	Licence EG **2023-2024** **TECHNIQUES QUANTITATIVES CC1 durée : 1h30**
Nom-Prénom :	

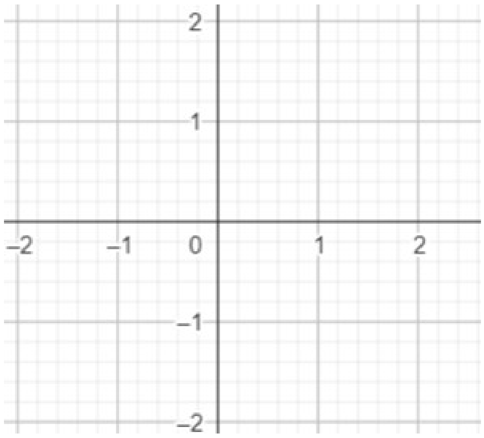
DL_n : développement limité d'ordre n.

<u>EXERCICE 1</u> :

On admet que le DL_3 en 0 de la fonction f définie par $f(x) = (x - x^2 - 2x^3)\sqrt{1+2x}$ est $f(x) = x - \frac{7}{2}x^3 + o(x^3)$

1) Que vaut f '''(0) ? (dérivée troisième de f en 0)

2) Proposer un tracé local de C_f , courbe représentative de f, pour x voisin de 0.



3) Déterminer le DL_3 en 0 de la fonction g définie pour $x \neq 2/3$ par $g(x) = \frac{1}{2-3x}$.

4) <u>Déduire des questions précédentes</u> le DL_3 en 0 de $t(x) = \frac{(x - x^2 - 2x^3)\sqrt{1+2x}}{2-3x}$.

EXERCICE 2 : Soit la fonction définie pour $x \in]-1\,;1[$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{1+x} - 1}$.

1) a) Vérifier, en utilisant la formule de Taylor, que le DL_2 en 0 de f est : $f(x) = 1 - x + \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ (reste)

(on admettra que $f''(x) = (1 - 2x)(1 + x)^{-4}\left(\dfrac{2}{1+x} - 1\right)^{-3/2}$)

b) En déduire une valeur approchée de $f(0{,}02)$.

2) a) Rappeler le DL_2 en 0 de la fonction définie par $v(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

b) En déduire le DL_2 en 0 de la fonction définie par $u(x) = \dfrac{2x}{1+x}$.

c) On admet que le DL_2 en 0 de la fonction définie par $g(x) = \sqrt{1-x}$ est : $g(x) = 1 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + o(x^2)$

i) Vérifier que $\dfrac{2}{1+x} - 1 = 1 - \dfrac{2x}{1+x}$.

ii) Retrouver en utilisant le questions 2b) et 2c)i) que le DL_2 en 0 de f est : $f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{1+x} - 1} = 1 - x + \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.

EXERCICE3 : Déterminer les limites suivantes à l'aide de développements limités :

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+4x)}{x}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{5x} - 1 - 5x}{x^2}$

EXERCICE4:

1) Determiner une primitive sur I = $]0;+\infty[$ de f (x) = $\sqrt{2} + 15\,x^9 - \dfrac{10}{x^2\,\sqrt{x}}$.

2) Déterminer une primitive sur I = $\left]\dfrac{9}{4};+\infty\right[$ de f (x) = $\dfrac{8}{3(4x-9)^7}$

3) Déterminer une primitive sur I = IR de f (x) = $\dfrac{2x}{4+5x^2}$.

4) Déterminer une primitive sur I = IR de f (x) = $(4x - 1)\,e^{-6x^2+3x+1}$.

5) Déterminer une primitive sur I = IR de f (x) = sh(x) × ch(x) .

EXERCICE5 Soit la fonction définie sur $]\ \frac{1}{2}\ ;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{16x^4-16x^3-12x-3}{4x^2-4x+1} = \dfrac{16x^4-16x^3-12x-3}{(2x-1)^2}$.

1) Déterminer les constantes réelles a, b ,c, et d telles que $\dfrac{16x^4-16x^3-12x-3}{4x^2-4x+1} = ax^2+b+\dfrac{cx+d}{4x^2-4x+1}$.

(on pourra faire une division euclidienne ou utiliser une autre méthode)

On admettra pour continuer que a = 4, b = – 1, c = – 16 et d = – 2.

2) Déterminer les constantes réelles A et B telles que $\dfrac{16x+2}{4x^2-4x+1} = \dfrac{16x+2}{(2x-1)^2} = \dfrac{A}{2x-1}+\dfrac{B}{(2x-1)^2}$.

3) Déterminer une primitive de f sur $I =]\ \frac{1}{2}\ ;+\infty\ [$.

4) Calculer alors $\int_1^2 f(x)dx$.