FACULTÉ DE DROIT ÉCONOMIE & GESTION UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

1ère SESSION DU SEMESTRE 3 2023-2024

Mention / Parcours / Spécialité : **Licence Economie et Gestion-Majeure Economie**
Année : 2
Intitulé de l'épreuve : **Techniques quantitatives**
Durée de l'épreuve : 2 h 30 Documents autorisés : aucun Matériel autorisé : aucun
Toutes les réponses doivent être justifiées.
⚠ ce sujet comporte **deux pages**

EX1 : Soient les fonctions u et v définies pour $x \in]0\,;+\infty[$ par $u(x) = \dfrac{e^{5x+4}}{x^3}$ et $v(x) = \dfrac{e^{5x+4}(5x-3)}{x^4}$.

1) Montrer que u est une primitive de v sur $I =]0\,;+\infty[$.

2) Déterminer la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction v qui vaut 2 en $\dfrac{1}{5}$.

3) L'intégrale généralisée $A = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{5x+4}(5x-3)}{x^4}dx$ est–elle convergente ? Si oui que vaut–elle ?

EX2 : Soit la fonction f définie pour x appartenant à $I =]-\infty\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{20x^3 - 12x^2 - 32x + 1}{(5x^4 + x + 2)(4x^2 + 1)}$.

On admet que $5x^4 + x + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1) Vérifier que $f(x) = \dfrac{20x^3 + 1}{5x^4 + x + 2} - \dfrac{16x}{4x^2 + 1}$.

2) En déduire une primitive de f sur I.

3) L'intégrale généralisée $A = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{20x^3 - 12x^2 - 16x + 1}{(5x^4 + x + 2)(4x^2 + 1)}dx$ est–elle convergente ? Si oui, que vaut–elle ?

EX3 : (version 2)

1) Calculer l'intégrale $A = \displaystyle\int_0^1 9x^2 \ln(3x+1)dx$ à l'aide d'une intégration par parties puis d'une division euclidienne.

2) Calculer l'intégrale $B = \displaystyle\int_0^3 \frac{x^2}{(2 - \frac{1}{3}x)^4}dx$ à l'aide du changement de variable $t = 2 - \dfrac{1}{3}x$.

EX4 : On admet que $x^2 - 24x + 400 = (x-12)^2 + 256$ et que $256 = 4 \times 64 = 8 \times 32 = 16 \times 16$ ...

1) Montrer que l'intégrale $A = \displaystyle\int_{12}^{60} \frac{32}{x^2 - 24x + 400}dx = \int_{12}^{60} \frac{32}{256 + (x-12)^2}dx$ est égale à 2 arctan(3) .

2) Montrer que l'intégrale $B = \displaystyle\int_{12}^{60} \frac{x - 12}{x^2 - 24x + 400}dx$ est égale à $\dfrac{1}{2}\ln(10)$.

3) Déterminer, en utilisant les deux questions précédentes, la valeur des intégrales :

$M = \displaystyle\int_{60}^{12} \frac{32}{x^2 - 24x + 400}dx$ et $K = \displaystyle\int_{12}^{60} \frac{x}{x^2 - 24x + 400}dx$.

4) L'intégrale généralisée $T = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{32}{x^2 - 24x + 400}dx$ est-elle convergente ? Si oui, que vaut-elle ?

5) Déterminer la valeur du réel b pour que l'intégrale généralisée $V = \displaystyle\int_b^{+\infty} \frac{32}{x^2 - 24x + 400}dx$ soit égale à $\dfrac{3\pi}{2}$.

EX5 : On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{2}{x^5} & \text{si } x \leq -1 \\ 1 & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ e^{-2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On admet que f est une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

1) Calculer les intégrales $A = \int_{-3}^{-1} f(x)dx$ et $B = \int_{-1/2}^{4} f(x)dx$.

2) L'intégrale généralisée $C = \int_{-\infty}^{-1} f(x)\,dx$ est–elle convergente ? Si oui, quelle est sa valeur ?

3) L'intégrale généralisée $D = \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$ est–elle convergente ? Si oui, quelle est sa valeur ?

4) L'intégrale généralisée $E = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ est–elle convergente ? Si oui, quelle est sa valeur ?

EX6 :

1) Déterminer les constantes réelles a et b telles que $\dfrac{2x}{(1+2x)^3} = \dfrac{a}{(1+2x)^2} + \dfrac{b}{(1+2x)^3}$.

2) Calculer, à l'aide du changement de variable, $x = \sqrt{t}$ l'intégrale $A = \displaystyle\int_{1}^{16} \dfrac{1}{(1+2\sqrt{t})^3}dt$.

EX7 :

1) Déterminer les DL_2 en 0 des fonctions $f(x) = \dfrac{1}{3+2x}$ et $g(x) = e^{2x}$.

2) En déduire que le DL_2 en 0 de la fonction $h(x) = \dfrac{27e^{2x}}{3+2x}$ est égal à $9 + 12x + 10x^2 + o(x^2)$.

3) Déterminer, en utilisant la question précédente, une valeur approchée de $\dfrac{27e^{-0,04}}{2,96}$.

4) Que vaut la limite lorsque x tend vers 0 de $\dfrac{h(x)-9-12x}{4x^2}$?

5) On admet que le DL_3 en 0 de la fonction $h(x) = \dfrac{27e^{2x}}{3+2x}$ est égal à : $h(x) = 9 + 12x + 10x^2 + \dfrac{16}{3}x^3 + o(x^3)$.

a) Déterminer le DL_3 en 0 de la fonction $p(x) = 8 + 9x + 10x^2 + 7x^3 + 2x^4 - 9x^5$,
puis le DL_3 en 0 de la fonction $d(x) = h(x) - p(x)$.

b) Proposer un tracé local de la fonction d au voisinage du point $A(0 ; d(0))$.

EX1 : Soient les fonctions u et v définies pour $x \in]0\,;+\infty[$ par $u(x) = \dfrac{e^{5x+4}}{x^3}$ et $v(x) = \dfrac{e^{5x+4}(5x-3)}{x^4}$.

1) Montrer que u est une primitive de v sur $I =]0\,;+\infty[$.

2) Déterminer la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction v qui vaut 2 en $\dfrac{1}{5}$.

3) L'intégrale généralisée $A = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{5x+4}(5x-3)}{x^4}dx$ est–elle convergente ? Si oui que vaut–elle ?

1) $u(x) = \underbrace{x^{-3}}_{u}\ \underbrace{e^{5x+4}}_{v}$

$u'(x) = \underbrace{-3x^{-4}}_{u'} \times \underbrace{e^{5x+4}}_{v} + \underbrace{x^{-3}}_{u} \times \underbrace{5e^{5x+4}}_{v'}$

$= x^{-4} e^{5x+4}(-3+5x) = \dfrac{(5x-3)e^{5x+4}}{x^4} = v(x)$: u est une primitive de v sur I.

2) $u\left(\frac{1}{5}\right) = \dfrac{e^{\cancel{5}\times\frac{1}{\cancel{5}}+4}}{\left(\frac{1}{5}\right)^3} = \dfrac{e^5}{1/125} = 125e^5 \neq 2$: u n'est pas la primitive recherchée.

Les primitives de v sur I sont de la forme $g(x) = u(x) + c$.

On cherche c tel que $g\left(\frac{1}{5}\right) = 2$.

$g\left(\frac{1}{5}\right) = 2 \iff u\left(\frac{1}{5}\right) + c = 2 \iff c = 2 - u\left(\frac{1}{5}\right) = 2 - 125e^5$.

La primitive de v sur I qui vaut 2 en $\frac{1}{5}$ est $\dfrac{e^{5x+4}}{x^3} + 2 - 125e^5$.

3) $0 < a \leq 1 \quad A(a) = \displaystyle\int_a^1 v(x)dx = u(1) - u(a)$

$= e^9 - \dfrac{e^{5a+4}}{a^3} \xrightarrow[a\to 0^+]{} e^9 - \dfrac{\overbrace{e^4}^{>0}}{0^+}$

$= e^9 - (+\infty)$

$= -\infty$: A est divergente

EX2 : Soit la fonction f définie pour x appartenant à $I =]-\infty\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{20x^3 - 12x^2 - 32x + 1}{(5x^4 + x + 2)(4x^2 + 1)}$.

On admet que $5x^4 + x + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1) Vérifier que $f(x) = \dfrac{20x^3 + 1}{5x^4 + x + 2} - \dfrac{16x}{4x^2 + 1}$.

$$\frac{20x^3+1}{5x^4+x+2} - \frac{16x}{4x^2+1} = \frac{(20x^3+1)(4x^2+1) - 16x(5x^4+x+2)}{(5x^4+x+2)(4x^2+1)}$$

$$= \frac{\cancel{80x^5} + 20x^3 + 4x^2 + 1 - \cancel{80x^5} - 16x^2 - 32x}{(5x^4+x+2)(4x^2+1)}$$

$$= \frac{20x^3 - 12x^2 - 32x + 1}{(5x^4+x+2)(4x^2+1)} = f(x)$$

2) En déduire une primitive de f sur I.

3) L'intégrale généralisée $A = \int_0^{+\infty} \frac{20x^3 - 12x^2 - 32x + 1}{(5x^4 + x + 2)(4x^2 + 1)} dx$ est–elle convergente ? Si oui, que vaut–elle ?

2) $f(x) = \dfrac{20x^3 + 1}{5x^4 + x + 2} - \dfrac{16x}{4x^2 + 1}$

$= \dfrac{\overbrace{20x^3 + 1}^{u'}}{\underbrace{5x^4 + x + 2}_{u}} - 2 \times \dfrac{\overbrace{8x}^{u'}}{\underbrace{4x^2 + 1}_{u}}$

Une primitive de f sur I est $F(x) = \ln(\underbrace{5x^4 + x + 2}_{>0 \text{ sur } I}) - 2\ln(\underbrace{4x^2 + 1}_{>0 \text{ sur } I})$

donc pas besoin de | |

3) L'intégrale est généralisée en $+\infty$ mais pas en 0.

Soit $a \geq 0$.

$A(a) = \int_0^a f(x)\, dx = F(a) - F(0)$

$= \ln(5a^4 + a + 2) - 2\ln(4a^2 + 1) - (\ln(2) - \underbrace{\ln(1)}_{=0})$

$= \ln(5a^4 + a + 2) - \ln((4a^2 + 1)^2) - \ln(2)$

$= \ln\left(\dfrac{5a^4 + a + 2}{(4a^2 + 1)^2}\right) - \ln(2)$

Or $\lim\limits_{a \to +\infty} \dfrac{5a^4 + a + 2}{(4a^2+1)^2} = \lim\limits_{a \to +\infty} \dfrac{5a^4}{(4a^2)^2} = \lim\limits_{a \to +\infty} \dfrac{5\cancel{a^4}}{16\cancel{a^4}} = \dfrac{5}{16}$.

Donc $\lim\limits_{a \to +\infty} A(a) = \ln\left(\dfrac{5}{16}\right) - \ln(2) = \ln(5) - \ln(16) - \ln(2)$

$= \ln(5) - \ln(2^4) - \ln(2)$

$= \ln(5) - 4\ln 2 - \ln(2)$

$= \ln(5) - 5\ln(2)$: limite finie

Donc A est cv et vaut $\ln(5) - 5\ln(2)$.

EX3 :

$A =$

1) Calculer l'intégrale $\int_0^1 27x^2 \ln(3x+1)dx$ à l'aide d'une intégration par parties puis d'une division euclidienne.

$u' = 27x^2$ | $u = 27 \times \frac{1}{3}x^3 = 9x^3$

$v = \ln(3x+1)$ | $v' = \frac{3}{3x+1}$

IPP :

$$A = \left[9x^3 \times \ln(3x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 9x^3 \times \frac{3}{3x+1} dx$$

$$= A_1 - \int_0^1 \frac{27x^3}{3x+1} dx = A_1 - A_2$$

$$A_1 = 9 \times 1^3 \ln(4) - 9 \times 0 \times \ln(\ldots) = 9 \times 1 \times \ln(4) - 0 = 9\ln(4)$$

A_2 :

$$\begin{array}{r|l} 27x^3 & 3x+1 \\ \cline{2-2} -(27x^3 + 9x^2) & 9x^2 - 3x + 1 \\ -9x^2 & \\ -(-9x^2 - 3x) & \\ 3x & \\ -(3x+1) & \\ -1 & \end{array}$$

$$g(x) = \frac{27x^3}{3x+1} = 9x^2 - 3x + 1 - \frac{1}{3x+1}$$

$$= 9x^2 - 3x + 1 - \underbrace{\frac{1}{3}}_{k} \times \frac{\overset{u'}{3}}{\underbrace{3x+1}_{u}}$$

Une primitive de g sur $[0;1]$ est $G(x) = 9 \times \frac{x^3}{3} - 3 \times \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{3}\ln(\underbrace{3x+1}_{>0 \text{ sur } [0;1]})$

$$= 3x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x - \frac{1}{3}\ln(3x+1)$$

$$A_2 = G(1) - G(0) = 3 - \frac{3}{2} + 1 - \frac{1}{3}\ln(4) - (0 - 0 + 0 - \frac{1}{3}\underbrace{\ln(1)}_{=0}) = \frac{5}{2} - \frac{1}{3}\ln(4)$$

Donc $A = 9\ln(4) - \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{3}\ln(4)\right) = \left(9 + \frac{1}{3}\right)\ln(4) - \frac{5}{2} = \frac{28}{3}\ln(4) - \frac{5}{2} = A$

EX3 : $A =$ ✓

version 2.

1) Calculer l'intégrale $\int_0^1 9x^2 \ln(3x+1)dx$ à l'aide d'une intégration par parties puis d'une division euclidienne.

$u' = 9x^2 \qquad u = 9 \times \frac{1}{3}x^3 = 3x^3$

$v = \ln(3x+1) \qquad v' = \frac{3}{3x+1}$

IPP :

$$A = \left[3x^3 \times \ln(3x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 3x^3 \times \frac{3}{3x+1}\,dx$$

$$= A_1 - \int_0^1 \frac{9x^3}{3x+1}\,dx = A_1 - A_2$$

$$A_1 = 3 \times 1^3 \ln(4) - 3 \times 0 \times \ln(\dots) = 3 \times 1 \times \ln(4) - 0 = 3\ln(4)$$

A_2 :

$$\begin{array}{r|l} 9x^3 & 3x+1 \\ \hline -(9x^3 + 3x^2) & 3x^2 - x + \frac{1}{3} \\ -3x^2 & \\ -(-3x^2 - x) & \\ x & \\ -(x + \frac{1}{3}) & \\ -\frac{1}{3} & \end{array}$$

$$g(x) = \frac{9x^3}{3x+1} = 3x^2 - x + \frac{1}{3} - \frac{1/3}{3x+1}$$

$$= 3x^2 - x + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \times \frac{\overset{u'}{3}}{\underset{u}{3x+1}}$$

$k = \frac{1}{9}$

Une primitive de g sur $[0;1]$ est $G(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{9}\ln(\underbrace{3x+1}_{>0 \text{ sur } [0;1]})$

$$= x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\ln(3x+1)$$

$$A_2 = G(1) - G(0) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9}\ln(4) - \left(0 - 0 + 0 - \frac{1}{9}\underbrace{\ln(1)}_{=0}\right)$$

$$= \frac{5}{6} - \frac{1}{9}\ln(4)$$

donc $A = 3\ln(4) - \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{9}\ln(4)\right) = \left(3 + \frac{1}{9}\right)\ln(4) - \frac{5}{6} = \frac{28}{9}\ln(4) - \frac{5}{6} = A$

$B =$

2) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^3 \frac{x^2}{(2-\frac{1}{3}x)^4}dx$ à l'aide du changement de variable $t = 2 - \frac{1}{3}x$.

$$t = 2 - \frac{1}{3}x \iff \frac{1}{3}x = 2 - t \iff x = 3(2-t) = 6-3t$$

* bornes: si $x = 0$, $t = 2 - \frac{1}{3}\times 0 = 2 - 0 = 2$

si $x = 3$, $t = 2 - \frac{1}{3}\times 3 = 2 - 1 = 1$

* dx: $x = 6x - 3$ donc $\frac{dx}{dt} = (6-3t)' = -3$ d'où $dx = -3\,dt$

* fonction: $\displaystyle\frac{x^2}{(2-\frac{1}{3}x)^4} = \frac{(6-3t)^2}{t^4} = \frac{36-36t+9t^2}{t^4}$

$$\text{donc } B = \int_2^1 \frac{36-36t+9t^2}{t^4}(-3)\,dt = -3\int_2^1 \left(\frac{36}{t^4} - \frac{36t}{t^4} + \frac{9}{t^4}\right) dt$$

$$= 3\int_1^2 \left(36t^{-4} - 36t^{-3} + 9t^{-2}\right) dt$$

$$= 3\left[36\times\frac{1}{-4+1}t^{-4+1} - 36\times\frac{1}{-3+1}t^{-3+1} + 9\times\frac{1}{-2+1}t^{-2+1}\right]_1^2$$

$$= 3\left[-12t^{-3} + 18t^{-2} - 9t^{-1}\right]_1^2$$

$$= 3\left[-\frac{12}{t^3} + \frac{18}{t^2} - \frac{9}{t}\right]_1^2$$

$$B = 3\left(-\frac{12}{8} + \frac{18}{4} - \frac{9}{2} - (-12+18-9)\right)$$

$$= 3\left(-\frac{3}{2} + \cancel{\frac{9}{2}} - \cancel{\frac{9}{2}} - (-3)\right)$$

$$= 3\left(-\frac{3}{2} + 3\right) = 3\left(-\frac{3}{2} + \frac{9}{2}\right) = 3\times\frac{3}{2} = \frac{9}{2} = B$$

EX4 : On admet que $x^2 - 24x + 400 = (x-12)^2 + 256$ et que $256 = 4 \times 64 = 8 \times 32 = 16 \times 16$ ...

1) Montrer que l'intégrale $A = \displaystyle\int_{12}^{60} \frac{32}{x^2 - 24x + 400}\,dx = \int_{12}^{60} \frac{32}{256 + (x-12)^2}\,dx$ est égale à $2\arctan(3)$.

2) Montrer que l'intégrale $B = \displaystyle\int_{12}^{60} \frac{x-12}{x^2 - 24x + 400}\,dx$ est égale à $\dfrac{1}{2}\ln(10)$.

3) Déterminer, en utilisant les deux questions précédentes, la valeur des intégrales :

$M = \displaystyle\int_{60}^{12} \frac{32}{x^2 - 24x + 400}\,dx$ et $K = \displaystyle\int_{12}^{60} \frac{x}{x^2 - 24x + 400}\,dx$.

4) L'intégrale généralisée $T = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{32}{x^2 - 24x + 400}\,dx$ est-elle convergente ? Si oui, que vaut-elle ?

5) Déterminer la valeur du réel b pour que l'intégrale généralisée $V = \displaystyle\int_{b}^{+\infty} \frac{32}{x^2 - 24x + 400}\,dx$ soit égale à $\dfrac{3\pi}{2}$.

1)
$$f(x) = \frac{32}{x^2 - 24x + 400} = \frac{32}{256 + (x-12)^2}$$

$$\frac{32}{256} = \frac{\cancel{4} \times 8}{\cancel{4} \times 64} = \frac{1}{8}$$

$$= \frac{32}{256} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{256}(x-12)^2}$$

$$256 = 4 \times 64 = 2 \times 2 \times 8 \times 8 = (2 \times 8)^2 = 16^2$$

$$= \frac{1}{8} \times \frac{1}{1 + \left(\left(\frac{1}{16}\right)^2 (x-12)^2\right)}$$

$$= \frac{1}{8} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{16}(x-12)\right)^2}$$

$$\frac{12}{16} = \frac{\cancel{4} \times 3}{\cancel{4} \times 4} = \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{8} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{1x}{16} - \frac{12}{16}\right)^2}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{8} \times 16}_{k = 2} \; \frac{\overbrace{\frac{1}{16}}^{u'}}{\underbrace{1 + \left(\frac{1}{16}x - \frac{3}{4}\right)^2}_{1 + u^2}}$$

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $F(x) = 2\arctan\left(\frac{1}{16}x - \frac{3}{4}\right)$

$$A = F(60) - F(12) = 2\arctan\left(\frac{60}{16} - \frac{3}{4}\right) - 2\arctan\left(\frac{12}{16} - \frac{3}{4}\right)$$

$$= 2\arctan\left(\frac{\cancel{4} \times 15}{\cancel{4} \times 4} - \frac{3}{4}\right) - 2\arctan\left(\frac{\cancel{4} \times 3}{\cancel{4} \times 4} - \frac{3}{4}\right)$$

$$= 2\arctan\left(\frac{12}{4}\right) - 2\arctan(0)$$

$$= 2\arctan(3) - 2 \times 0 = 2\arctan(3)$$

2) $B = \displaystyle\int_{12}^{60} \frac{x-12}{x^2-24x+400}\,dx = \int_{12}^{60} \frac{1}{2}\,\frac{\overbrace{2(x-12)}^{u'}}{\underbrace{x^2-24x+400}_{u}}\,dx$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln\big(\underbrace{x^2-24x+400}_{>0}\big)\right]_{12}^{60}$$

car $x^2-24x+400 = \underbrace{256}_{>0} + \underbrace{(x-12)^2}_{\geq 0}$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times \quad 6 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(60^2 - 24\times 60 + 400) - \frac{1}{2}\ln(12^2 - 24\times 12 + 400)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(3600 - 1440 + 400) - \frac{1}{2}\ln(144 - 288 + 400)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(2560) - \frac{1}{2}\ln(256)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2560}{256}\right) = \frac{1}{2}\ln(10)$$

3) $M = \displaystyle\int_{60}^{12} f(x)\,dx = -\int_{12}^{60} f(x)\,dx = -A = -2\arctan(3)$

$$K = \int_{12}^{60} \frac{x}{x^2-12x+400}\,dx = \int_{12}^{60} \frac{x-12+12}{x^2-12x+400}\,dx$$

$$= \int_{12}^{60} \frac{x-12}{x^2-12x+400}\,dx + \int_{12}^{60} \frac{1}{32}\,\frac{12\times 32}{x^2-12x+400}\,dx$$

$$= B + \frac{12}{32}\int_{12}^{60} \frac{32}{x^2-12x+400}\,dx$$

$$= B + \frac{3}{8}A$$

$$= \frac{1}{2}\ln(10) + \frac{3}{8}\times 2\arctan(3)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(10) + \frac{3}{4}\arctan(3)$$

4) $T = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{32}{x^2 - 24x + 400}\, dx$

Soit $a \leq 0$

$T(a) = \displaystyle\int_a^0 f(x)\, dx = F(0) - F(a)$

$= 2\arctan\left(0 - \frac{3}{4}\right) - 2\arctan\left(\frac{1}{16}x - \frac{3}{4}\right)$

$= 2\arctan\left(-\frac{3}{4}\right) - 2\arctan\left(\frac{1}{16}x - \frac{3}{4}\right)$

$\xrightarrow[a \to -\infty]{} 2\arctan\left(-\frac{3}{4}\right) - 2\arctan(-\infty)$

$= 2\arctan\left(-\frac{3}{4}\right) - 2\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$= 2\arctan\left(-\frac{3}{4}\right) + \pi$: limite finie

donc T est cv et vaut $\underbrace{2\arctan\left(-\frac{3}{4}\right)}_{= -2\arctan\left(\frac{3}{4}\right)} + \pi$

5) $V = \displaystyle\int_b^{+\infty} f(x)\, dx$

Soit $a \geq b$ $\quad V(a) = \displaystyle\int_b^a f(x)\, dx = F(a) - F(b)$

$= 2\arctan\left(\frac{1}{16}a - \frac{3}{4}\right) - 2\arctan\left(\frac{1}{16}b - \frac{3}{4}\right)$

$\xrightarrow[a \to +\infty]{} 2\arctan(+\infty) - 2\arctan\left(\frac{1}{16}b - \frac{3}{4}\right)$

$= 2 \times \left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\arctan\left(\frac{1}{16}b - \frac{3}{4}\right)$

$= \pi - 2\arctan\left(\frac{1}{16}b - \frac{3}{4}\right)$:

limite finie donc V est cv et vaut $\pi - 2\arctan\left(\frac{1}{16}b - \frac{3}{4}\right)$

On cherche b tel que $V = \frac{3\pi}{2}$

$\pi - 2\arctan\left(\frac{1}{16}x - \frac{3}{4}\right) = \frac{3\pi}{2} \iff \pi - \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} = 2\arctan\left(\frac{b}{16} - \frac{3}{4}\right)$

$\iff \arctan\left(\frac{b}{16} - \frac{3}{4}\right) = -\frac{\pi}{4} = \arctan(-1)$

$\iff \frac{b}{16} - \frac{3}{4} = -1$

$\iff \frac{b}{16} = -1 + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4} \iff b = 16\left(-\frac{1}{4}\right) = -4 = b$

EX5 : On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{2}{x^5} & \text{si } x \leq -1 \\ 1 & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ e^{-2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On admet que f est une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

1) Calculer les intégrales $A = \int_{-3}^{-1} f(x)dx$ et $B = \int_{-1/2}^{4} f(x)dx$.

1) $A = \int_{-3}^{-1} \frac{2}{x^5} dx = \int_{-3}^{-1} 2 \times x^{-3} dx = \left[2 \times \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} \right]_{-3}^{-1}$

$= \left[-\frac{1}{2} x^{-4} \right]_{-3}^{-1}$

$= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{(-1)^4} - \left(-\frac{1}{2} \times \frac{1}{(-3)^4} \right)$

$= -\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{81} = \frac{-81+1}{2 \times 81} = -\frac{80}{2 \times 81} = -\frac{40}{81} = A$

$B = \int_{-\frac{1}{2}}^{4} f(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} 1 \, dx + \int_{0}^{4} e^{-2x} dx = [x]_{-\frac{1}{2}}^{0} + \int_{0}^{4} \underbrace{-\frac{1}{2}}_{k} \times \underbrace{2}_{u'} \underbrace{e^{-2x}}_{e^u} dx$

$= 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) + \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_{0}^{4}$

$= \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2} e^{-8} \right) - \left(-\frac{1}{2} \underbrace{e^{0}}_{=1} \right)$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-8} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} e^{-8}$.

2) L'intégrale généralisée $C = \int_{-\infty}^{-1} f(x)\, dx$ est–elle convergente ? Si oui, quelle est sa valeur ?

Soit $a < -1$.

$C(a) = \int_{a}^{-1} \frac{2}{x^5} dx = \left[-\frac{1}{2} x^{-4} \right]_{a}^{-1} = -\frac{1}{2} \times \underbrace{\frac{1}{(-1)^4}}_{=1} - \left(-\frac{1}{2} \times \frac{1}{a^4} \right)$

$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2a^4} \xrightarrow[a \to -\infty]{} -\frac{1}{2} + \frac{1}{+\infty} = -\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{2}$!

limite finie donc C

est cv et vaut $-\frac{1}{2}$

$D =$

3) L'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ est–elle convergente ? Si oui, quelle est sa valeur ?

Soit $a \geq 0$

$$D(a) = \int_0^a e^{-2x}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^a = -\frac{1}{2}e^{-2a} - \left(-\frac{1}{2}\underbrace{e^0}_{=1}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2a} + \frac{1}{2} \xrightarrow[a \to +\infty]{} -\frac{1}{2}e^{-\infty} + \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2}$$

$$= 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

limite finie donc D est cv et

vaut $\frac{1}{2}$

$E =$

4) L'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ est–elle convergente ? Si oui, quelle est sa valeur ?

$$E = \int_{-\infty}^{-1} f(x)\,dx + \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$= C + \int_{-1}^{0} 1\,dx + D = C + [x]_{-1}^{0} + D = C + (0-(-1)) + D = C + 1 + D$$

C et D sont cv donc E est cv et E vaut $-\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 1$

$x^2 - 24x + 400$

$(x-12)^2 - 144 + 400$

$(x-12)^2 + 256$ $\qquad 256 = 4 \times 64$

$256\left(\left(\frac{1}{16}\right)^2 (x-12)^2 + 1\right)$

$256\left(\left(\frac{1}{16}x - \frac{3}{4}\right)^2 + 1\right.$

EX6 :

1) Déterminer les constantes réelles a et b telles que $\frac{2x}{(1+2x)^3} = \frac{a}{(1+2x)^2} + \frac{b}{(1+2x)^3}$.

2) Calculer, à l'aide du changement de variable, $x = \sqrt{t}$ l'intégrale $A = \int_1^{16} \frac{1}{(1+2\sqrt{t})^3} dt$.

1) $\frac{a}{(1+2x)^2} + \frac{b}{(1+2x)^3} = \frac{a(2x+1)+b}{(1+2x)^3} = \frac{2ax+a+b}{(1+2x)^3}$

Il y a égalité avec $\frac{2x}{(1+2x)^3}$ ssi $\begin{cases} 2a = 2 \\ a+b=0 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} a=1 \\ b=-a=-1 \end{cases}$

Donc $\frac{2x}{(1+2x)^3} = \frac{1}{(2x+1)^2} - \frac{1}{(2x+1)^3}$

2) $x = \sqrt{t} \iff t = x^2 \quad (x>0)$

* bornes : si $t=1$, $x=\sqrt{1}=1$

si $t=16$, $x=\sqrt{16}=4$

* dt : $t = x^2$; $\frac{dt}{dx} = (x^2)' = 2x$ donc $dt = 2x\,dx$

* fonction : $\frac{1}{(1+2\sqrt{t})^3} = \frac{1}{(1+2x)^3}$

Donc $A = \int_1^4 \frac{1}{(1+2x)^3} \times 2x\,dx = \int_1^4 \frac{2x}{(1+2x)^3} dx$

$= \int_1^4 \left(\frac{1}{(2x+1)^2} - \frac{1}{(2x+1)^3}\right) dx$

$= \int_1^4 \Big(\underbrace{\frac{1}{2}}_{k} \times \underbrace{2}_{u'} \underbrace{(2x+1)^{-2}}_{u^n} - \underbrace{\frac{1}{2}}_{k} \times \underbrace{2}_{u'} \underbrace{(2x+1)^{-3}}_{u^n}\Big) dx$

$= \left[\frac{1}{2} \times \frac{1}{-2+1}(2x+1)^{-2+1} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{-3+1}(2x+1)^{-3+1}\right]_1^4$

$= \left[-\frac{1}{2} \times \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{(2x+1)^2}\right]_1^4$

$A = -\frac{1}{2\times 9} + \frac{1}{4\times 81} - \left(-\frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{4\times 9}\right)$

$= -\frac{1}{2\times 9} + \frac{1}{4\times 81} + \frac{1}{2\times 3} - \frac{1}{4\times 9} = \frac{-2\times 9 + 1 + 2\times 27 - 9}{4\times 81} = \frac{-18+1+54-9}{4\times 81} = \frac{28}{4\times 81} = \frac{7}{81}$

EX7 :

1) Déterminer les DL_2 en 0 des fonctions $f(x) = \dfrac{1}{3+2x}$ et $g(x) = e^{2x}$.

2) En déduire que le DL_2 en 0 de la fonction $h(x) = \dfrac{27e^{2x}}{3+2x}$ est égal à $9 + 12x + 10x^2 + o(x^2)$.

1) $f(x) = \dfrac{1}{3+2x} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{1+\frac{2x}{3}} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}x\right)} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{1-u}$

avec $u = -\frac{2}{3}x$ de la forme kx^m avec $k = -\frac{2}{3}$ et $m = 1 \in \mathbb{N}^*$

$u(0) = 0$

or $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$

donc $f(x) = \dfrac{1}{3}\left(1 + \left(-\frac{2}{3}x\right) + \left(-\frac{2}{3}x\right)^2 + o(x^2)\right)$

$= \dfrac{1}{3}\left(1 - \frac{2}{3}x + \frac{4}{9}x^2 + o(x^2)\right)$

$= \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{9}x + \dfrac{4}{27}x^2 + o(x^2)$: DL_2 de f en 0

$g(x) = e^{2x}$ $g'(x) = 2e^{2x}$ $g''(x) = 2\times 2e^{2x} = 4e^{2x}$

$g(0) = e^0 = 1$ $g'(0) = 2\times 1 = 2$ et $g''(0) = 4\times 1 = 4$.

Le DL_2 de g en 0 est donc $g(x) = g(0) + g'(0)x + \dfrac{g''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$

$= 1 + 2x + \dfrac{4}{2}x^2 + o(x^2)$

$= 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)$

$h(x) = 27\, f(x) \times g(x) = 27\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9}x + \frac{4}{27}x^2 + o(x^2)\right)\left(1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)\right)$

$= \left(9 - 6x + 4x^2 + o(x^2)\right)\left(1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)\right)$

$$
\begin{aligned}
= 9 &+ 18x + 18x^2 \\
&- 6x - 12x^2 \\
&\qquad + 4x^2 + o(x^2)
\end{aligned}
$$

$= 9 + 12x + 10x^2 + o(x^2)$: DL_2 en 0 de h

3) Déterminer, en utilisant la question précédente, une valeur approchée de $\dfrac{27e^{-0,04}}{2,96}$.

$$\frac{27e^{-0,04}}{2,96} = h(-0,02) \qquad (2x-0,02=-0,04\ ;\ 3-0,04=2,96)$$

$$\frac{27e^{-0.04}}{2.96} \quad 8.763957722$$

avec la machine

$-0,02$ est proche de 0

Donc $h(-0,02) \simeq 9 + 12(-0,02) + 10(-0,02)^2$

$$\simeq 9 - 0,24 + 10 \times 0,0004$$

$$\simeq 8,76 + 0,004 \simeq 8,764$$

4) Que vaut la limite lorsque x tend vers 0 de $\dfrac{h(x)-9-12x}{4x^2}$?

5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{h(x)-9-12x}{4x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{9}+\cancel{12x}+10x^2+o(x^2)-\cancel{9}-\cancel{12x}}{4x^2}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{10x^2}{4x^2} + \frac{1}{4}\,\frac{o(x^2)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{5}{2} + \frac{1}{4}\,o(1) = \frac{5}{2} + \frac{1}{4}\times 0 = \frac{5}{2} + 0 = \frac{5}{2}.$$

$o(1) = 1 \times \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

5) On admet que le DL_3 en 0 de la fonction $h(x) = \dfrac{27e^{2x}}{3+2x}$ est égal à : $h(x) = 9 + 12x + 10x^2 + \dfrac{16}{3}x^3 + o(x^3)$.

a) Déterminer le DL_3 en 0 de la fonction $p(x) = 8 + 9x + 10x^2 + 7x^3 + 2x^4 - 9x^5$, puis le DL_3 en 0 de la fonction $d(x) = h(x) - p(x)$.

b) Proposer un tracé local de la fonction d au voisinage du point A(0 ; d(0)).

a - Le DL_3 en 0 de $p(x) = 8 + 9x + 10x^2 + 7x^3 + \underbrace{2x^4 - 9x^5}_{= o(x^3)}$

est $p(x) = 8 + 9x + 10x^2 + 7x^3 + o(x^3)$

Donc $d(x) = 9 + 12x + 10x^2 + \frac{16}{3}x^3 + o(x^3) - (8 + 9x + 10x^2 + 7x^3 + o(x^3))$

$= 9 + 12x + 10x^2 + \frac{16}{3}x^3 - 8 - 9x - 10x^2 - 7x^3 + o(x^3)$

$= 1 + 3x + 0x^2 + \left(\frac{16}{3} - \frac{21}{3}\right)x^3 + o(x^3)$

$= 1 + 3x - \frac{5}{3}x^3 + o(x^3)$

b - $d(0) = 1$: $(0 ; 1) \in \mathcal{C}_d$

tangente (T) à $\mathcal{C}_d$ en A : $y = 1 + 3x$; (T) passe par A et B(1 ; 4)

si $x = 1$, $y = 3+1$
$= 4$

$d(x) - (1+3x) = -\frac{5}{3}x^3 + o(x^3)$

si x est proche de 0, $d(x) - (1+3x) \simeq -\frac{5}{3}x^3$: < 0 si $x^3 > 0$ c.à.d $x > 0$

> 0 si $x^3 < 0$ c.à.d $x < 0$

Donc $\mathcal{C}_d$ est en dessous de (T) si $x > 0$

et $\mathcal{C}_d$ est au dessus de (T) si $x < 0$