

$$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\vee\text{i-g} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B \vee A}\vee\text{i-d}$$

Illustrons néanmoins avec une utilisation simple. Avec cette règle, on peut prouver des petites propriétés de la disjonction, comme $p \to (p \vee q)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash p}\text{ax}}{p \vdash p \vee q}\vee\text{i-g}}{\vdash p \to (p \vee q)}\to\text{i-g}$$

### 1.2.3 Règles d'élimination

Les règles d'élimination correspondent à la façon dont on *utilise* une formule pour prouver quelque chose. On va éliminer le connecteur principal d'une certaine formule apparaissant dans une prémisse, de façon à ce qu'il n'apparaisse plus dans la conclusion.

**Conjonction** Également la règle d'élimination la plus simple : si je sais prouver $A \wedge B$, alors je peux dire que j'ai une preuve de $A$. Ou que j'ai une preuve de $B$ (à nouveau, cela donne en fait deux règles).
Ici, la lettre g ou d indique si l'on a conservé la formule de droite ou celle de gauche.

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\wedge\text{e-g} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\wedge\text{e-d}$$

Comme pour les règles $\vee$i, cette règle est rarement utilisée en fin de preuve, car la conclusion est plus faible que la prémisse, mais elle peut bien sûr être utile au milieu d'une preuve, si c'est justifié par un raisonnement par cas où par les hypothèses.
On peut néanmoins déjà démontrer des petites propriétés de la conjonction comme $(p \wedge q) \to p$ :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \wedge q \vdash p \wedge q}\text{ax}}{p \wedge q \vdash p}\wedge\text{e}}{\vdash (p \wedge q) \to p}\to\text{i}$$

**Implication** La règle d'élimination de la flèche correspond à une application du raisonnement hypothétique à un cas particulier. Pour des raisons historiques, elle est parfois appelée *modus ponens*.
L'idée est simple : si je peux prouver $A \to B$, et que je peux prouver $A$, alors ça me donne une preuve de $B$.

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash A \to B}{\Gamma, \Delta \vdash B} \to\text{e}$$

On peut démontrer facilement des propriétés de l'implication comme $((p \to q) \land p) \to q$ :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(p \to q) \land p \vdash (p \to q) \land p}\,\text{ax}}{(p \to q) \land p \vdash (p \to q)}\,\land\text{e-g} \qquad \dfrac{\dfrac{}{(p \to q) \land p \vdash (p \to q) \land p}\,\text{ax}}{(p \to q) \land p \vdash p}\,\land\text{e-d}}{(p \to q) \land p \vdash q}\,\to\text{e}}{\vdash ((p \to q) \land p) \to q}\,\to\text{i}$$

ou encore la **transitivité** de l'implication $((p \to q) \land (q \to r)) \to (p \to r)$ :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(p \to q) \land (q \to r) \vdash (p \to q) \land (q \to r)}\,\text{ax}}{(p \to q) \land (q \to r) \vdash (q \to r)}\,\land\text{e-d} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(p \to q) \land (q \to r) \vdash (p \to q) \land (q \to r)}\,\text{ax}}{(p \to q) \land (q \to r) \vdash p \to q}\,\land\text{e-g} \qquad \dfrac{}{p \vdash p}\,\text{ax}}{(p \to q) \land (q \to r), p \vdash q}\,\to\text{e}}{(p \to q) \land (q \to r), p \vdash r}\,\to\text{e}}{(p \to q) \land (q \to r) \vdash p \to r}\,\to\text{i}$$

**Négation** Pour éliminer la négation, la seule façon est de montrer qu'elle induit une contradiction. C'est-à-dire que si l'on voit les règles d'élimination comme des façons d'utiliser la formule, la négation peut être utilisée pour établir la contradiction.
Une contradiction, matérialisée par la constante $\perp$, consiste simplement en une formule et sa négation. En effet, on ne peut pas avoir les deux qui sont démontrés en même temps sans que cela soit contradictoire.

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash \neg A}{\Gamma, \Delta \vdash \perp} \neg\text{e}$$

On peut maintenant prouver la formule annoncée plus haut (paragraphe sur l'introduction de la négation), à savoir $\neg(p \land \neg p)$ :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \land \neg p \vdash p \land \neg p}\,\text{ax}}{p \land \neg p \vdash \neg p}\,\land\text{e-g} \qquad \dfrac{\dfrac{}{p \land \neg p \vdash p \land \neg p}\,\text{ax}}{p \land \neg p \vdash p}\,\land\text{e-d}}{p \land \neg p \vdash \perp}\,\neg\text{e}}{\vdash \neg(p \land \neg p)}\,\neg\text{i}$$

**Disjonction** C'est sans doute la règle d'élimination la plus compliquée. Pour la comprendre, le mieux est de l'associer à un **raisonnement par cas**.
Voici comment on peut lire cette règle : Si je sais que <u>au moins</u> $A$ ou $B$ est démontrable, et que **dans les deux cas**, je parviens à prouver $C$, alors $C$ est forcément démontrable. (Bien sûr, sous les hypothèses qui permettent de m'assurer que $A \lor B$ est vrai, et celles des preuves)

$$\frac{\Gamma \vdash A \lor B \qquad \Delta, A \vdash C \qquad \Delta', B \vdash C}{\Gamma, \Delta, \Delta' \vdash C} \lor\text{e}$$

On peut par exemple montrer avec cette règle que si $A \lor B$ est démontrable, alors on peut démontrer $C \to A$ ou $C \to B$, pour n'importe quelle formule $C$. (rappelons que si on sait prouver une formule $A$, alors on peut prouver $C \to A$ aussi).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \lor B \vdash A \lor B}\,\text{ax} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, C \vdash A}\,\text{ax}}{A \vdash C \to A}\,\to\text{i}}{A \vdash (C \to A) \lor (C \to B)}\,\lor\text{i-g} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B, C \vdash B}\,\text{ax}}{B \vdash C \to B}\,\to\text{i}}{B \vdash (C \to A) \lor (C \to B)}\,\lor\text{i-d}}{A \lor B \vdash (C \to A) \lor (C \to B)}\,\lor\text{e}}{\vdash A \lor B \to (C \to A) \lor (C \to B)}$$

Il est très important de ne pas conserver les hypothèses $A$ et $B$ dans la conclusion de la règle $\lor$e.

### 1.2.4 Règles pour l'absurde

Par absurde, on parle également de règles qui parlent du symbole $\bot$. Elles sont mises dans une section à part, car ce ne sont pas vraiment des règles d'introduction ni d'élimination [2].

**La règle $\bot$** Cette règle correspond à une propriété de la logique que l'on appelle parfois *ex falso quodlibet*, qui veut dire en latin "du faux, on peut déduire n'importe quoi".
Rappelez-vous qu'en logique propositionnelle, si l'antécédent d'un raisonnement implicatif est faux, alors le raisonnement est vrai (table de vérité de "$\to$"). La règle $\bot$ est une version *démonstration* de cette propriété : si je peux prouver le faux à partir de certaines hypothèses, alors je peux en déduire n'importe quelle formule, ma déduction sera correcte.

$$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\,\bot$$

Avec cette règle, on peut par exemple prouver qu'une antilogie implique n'importe quelle formule : $(p \land \neg p) \to q$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \land \neg p \vdash p \land \neg p}\,\text{ax}}{p \land \neg p \vdash p}\,\land\text{e-g} \qquad \dfrac{\dfrac{}{p \land \neg p \vdash \neg p}\,\text{ax}}{p \land \neg p \vdash \neg p}\,\land\text{e-d}}{p \land \neg p \vdash \bot}\,\neg\text{e}}{p \land \neg p \vdash q}\,\bot}{\vdash (p \land \neg p) \to q}\,\to\text{i}$$

**Le raisonnement par l'absurde** Le raisonnement par l'absurde est celui que vous connaissez : on suppose que $A$ est faux, et si on arrive à démontrer une contradiction à partir de cette hypothèse, on peut en déduire que $A$ est vrai :

$$\dfrac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\,\text{abs}$$

**Remarque :** À partir de la même prémisse ($\Gamma, \neg A \vdash \bot$), on pourrait utiliser la règle $\neg$i, et en déduire le séquent $\Gamma \vdash \neg\neg A$. Cette conclusion est en effet équivalente à $A$ (d'après les tables de vérité, $\neg\neg A$ a toujours la même valeur que $A$).
Grâce à cette règle, je peux par exemple prouver que la double négation peut être supprimée : $\neg\neg p \to p$

2. Enfin, si on considérait $\bot$ comme un connecteur 0-aire (zéro sous-formule), ce serait comme deux règles pour l'éliminer, mais il est peut-être plus clair de les considérer à part.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg p \vdash \neg p}\,\text{ax} \qquad \dfrac{}{\neg\neg p \vdash \neg\neg p}\,\text{ax}}{\neg\neg p, \neg p \vdash \bot}\,\neg\text{e}}{\neg\neg p \vdash p}\,\text{abs}}{\vdash \neg\neg p \to p}\,\to\text{i}$$

**Remarque :** Pour prouver $p \to \neg\neg p$, il n'y a pas besoin d'utiliser un raisonnement par l'absurde.

> **La logique intuitionniste** est un système logique dans lequel on dispose de toutes les règles de déduction, sauf le raisonnement par l'absurde.
> Dans ce système, les preuves sont **constructives**, c'est-à-dire que si l'on a une preuve de $A \vee B$, on peut en extraire soit une preuve de $A$, soit une preuve de $B$.
> On ne peut plus démontrer $p \vee \neg p$, car aucune des deux branches ne peut être démontrée (il n'existe pas de preuve du séquent $\vdash \quad p \ldots$). La preuve de $p \vee \neg p$ qui utilise le raisonnement par l'absurde est dans les transparents du courds.
> Pour en savoir plus : `https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_intuitionniste`

## 1.3 Exemple détaillé

Supposons que je veuille prouver la formule suivante :

$$F = p \wedge (q \vee r) \to ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$$

Je commence par écrire la conclusion de ma preuve : $\vdash p \wedge (q \vee r) \to ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$. Je me demande ensuite quelle règle je peux appliquer pour avoir cette preuve. En fait, j'ai souvent plusieurs possibilités. Ici, j'ai au moins les suivantes :

— La règle de l'absurde. En effet, si j'ai une preuve de $\bot$, je peux en déduire une preuve de n'importe quelle formule. Mais comme je n'ai pas d'hypothèses à mon séquent-conclusion, il faudrait que je sois capable de démontrer $\bot$ sans hypothèses non plus, ce qui est impossible.

— La règle de raisonnement par l'absurde. Il faudrait alors que j'arrive à prouver $\bot$, mais avec comme hypothèse $F$.

— La règle de l'élimination de la disjonction. Ici, il faudrait que je prouve une formule $A_1 \vee A_2$, et que je démontre ma conclusion sous hypothèse $A_1$, puis sous hypothèses $A_2$.

— Les règles de l'élimination de la conjonction. Il faudrait que je prouve une formule de la forme $F \wedge F'$, et que j'en déduise une preuve de $F$.

— La règle de l'élimination de l'implication (le *modus ponens*). Il faudrait que je prouve $F' \to F$, et que je prouve $F'$ pour une certaine formule $F'$.

— La règle d'introduction de l'implication. Il faudrait que je prouve $((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ sous hypothèses $p \wedge (q \vee r)$.

**Comment choisir ?** En général, si on n'a pas d'hypothèse, le plus simple est d'essayer d'utiliser la règle d'introducion du connecteur principal. Parfois ça ne marche pas et on est obligé de raisonner par l'absurde.

**Remarque :** Il est rare, en revanche, de commencer par une règle $\vee$i. Car cela voudrait dire que l'une des deux formules de la conclusion n'est vraiment pas intéressante (ce n'est pas interdit, mais c'est rare). Par exemple, pour prouver $p \vee \neg p$, il faut raisonner par l'absurde. On ne peut bien sûr pas prouver $p$ ou prouver $\neg p$ sans hypothèses. Pour les formules implicatives, utiliser la règle $\to$i est souvent le meilleur choix quand c'est possible.

Continuons donc avec l'application de la règle $\to$i. Ma preuve ressemble maintenant à cela :

$$\dfrac{p \wedge (q \vee r) \vdash ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))}{\vdash p \wedge (q \vee r) \to ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))}\,\to\text{i}$$

Maintenant, je m'arrête un moment pour réfléchir, car c'est moins évident. En effet, je pourrais utiliser $\lor$i, mais ça ne semble pas une bonne idée, car je me rends compte assez rapidement que prouver (par exemple) $p \land q$ sous hypothèse $p \land (q \lor r)$ doit être impossible (j'ai bien $p$ dans mes hypothèses, mais je ne sais pas si c'est $q$ ou $r$ qui est vrai...). C'est pareil si je veux prouver $p \land r$ directement, c'est impossible. Avec l'habitude, on s'en rend compte en avance en réfléchissant sur les formules, et on évite d'essayer de continuer la preuve d'une façon qui ne peut pas marcher.
Donc, je réfléchis au sens de la formule. Je suppose (dans mes hypothèses) que $p$ est vrai, et que soit $q$ soit $r$ est vrai. Si je veux en déduire que $p \land q$ et $p \land r$ sont vrais, la seule solution est de raisonner par cas. C'est-à-dire que je vais utiliser (la partie de) mon hypothèse $q \lor r$, pour montrer que si c'est $q$ qui est vrai, alors $(p \land q) \lor (p \land r)$ sera vrai, et que si c'est $r$ qui est vrai, alors $(p \land q) \lor (p \land r)$ sera vrai aussi. Ça semble mieux parti comme cela (si je devais faire la preuve en la rédigeant en français, c'est ce que je ferais).
En suivant ce raisonnement, il faut que j'utilise la règle pour le raisonnement par cas, qui est $\lor$e. Le raisonnement par cas que je veux faire est sur la disjonction $(q \lor r)$, donc c'est celle-là que je dois montrer, puis je dois faire les deux autres preuves (celle avec $q$ dans les hypothèses, et celle avec $r$).
Est-ce qu'avec mes hypothèses actuelles ($p \land (q \lor r)$), je peux montrer $q \lor r$ ?
$\rightarrow$ oui, il suffit d'utiliser un axiome et la règle $\land$e-d, comme ceci :

$$\dfrac{\dfrac{}{p \land (q \lor r) \vdash p \land (q \lor r)}\,\text{ax}}{p \land (q \lor r) \vdash (q \lor r)}\,\land\text{e-d}$$

Maintenant, je peux essayer de compléter avec les deux autres preuves. Il faut donc que je démontre mon but $(p \land q) \lor (p \land r)$ deux fois, avec $q$ puis avec $r$.
Bien sûr, je peux réutiliser l'hypothèse $p \land (q \lor r)$, comme expliqué plus haut. Je dois donc démontrer les deux séquents suivants : $p \land (q \lor r), q \vdash (p \land q) \lor (p \land r)$, et $p \land (q \lor r), r \vdash (p \land q) \lor (p \land r)$.
Commençons par le premier, je vois que pour prouver $(p \land q) \lor (p \land r)$ avec les hypotheses $p \land (q \lor r)$ et $q$, je devrais pouvoir prouver directement $p \land q$. En effet, je ne peux pas supposer que $r$ sera vrai, donc la partie droite de la conclusion ne m'intéresse pas vraiment.
Dans ce cas, je peux donc utiliser $\lor$i-g[3], de la façon suivante :

$$\dfrac{p \land (q \lor r), q \vdash (p \land q)}{p \land (q \lor r), q \vdash (p \land q) \lor (q \land r)}\,\lor\text{i-g}$$

Et pour compléter ce bout de preuve, je vois qu'il s'agit juste d'assembler une conjonction, car $q$ et $p \land \ldots$ sont dans mes hypothèses. J'utilise donc $\land$i, $\land$e et des axiomes :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \land (q \lor r) \vdash p \land (q \lor r)}\,\text{ax}}{p \land (q \lor r) \vdash p}\,\land\text{e-g} \qquad \dfrac{}{q \vdash q}\,\text{ax}}{p \land (q \lor r), q \vdash (p \land q)}\,\land\text{i}}{p \land (q \lor r), q \vdash (p \land q) \lor (p \land r)}\,\lor\text{i-g}$$

Pour compléter le séquent correspondant au deuxième cas, je reproduis exactement le même arbre de preuve, mais pour l'hypothèse correspondant au cas où c'est $q$ qui est vrai, et donc avec une introduction droite de la disjonction :

3. J'ai dit que c'était rare, et c'est vrai, mais ici c'est justifié par les hypothèses, on est dans un endroit de la preuve (une branche de raisonnement par cas) où une partie de la disjonction n'est pas pertinente.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \land (q \lor r) \vdash p \land (q \lor r)}\,\text{ax}}{p \land (q \lor r) \vdash p}\,\land\text{e-g} \qquad \dfrac{}{r \vdash r}\,\text{ax}}{p \land (q \lor r), r \vdash (p \land r)}\,\land\text{i}}{p \land (q \lor r), r \vdash (p \land q) \lor (p \land r)}\,\lor\text{i-d}$$

Je peux maintenant assembler mon raisonnement par cas avec les deux branches, et terminer la preuve :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \land (q \lor r) \vdash p \land (q \lor r)}\,\text{ax}}{p \land (q \lor r) \vdash (q \lor r)}\,\land\text{e-d} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \land (q \lor r) \vdash p \land (q \lor r)}\,\text{ax}}{p \land (q \lor r) \vdash p}\,\land\text{e-g} \quad \dfrac{}{q \vdash q}\,\text{ax}}{p \land (q \lor r), q \vdash (p \land q)}\,\land\text{i}}{p \land (q \lor r), q \vdash (p \land q) \lor (p \land r)}\,\lor\text{i-g} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \land (q \lor r) \vdash p \land (q \lor r)}\,\text{ax}}{p \land (q \lor r) \vdash p}\,\land\text{e-g} \quad \dfrac{}{r \vdash r}\,\text{ax}}{p \land (q \lor r), r \vdash (p \land r)}\,\land\text{i}}{p \land (q \lor r), r \vdash (p \land q) \lor (p \land r)}\,\lor\text{i-d}}{p \land (q \lor r) \vdash ((p \land q) \lor (p \land r))}\,\lor\text{e}}{\vdash p \land (q \lor r) \to ((p \land q) \lor (p \land r))}\,\to\text{i}$$

Exercez-vous en essayant de construire des preuves sur des formules valides (tautologies) que vous connaissez. Vous pouvez par exemple prouver les équivalences concernant la distributivité, l'associativité des connecteurs, etc. . .
Pour rappel, pour prouver une équivalence il faut prouver les deux sens de l'implication. Vous pouvez commencer par la réciproque de la formule donnée en exemple.

## 2 Liste des règles

**Axiomes**

$$\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\,\text{ax} \qquad\qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash \top}\,\top$$

**Règles d'introduction**

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\,\to\text{i} \qquad \dfrac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\,\neg\text{i} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \land B}\,\land\text{i}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \lor B}\,\lor\text{i-g} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B \lor A}\,\lor\text{i-d}$$

**Règles d'élimination**

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash A \to B}{\Gamma, \Delta \vdash B} \to\mathsf{e} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash \neg A}{\Gamma, \Delta \vdash \bot} \neg\mathsf{e}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \wedge\mathsf{e\text{-}g} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \wedge\mathsf{e\text{-}d}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Delta, A \vdash C \qquad \Delta', B \vdash C}{\Gamma, \Delta, \Delta' \vdash C} \vee\mathsf{e}$$

**Règles pour l'absurde**

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A} \bot \qquad \frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A} \mathsf{abs}$$