| | |
|---|---|
| | **Licence EG** **2023-2024**<br>**TECHNIQUES QUANTITATIVES** **CC1** **durée : 1h30** |
| **Nom-Prénom :** | |

$DL_n$ : développement limité d'ordre n.

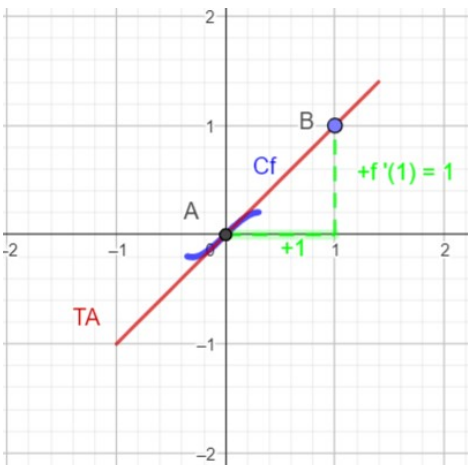
## EXERCICE 1 :

On admet que le $DL_3$ en 0 de la fonction f définie par $f(x) = (x - x^2 - 2x^3)\sqrt{1+2x}$ est $f(x) = x - \frac{7}{2}x^3 + o(x^3)$

1) Que vaut f '''(0) ? ( dérivée troisième de f en 0)

En identifiant à la formule de Taylor, $\frac{f'''(x)}{6} = -\frac{7}{2}$ donc $f'''(x) = 6 \times (-\frac{7}{2}) = -3 \times 7 = -21$.

2) Proposer un tracé local de $C_f$ , courbe représentative de f, pour x voisin de 0.




$\rightarrow$ f(0) = 0 ; A(0 ;1) $\in C_f$

$\rightarrow$ f '(0) = 1 ;
Une équation de la tangente à Cf en A est y = x.
A $\in$ (T)
Pour obtenir un second point, soit on utilise A et la pente 2 :
on obtient le point B,
soit on remarque par exemple que si x = 1 : (1 ;1) $\in$ Cf.

$\rightarrow f(x) - (x) = -\frac{7}{2}x^3 + o(x^3)$. Si x est proche de 0, $f(x) - (x) \approx -\frac{7}{2}x^3$.

Or $x^3 < 0$ si $x < 0$ , $x^3 > 0$ si $x > 0$ et $-\frac{7}{2} < 0$.

Donc : $f(x) - (x) > 0$ si $x < 0$ : Cf est au dessus de (T) et $f(x) - (x) < 0$ si $x > 0$ : Cf est en dessous de (T)

3) Déterminer le $DL_3$ en 0 de la fonction g définie pour $x \neq 2/3$ par $g(x) = \frac{1}{2-3x}$.

$g(x) = \frac{1}{2-3x} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{3}{2}x} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-u}$ avec $u = \frac{3}{2}x$.

Or on sait que le $DL_3$ en 0 de $\frac{1}{1-x}$ est $1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$ ; u est de la forme $kx^\alpha$ avec $k = \frac{3}{2} \neq 0$ et $\alpha = 1 \in \mathbb{N}^*$.

Le $DL_3$ en 0 de g est donc : $\frac{1}{2}(1+(\frac{3}{2}x) +(\frac{3}{2}x)^2 +(\frac{3}{2}x)^3 + o(x^3)) = \frac{1}{2}(1 +\frac{3}{2}x + \frac{9}{4}x^2 +\frac{27}{8}x^3 + o(x^3))$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{9}{8}x^2 + \frac{27}{16}x^3 + o(x^3)$$

4) Déduire des questions précédentes le $DL_3$ en 0 de $t(x) = \frac{(x - x^2 - 2x^3)\sqrt{1+2x}}{2-3x}$.

$t(x) = f(x)\, g(x) = ( x - \frac{7}{2}x^3 + o(x^3)) (\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{9}{8}x^2 + \frac{27}{16}x^3 + o(x^3))$

$= \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{8}x^3$ On développe en ne conservant que les

$- \frac{7}{4}x^3$ termes de degré inférieurs ou égaux à 3.

$= \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{8}x^3 + o(x^3)$

**EXERCICE 2 :** Soit la fonction définie pour $x \in ]-1\,;1[$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{1+x} - 1}$.

1) a) Vérifier, en utilisant la formule de Taylor, que le $DL_2$ en 0 de f est : $f(x) = 1 - x + \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ (reste)

(on admettra que $f''(x) = (1-2x)(1+x)^{-4}\left(\dfrac{2}{1+x} - 1\right)^{-3/2}$)

$f(x) = \left(\dfrac{2}{1+x} - 1\right)^{1/2} = \left(2(1+x)^{-1} - 1\right)^{1/2}$ $\qquad f(0) = \sqrt{1} = 1.$

$f'(x) = \dfrac{1}{2}\,(2(-1)(1)(1+x)^{-2})\left(2(1+x)^{-1} - 1\right)^{1/2-1} = -(1+x)^{-2}\left(2(1+x)^{-1} - 1\right)^{-1/2} = -\dfrac{1}{(1+x)^2}\left(\dfrac{2}{1+x} - 1\right)^{-1/2}$ ;

$f'(0) = -(1/1)(2-1)^{-1/2} = -1\,(1)^{-1/2} = -1(1) = -1.$

$f''(0) = (1)\,(1)^{-4}\,(2-1)^{-3/2} = 1(1)(1) = 1$

On obtient donc (formule de Taylor) : $\mathbf{f(x)} = 1 + (-1)\,x + \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2) = \mathbf{1 - x + \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)}$

b) En déduire une valeur approchée de $f(0{,}02)$.

0,02 est proche de 0 . Donc $\mathbf{f(0{,}02)} \approx 1 - 0{,}02 + \dfrac{1}{2}(0{,}02)^2 \approx 1 - 0{,}02 + \dfrac{1}{2}(0{,}0004) \approx 1 - 0{,}02 + 0{,}0002 \approx \mathbf{0{,}9802}$

2) a) Rappeler le $DL_2$ en 0 de la fonction définie par $v(x) = \dfrac{1}{1-x}$. $\qquad v(x) = \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + + o(x^2)$

b) En déduire le $DL_2$ en 0 de la fonction définie par $u(x) = \dfrac{2x}{1+x}$.

$u(x) = 2x \times \dfrac{1}{1+x} = 2x\,.\,\dfrac{1}{1-(-x)} = 2x \times v(h)$ avec $h = -x$ est de la forme $kx^{\alpha}$ avec $k = -1 \neq 0$ et $\alpha = 1 \in IN^*$.

Donc le le $DL_2$ en 0 de u est $u(x) = 2x\,(1 + (-x) + (-x)^2 + o(x^2)) = 2x\,(1 - x + x^2 + o(x^2))$

$= 2x - 2x^2 + 2x^3 + o(x^2)$

$= 2x - 2x^2 + o(x^2)$ $\qquad$ (car $x^3$ est négligeable par rapport à $x^2$ au voisinage de 0)

c) On admet que le $DL_2$ en 0 de la fonction définie par $g(x) = \sqrt{1-x}$ est : $g(x) = 1 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + o(x^2)$.

i) Vérifier que $\dfrac{2}{1+x} - 1 = 1 - \dfrac{2x}{1+x}$.

$\dfrac{2}{1+x} - 1 = \dfrac{2-(1+x)}{1+x} = \dfrac{1-x}{1+x}$ ; $1 - \dfrac{2x}{1+x} = \dfrac{1+x-2x}{1+x} = \dfrac{1-x}{1+x}$ d'où le résultat.

ii) Retrouver en utilisant le questions 2b) et 2c)i) que le $DL_2$ en 0 de f est : $f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{1+x} - 1} = 1 - x + \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.

$f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{1+x} - 1} = \sqrt{1 - \dfrac{2x}{1+x}} = g(u)$ avec; g a un $DL_2$ en 0

u admet un $DL_3$ en 0 , $u = \dfrac{2x}{1+x}$ . $u = \dfrac{2x}{1+x} \xrightarrow[x \to 0]{} \dfrac{0}{1} = 0$ et g a un $DL_2$ en 0

f admet donc un $DL_2$ en 0 que l'on peut trouver à l'aide de celui de g.

$f(x) = 1 - \dfrac{1}{2}\,(\,2x - 2x^2 + o(x^2)\,) - \dfrac{1}{8}(\,2x - 2x^2 + o(x^2)\,)^2 + o(x^2)$

$= 1 - x + x^2 - \dfrac{1}{8}(\,4x^2 + o(x^2)\,)$ ( **multiplication de deux $DL_2$**)

$= 1 - x + x^2 - \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2) = \mathbf{1 - x + \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = f(x).$

**EXERCICE3 :** Déterminer les limites suivantes à l'aide de développements limités :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+4x)}{x}$. Cherchons le $DL_1$ en 0 de $\ln(1 + 4x)$ .

$f(x) = \ln(1 + 4x) = f(0) + f'(0)\,x + o(x)$ ; $f(0) = \ln(1) = 0$, $f'(x) = \dfrac{4}{1+4x}$ donc $f'(0) = \dfrac{4}{1} = 4$.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+4x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0+4x+o(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x+o(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{4x}{x}+\dfrac{o(x)}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} (4 + o(1)) = 4 + 0 = 4$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{5x}-1-5x}{x^2}$ Cherchons le $DL_2$ en 0 de $e^{5x}$.

On sait que $e^x = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ $f(x) = e^{5x} = e^u$ avec $u = 5x$ qui est de la forme $kx^\alpha$ avec $k = 5 \neq 0$ et $\alpha = 1 \in IN^*$.

Le $DL_2$ en 0 f est donc : $f(x) = 1 + (5x) + \dfrac{1}{2}(5x)^2 + o(x^2) = 1 + 5x + \dfrac{1}{2}\,25\,x^2 + o(x^2) = 1 + 5x + \dfrac{25}{2}x^2 + o(x^2)$.

$$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{5x}-1-5x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1+5x+\frac{25}{2}x^2+o(x^2)-1-5x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{25}{2}x^2+o(x^2)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\frac{25}{2}x^2}{x^2} + \frac{o(x^2)}{x^2}\right)$$
$$= \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{25}{2} + o(1)\right) = \frac{25}{2} + 0 = \frac{25}{2}.$$

**EXERCICE4:**

1) Determiner une primitive sur $I = \left]0;+\infty\right[$ de $f(x) = \sqrt{2} + 15x^9 - \dfrac{10}{x^2\sqrt{x}}$.

$\dfrac{10}{x^2\sqrt{x}} = \dfrac{10}{x^2\,x^{1/2}} = \dfrac{10}{x^{2+1/2}} = \dfrac{10}{x^{5/2}} = 10\,x^{-5/2}$ donc $f(x) = \sqrt{2} + 15x^9 - 10\,x^{-5/2}$.

Une primitive de f sur I est

$$F(x) = \sqrt{2}\,x + 15\frac{x^{9+1}}{9+1} - 10\frac{x^{-5/2+1}}{-5/2+1} = \sqrt{2}\,x + 15\frac{x^{10}}{10} - 10\frac{x^{-3/2}}{-3/2} = \sqrt{2}\,x + \frac{3}{2}x^{10} - 10\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-3/2}$$

$$F(x) = \sqrt{2}\,x + \frac{3}{2}x^{10} + \frac{20}{3}\frac{1}{x^{3/2}} = \sqrt{2}\,x + \frac{3}{2}x^{10} + \frac{20}{3}\frac{1}{x^{1+1/2}} = \sqrt{2}\,x + \frac{3}{2}x^{10} + \frac{20}{3x\sqrt{x}}.$$

2) Déterminer une primitive sur $I = \left]\dfrac{9}{4};+\infty\right[$ de $f(x) = \dfrac{8}{3(4x-9)^7}$.

$f(x) = \dfrac{8}{3}(4x-9)^{-7} = k\,u'\,u^n$ ? $\quad n = -7 \quad u = 4x - 9 \quad u' = 4$

$f(x) = \dfrac{8}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)(4)(4x-9)^{-7} = \dfrac{2}{3} \times 4\,(4x-9)^{-7} = k\,u'\,u^{n-1}$ avec $k = \dfrac{2}{3}$.

Une primitive de f sur I est $F(x) = \dfrac{2}{3}\,\dfrac{1}{-7+1}(4x-9)^{-7+1} = \dfrac{2}{3}\,\dfrac{1}{-6}(4x-9)^{-6} = -\dfrac{1}{9(4x-9)^6}$.

3) Déterminer une primitive sur $I = IR$ de $f(x) = \dfrac{2x}{4+5x^2}$.

$u = 4 + 5x^2$ ; $u' = 10x$ . $\quad f(x) = 2 \times \dfrac{1}{10}.\dfrac{10x}{4+5x^2} = \dfrac{1}{5}\,\dfrac{10x}{4+5x^2} = k\dfrac{u'}{u}$ avec $k = \dfrac{1}{5}$:

Une primitive de f sur I est $F(x) = \dfrac{1}{5}\ln(|4 + 5x^2|) = \dfrac{1}{5}\ln(4 + 5x^2)$ car $4 + 5x^2 > 0$ sur I.

4) Déterminer une primitive sur $I = IR$ de $f(x) = (4x - 1)\,e^{-6x^2+3x+1}$.

$f(x) = k\,u'\,e^u$ ? $\quad u = -6x^2 + 3x + 1$ ; $\quad u' = -12x + 3$.

$f(x) = -\dfrac{1}{3}(-3).(4x-1)\,e^{-6x^2+3x+1} = -\dfrac{1}{3}(-12x+3)\,e^{-6x^2+3x+1} = k\,u'\,e^u$ avec $k = -\dfrac{1}{3}$.

Une primitive de f sur I est $F(x) = -\dfrac{1}{3}\,e^{-6x^2+3x+1}$.

5) Déterminer une primitive sur I = IR de f ( x ) = sh(x) × ch(x) = sh(x) × (ch(x))$^1$ .

f(x) = u’ $u^n$ avec u = ch(x) et n = 1 ( on a bien u’ = sh(x) )

Une primitive de f sur I est $F(x) = \frac{1}{1+1}\ (ch(x))^{1+1} = \frac{1}{2}\ (ch(x))^2$ .

**EXERCICE5** Soit la fonction définie sur $]\ \frac{1}{2}\ ;+\infty[$ par $f(x) = \frac{16x^4-16x^3-12x-3}{4x^2-4x+1} = \frac{16x^4-16x^3-12x-3}{(2x-1)^2}$.

1) Déterminer les constantes réelles a, b ,c, et d telles que $\frac{16x^4-16x^3-12x-3}{4x^2-4x+1} = ax^2+b+\frac{cx+d}{4x^2-4x+1}$.

( on pourra faire une division euclidienne ou utiliser une autre méthode)

$$\begin{array}{r|l} 16\,x^4-16\,x^3\qquad\qquad -12\,x-3 & 4\,x^2-4x+1 \\ \cline{2-2} -(\,16\,x^4-16\,x^3+4\,x^2\,)\qquad\qquad\qquad & 4\,x^2-1 \\ -4\,x^2-12\,x-3 & \\ -(-4\,x^2+4x-1)\quad & \\ -\quad 16x-2 & \end{array}$$

Donc $f(x) = 4x^2\ -1 + \frac{-16x+(-2)}{4x^2-4x+1}$ : ainsi a = 4, b = – 1, c = – 16 et d = – 2.

On admettra pour continuer que a = 4, b = – 1, c = – 16 et d = – 2.

2) Déterminer les constantes réelles A et B telles que $\frac{16x+2}{4x^2-4x+1} = \frac{16x+2}{(2x-1)^2} = \frac{A}{2x-1}+\frac{B}{(2x-1)^2}$ .

$$\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{(2x-1)^2} = \frac{A(2x-1)+B}{(2x-1)^2} = \frac{2Ax-A+B}{(2x-1)^2}.$$

Il y a égalité avec $\frac{16x+2}{(2x-1)^2}$ ssi $\begin{cases} 2A=16 \\ -A+B=2 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} A=8 \\ B=2+A=10 \end{cases}$. Donc $\frac{16x+2}{(2x-1)^2} = \frac{8}{2x-1}+\frac{10}{(2x-1)^2}$ .

3) Déterminer une primitive de f sur $I = ]\ \frac{1}{2}\ ;+\infty\ [$.

$$f(x) = 4\,x^2-1-(\frac{8}{2x-1}+\frac{10}{(2x-1)^2}) = 4\,x^2-1-\frac{8}{2x-1}-\frac{10}{(2x-1)^2}$$

$$= 4\,x^2-1-4\times\frac{2}{2x-1}-10\times(2x-1)^{-2}$$

$$= 4\,x^2-1-4\times\frac{2}{2x-1}-5\,(2)\times(2x-1)^{-2} = 4\,x^2-1-«\,k\frac{u'}{u}\,»-«\,k\,u'u^n\,»$$

Une primitive de f sur I est : $F(x) = 4\times\frac{x^3}{3}-x-4\ln(|2x-1|)-5\times\frac{1}{-2+1}(2x-1)^{-2+1}$

$F(x) = \frac{4}{3}\ x^3-x-4\ln(2x-1)-5-(-1)\ (2x-1)^{-1}$ ( 2x – 1 > 0 sur I donc |2x – 1| = 2x – 1)

$$= \frac{4}{3}\ x^3-x-4\ln(2x-1)+\frac{5}{2x-1}.$$

4) Calculer alors $\int_1^2 f(x)dx$ .

$$\int_1^2 f(x)dx\ = F(2)-F(1) = \frac{4}{3}\ (8)-2-4\ln(3)+\frac{5}{3}-(\ \frac{4}{3}\ (1)-1-4\ln(1)+5)$$

$$= \frac{32}{3}-2-4\ln(3)+\frac{5}{3}-\frac{4}{3}+1+4(0)-5 = \frac{32}{3}+\frac{5}{3}-\frac{4}{3}-6-4\ln(3)$$

$$= \frac{32+5-4-18}{3}-4\ln(3) = \frac{15}{3}-4\ln(3) = 5-4\ln(3)$$