FACULTÉ DE DROIT ÉCONOMIE & GESTION UNIVERSITÉ D'ORLÉANS	**Licence EG** **TECHNIQUES QUANTITATIVES**	**2023-2024** **CC2** **durée : 1h30**
Nom-Prénom :		

EX1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} ch(x)\times sh(x) & \text{si } x \le 0 \\ xe^{2x^2-2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{x^3} & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$.

NB: $ch(0) = \dfrac{e^0+e^{-0}}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1$

1) Calculer l'intégrale $A = \int_{-1}^{0} f(x)dx$.

$$A = \int_{-1}^{0} \underbrace{sh(x)}_{u'} . \underbrace{(ch(x))^1}_{u^n} dx = \left[\frac{1}{1+1} (ch(x))^2 \right]_{-1}^{0} = \frac{1}{2}(ch(0))^2 - \frac{1}{2}(ch(-1))^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 1^2 - \frac{1}{2}(ch(-1))^2$$

$$= \;= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(ch(-1))^2$$

$$(ch(-1))^2 = \left(\frac{e^{-1}+e}{2}\right)^2 = \frac{e^{-2}+2+e^2}{4}$$

2) Calculer l'intégrale $B = \int_{1/2}^{3} f(x)dx$.

$$B = \int_{\frac{1}{2}}^{1} xe^{2x^2-2} dx + \int_{1}^{3} \frac{1}{x^3} dx = B_1 + B_2$$

$$B_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)}_{k} \cdot \underbrace{4x}_{u'} \underbrace{e^{2x^2-2}}_{e^u} dx = \left[\frac{1}{4} e^{2x^2-2} \right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{4} e^0 - \frac{1}{4} e^{\cancel{2 \cdot \frac{1}{4}}\, \frac{2}{4} - 2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} e^{-\frac{3}{2}}$$

$$B_2 = \int_{1}^{3} x^{-3} dx = \left[\frac{1}{-3+1} x^{-3+1} \right]_{1}^{3} = \left[-\frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2} \right]_{1}^{3} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{9} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-1+9}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

$$\text{Donc } B = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} e^{-\frac{3}{2}} + \frac{4}{9} = \frac{9+16}{36} - \frac{1}{4} e^{-\frac{3}{2}} = \frac{25}{36} - \frac{1}{4} e^{-3/2}$$

EX2 : 4,5

1) Montrer que $ch(\ln(2)) = \dfrac{5}{4}$ (rappel : $ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$).

$$ch(\ln(2)) = \frac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2 + e^{\ln(2^{-1})}}{2} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{5}{2}}{2} = \frac{5}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

2) Calculer, grâce à une intégration par parties, l'intégrale $A = \int_{0}^{\ln(2)} x\, ch(x)dx$. (on admettra que $sh(\ln(2)) = \dfrac{3}{4}$.)

$u' = ch(x)$	$u = sh(x)$
$v = x$	$v' = 1$

$$\text{IPP : } A = \left[\underbrace{x}_{v} \underbrace{sh(x)}_{u} \right]_{0}^{\ln(2)} - \int_{0}^{\ln(2)} \underbrace{1}_{v'} \times \underbrace{sh(x)}_{u} dx$$

$$= \ln(2) \times sh(\ln(2)) - 0 - \left[ch(x) \right]_{0}^{\ln 2}$$

$$= \ln(2) \times \frac{3}{4} - \left(ch(\ln(2)) - ch(0) \right)$$

$$= \frac{3}{4} \ln(2) - \left(\frac{5}{4} - 1 \right) = \frac{3}{4} \ln(2) - \frac{1}{4}$$

10,5

EX3 : 1) Calculer les intégrales $K = \int_0^3 \frac{2}{3x+2}dx$ et $L = \int_0^3 \frac{1}{x^2+9}dx$.

$$K = \int_0^3 \left(2\times\frac{1}{3}\right)\times\frac{\overset{u'}{3}}{\underset{u}{3x+2}}\,dx = \left[\frac{2}{3}\ln(\underbrace{3x+2}_{>0 \text{ sur } [0;3]})\right]_0^3 = \frac{2}{3}\ln(11)-\frac{2}{3}\ln(2)$$

$k = \frac{2}{3}$

$$L : \frac{1}{x^2+9} = \frac{1}{9}\times\frac{1}{\frac{x^2}{9}+1} = \frac{1}{9}\times\frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \left(\frac{1}{9}\times 3\right)\frac{\overset{u'}{\frac{1}{3}}}{\underbrace{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}_{1+u^2}}$$

$k = \frac{1}{3}$ $\quad$ $1+u^2$ avec $u = \frac{1}{3}x$; $u' = \frac{1}{3}$

$$\text{Donc } L = \left[\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{1}{3}x\right)\right]_0^3 = \frac{1}{3}\arctan(1) - \frac{1}{3}\times\arctan(0)$$
$$= \frac{1}{3}\times\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\times 0$$
$$= \frac{\pi}{12}$$

2) Soit la fonction définie sur $I = \left]-\frac{2}{3} ; +\infty\right[$. par $g(x) = \frac{2x^2-3x+16}{(x^2+9)(3x+2)}$.

a) Déterminer les réels A et B tels que, pour tout x de I, $g(x) = \frac{A}{x^2+9}+\frac{B}{3x+2}$.

$$\frac{A}{x^2+9}+\frac{B}{3x+2} = \frac{A(3x+2)+B(x^2+9)}{(x^2+9)(3x+2)}$$
$$= \frac{3Ax+2A+Bx^2+9B}{(x^2+9)(3x+2)}$$
$$= \frac{Bx^2+3Ax+2A+9B}{(x^2+9)(3x+2)}$$

Il y a égalité avec $g(x)$ ssi $\begin{cases} B = 2 \\ 3A = -3 \\ 2A+9B = 16 \end{cases}$

$$\begin{cases} B = 2 \\ 3A = -3 \\ 2A+9B = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 2 \\ A = -1 \\ 2(-1)+9\times 2 = -2+18 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 2 \\ A = -1 \end{cases}$$

$$\text{donc } g(x) = -\frac{1}{x^2+9}+\frac{2}{3x+2}$$

b) Calculer l'intégrale $M = \int_0^3 g(x)dx$

$$M = \int_0^3\left(-\frac{1}{x^2+9}+\frac{2}{3x+2}\right)dx = -\int_0^3\frac{1}{x^2+9}dx + \int_0^3\frac{2}{3x+2}dx$$
$$= -L+K = -\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}\ln(11)-\frac{2}{3}\ln(2)$$

3) Soit la fonction définie sur I par $f(x) = \frac{6x^3+60x+4}{(x^2+9)(3x+2)}$

a) Développer $P(x) = (x^2+9)(3x+2)$.

$$P(x) = 3x^3+2x^2+27x+18$$

b) Calculer l'intégrale $N = \int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 \frac{6x^3+60x+4}{(x^2+9)(3x+2)}dx$. (on pourra faire une division euclidienne et utiliser les questions précédentes)

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 \qquad\quad + 60x + 4 & 3x^3 + 2x^2 + 27x + 18 \\ \hline -(6x^3 + 4x^2 + 54x + 36) & 2 \\ -4x^2 + 6x - 32 & \end{array}$$

$$f(x) = 2 + \frac{-4x^2+6x-32}{(x^2+9)(3x+2)} = 2 - 2\times\frac{2x^2-3x+16}{(x^2+9)(3x+2)} = 2 - 2g(x)$$

$$N = \int_0^3 (2-2g(x))dx = \int_0^3 2dx - 2\int_0^3 g(x)\,dx = [2x]_0^3 - 2M$$

$$N = 6 - 0 - 2\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\ln(11) - \frac{2}{3}\ln(2)\right) = 6 + \frac{\pi}{6} - \frac{4}{3}\ln(11) + \frac{4}{3}\ln(2)$$

EX4 : 1) Pourquoi le polynôme $p(x) = 2x^2 + 2x + 1$ n'est-il pas factorisable sur IR ?

4,5

$\Delta = 2^2 - 4\times 2\times 1 = 4 - 8 = -4 < 0$: p n'est pas factorisable sur IR.

2) Déterminer trois réels A , B et C tels que : $p(x) = 2x^2 + 2x + 1 = A\left[(Bx+C)^2+1\right]$

$$p(x) = 2(\underbrace{x^2+x}_{a^2+2ab}) + 1$$

$a^2 = x^2 \quad a = x$

$2ab = 2bx = 1$

$2b = 1 \quad b = \frac{1}{2}$

$$= 2\Big(\underbrace{(x+\tfrac{1}{2})^2}_{(a+b)^2} - \underbrace{(\tfrac{1}{2})^2}_{b^2}\Big) + 1$$

$$= 2(x+\tfrac{1}{2})^2 - \cancel{2}\times\frac{1}{\cancel{4}_{\,2}} + 1$$

$$= 2(x+\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(2\times 2(x+\tfrac{1}{2})^2 + 1\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\left(2(x+\tfrac{1}{2})\right)^2 + 1\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left((2x+1)^2 + 1\right)$$: donc $A = \frac{1}{2}$, $B = 2$ et $C = 1$

On admettra pour continuer que les valeurs $A = \frac{1}{2}$, $B = 2$ et $C = 1$ conviennent.

3) En déduire une primitive sur IR de f telle que $f(x) = \frac{1}{2x^2+2x+1}$ pour tout $x \in$ IR.

$$f(x) = \frac{1}{p(x)} = \frac{1}{\frac{1}{2}(1+(2x+1)^2)} = \overbrace{2}^{u'}\times\frac{1}{\underbrace{1+(2x+1)^2}_{1+u^2}}$$

avec $u = 2x+1$; $u' = 2$

donc une primitive de f sur IR est $F(x) = \arctan(2x+1)$

4) Calculer alors $K = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2x^2+2x+1}dx$.

$$K = F(1) - F(-1) = \arctan(3) - \arctan(-1)$$
$$= \arctan(3) - \left(-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \arctan(3) + \frac{\pi}{4}$$

4

EX5 : 1) Vérifier à l'aide du changement de variable $t = \sqrt{x}$, que $J = \int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}+x}dx$ est égale à 2ln(2).

$t = \sqrt{x} \iff x = t^2$

bornes : si $x = 1$, $t = \sqrt{1} = 1$; si $x = 9$, $t = \sqrt{9} = 3$

fonction : $\frac{1}{\sqrt{x}+x} = \frac{1}{t+t^2}$

dx : $x = t^2$ donc $\frac{dx}{dt} = 2t$ d'où $dx = 2t\,dt$

$4 = 2^2$

$J = \int_1^3 \frac{1}{t+t^2} \times 2t\,dt = \int_1^3 2\times\frac{\cancel{t}}{\cancel{t}(1+t)}dt = \left[2\ln(1+t)\right]_1^3 = 2\ln(4) - 2\ln(2)$
$= 2\times 2\ln 2 - 2\ln(2)$
$= 2\ln(2)$

$1+t > 0$ sur $[1;3]$

2) Déterminer la valeur moyenne M sur I = [1 ;9] de la fonction définie sur]0 ;+ ∞[$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+x}$.

$M = \frac{1}{9-1}\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}+x}dx = \frac{1}{8}\times 2\ln(2) = \frac{1}{4}\ln(2)$

95

EX6 : 1) Calculer l'intégrale $A = \int_3^{15} \frac{x}{\sqrt{2x-5}}dx$. (indication : faire une intégration par parties)

$= x(2x-5)^{-\frac{1}{2}}$

$25^{\frac{3}{2}} = (5^2)^{\frac{3}{2}} = 5^{2\times\frac{3}{2}} = 5^3 = 125$

$v = x$ | $v' = 1$

$u' = \underbrace{\frac{1}{2}}_{k}\,\underbrace{2}_{u'}\,\underbrace{(2x-5)^{-\frac{1}{2}}}_{u^n}$ | $u = \frac{1}{2}\times\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(2x-5)^{-\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{2}(2x-5)^{\frac{1}{2}}$

IPP : $A = \left[x(2x-5)^{\frac{1}{2}}\right]_3^5 - \int_3^{15} 1\times(2x-5)^{\frac{1}{2}}dx$

$= 15\sqrt{25} - 3\sqrt{1} - \int_3^{15} \underbrace{\frac{1}{2}}_{k}\cdot\underbrace{2}_{u'}\,\underbrace{(2x-5)^{\frac{1}{2}}}_{u^n}dx = 15\times 5 - 3 - \left[\frac{1}{2}\times\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(2x-5)^{\frac{1}{2}+1}\right]_3^{15}$

$A = 75 - 3 - \left[\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}(2x-5)^{\frac{3}{2}}\right]_3^{15} = 72 - \left(\frac{1}{3}\times 25^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\times 1^{\frac{3}{2}}\right) = 72 - \frac{125}{3} + \frac{1}{3} = \frac{216-124}{3} = \frac{92}{3}$

2) a) Calculer l'intégrale $B = \int_1^{25}(\sqrt{t} + \frac{5}{\sqrt{t}})dt = \int_1^{25}(t^{\frac{1}{2}} + 5t^{-\frac{1}{2}})dt$

$(50 - 10 = 40 = \frac{120}{3})$

$B = \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}t^{\frac{1}{2}+1} + 5\times\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}t^{-\frac{1}{2}+1}\right]_1^{25} = \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + 10t^{\frac{1}{2}}\right]_1^{25}$

$B = \frac{2}{3}\cdot 5^{\frac{3}{2}} + 10\sqrt{25} - \left(\frac{2}{3}\cdot 1^{\frac{3}{2}} + 10\sqrt{1}\right) = \frac{2\times 125}{3} + 10\times 5 - \left(\frac{2}{3} + 10\right) = \frac{250}{3} + 50 - \frac{2}{3} - 10$
$= \frac{248 + 120}{3} = \frac{368}{3}$

b) Calculer à l'aide du changement de variable t = 2x – 5 dans l'intégrale A la valeur de $A = \int_3^{15} \frac{x}{\sqrt{2x-5}}dx$.

$t = 2x - 5 \iff 2x = t + 5 \iff x = \frac{1}{2}(t+5)$

bornes : si $x = 3$, $t = 6 - 5 = 1$; si $t = 15$, $x = 30 - 5 = 25$

fonction : $\frac{x}{\sqrt{2x-5}} = \frac{\frac{1}{2}(t+5)}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\,\frac{t+5}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{t}} + \frac{5}{\sqrt{t}}\right)$
$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{t} + \frac{5}{\sqrt{t}}\right)$

dx : $x = \frac{1}{2}(t+5)$ donc $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$

d'où $dx = \frac{1}{2}dt$

Ainsi $A = \int_1^{25} \frac{1}{2}\left(\sqrt{t} + \frac{5}{\sqrt{t}}\right)\frac{1}{2}dt = \frac{1}{4}\int_1^{25}\left(\sqrt{t} + \frac{5}{\sqrt{t}}\right)dt = \frac{1}{4}\times\frac{368}{3} = \frac{92}{3}$