École supérieure du professorat et de l'éducation
Académie d'Orléans-Tours

UNIVERSITE D'ORLEANS

Master MEEF M1, site de BLOIS

Octobre 2017, CM4 de Mathématiques

Patrick WIERUSZEWSKI

GEOMETRIE 1

Une « entrée » à coordonner avec les documents annexes déposés dans le cours de *PW*, sur la plate forme CELENE

Documents-supports et deux exercices

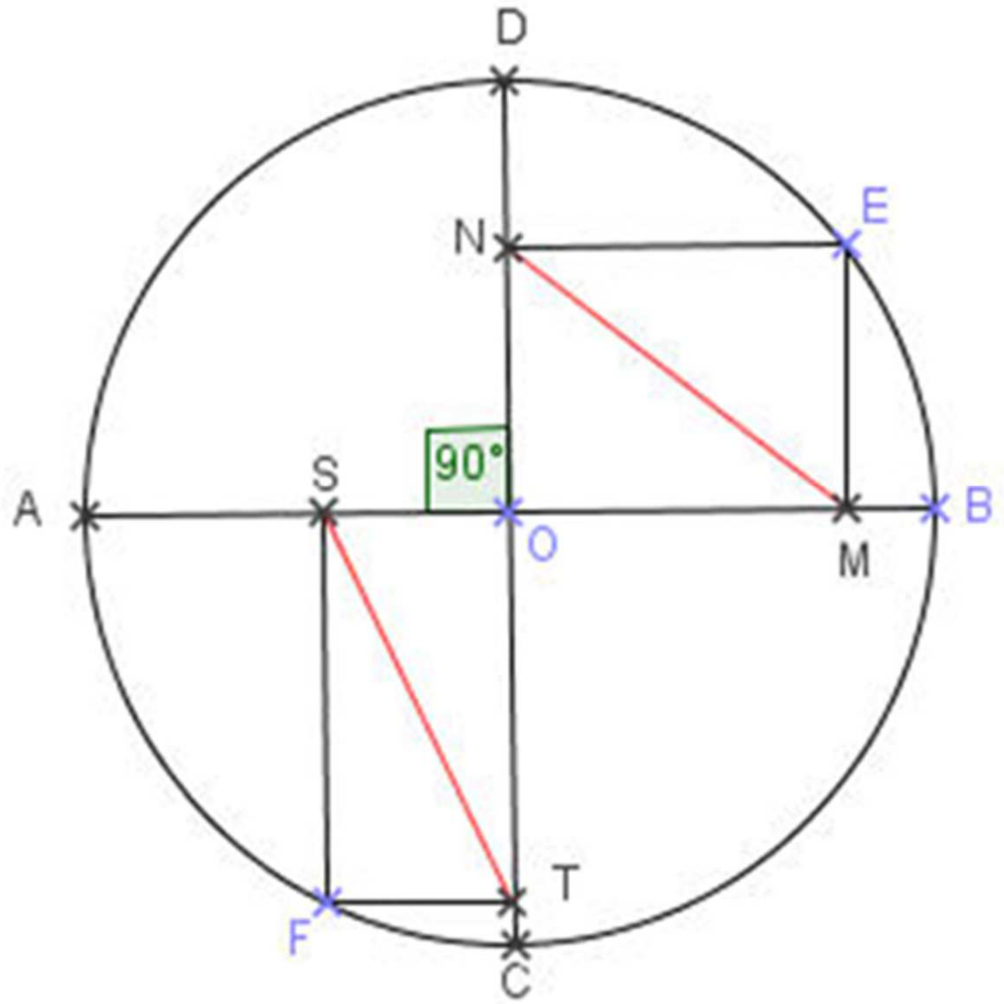
<u>Les fichiers à étudier impérativement et obligatoirement !</u>
<u>Il faut simplement apprendre ou réapprendre le cours</u>

- Le fichier : « M1_BASES_GEOMETRIE ». Ce fichier propose ce qu'on peut appeler un « *B. A. BA* » en Géométrie Plane : des « mots » à connaître et à savoir utiliser, des « constructions » fondamentales à connaître et à savoir réaliser et quelques « questions de cours » auxquelles il faut aussi savoir répondre.
- Le fichier : « PROPRIETES_GEOM_PLAN ». Il s'agit d'un fichier qui contient une liste organisée de 72 définitions et propriétés à (*ré*)apprendre et à connaître.
- Le fichier : « QUADRI_PROPRIETES ». Ce fichier propose de s'intéresser aux quadrilatères dans tous les « sens » et dans toutes les acceptions. *Prise de tête !!!*
  *Dernier fichier qui sera exploré et étudié en détails en **TD**.*

On poursuit. Une première réponse à la question : « Pourquoi ENSEIGNER la GEOMETRIE ? » (*Pas encore COMMENT !*)

Les segments **[AB]** et **[CD]** sont deux diamètres ⊥ du cercle de centre **O**. Le point **F** est un point du cercle et **FSOT** est un rectangle. Le point **E** est un point du cercle et **EMON** est aussi un rectangle.

Quelle est entre **MN** et **ST** la plus grande des deux longueurs ? *Why* ?



__Exercice 2__ : figures ci-dessous, consignes à la diapositive 5

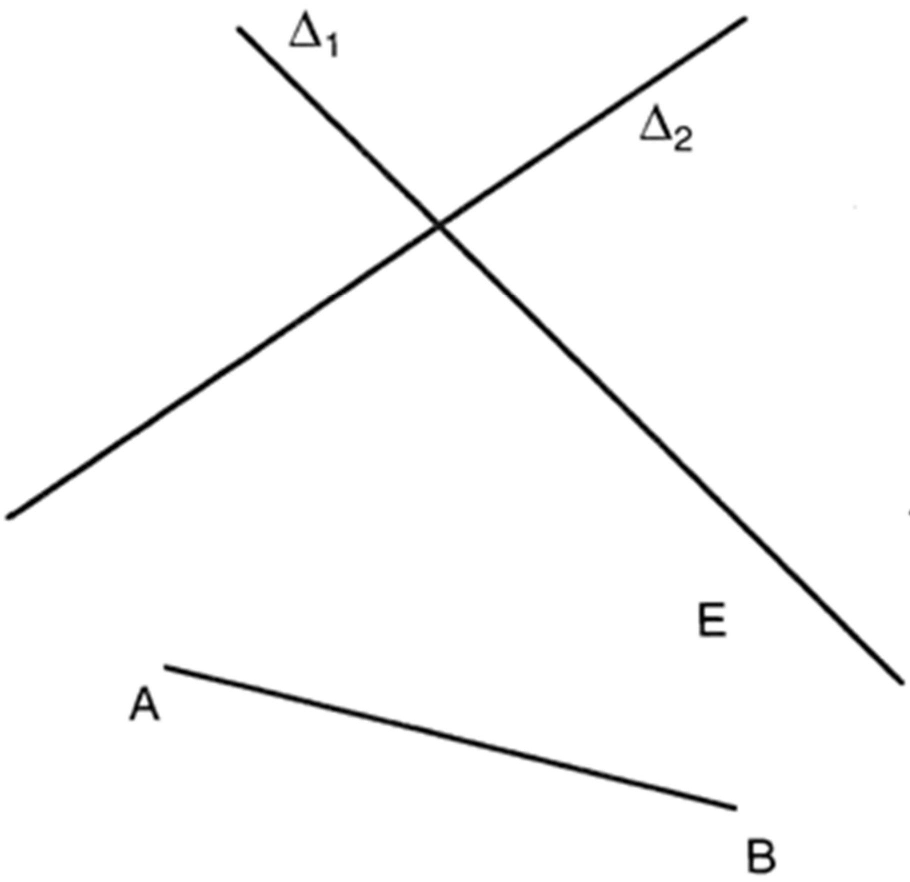


figure n° 1

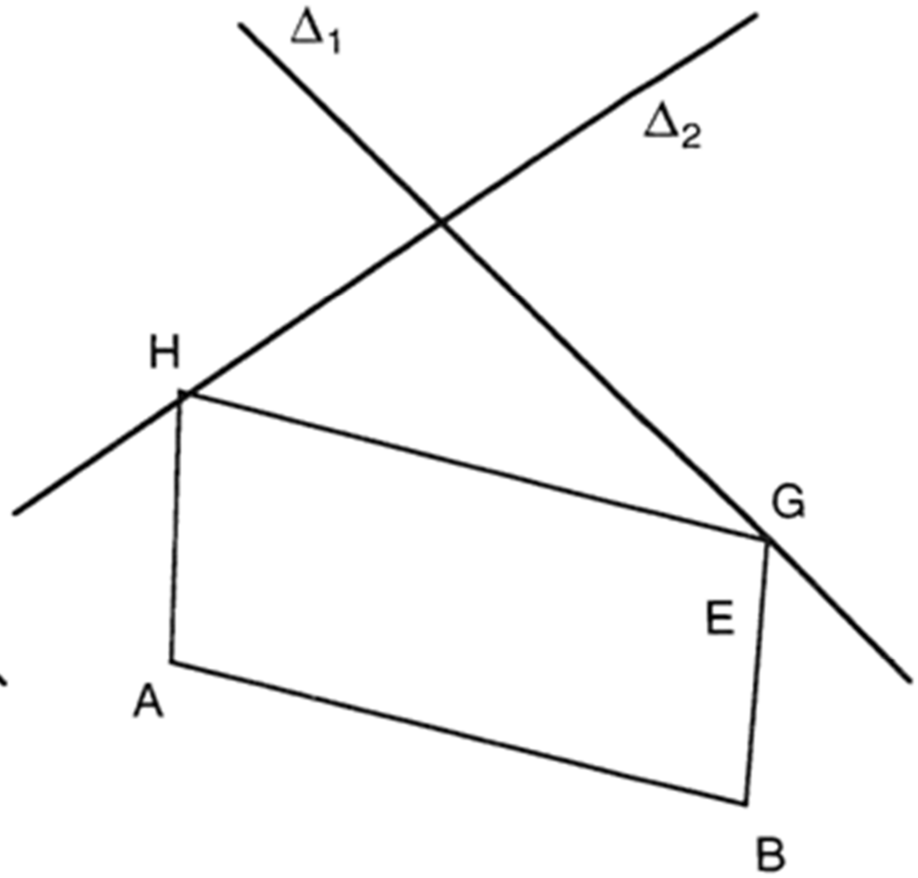


figure n° 2

Constructions à la règle et au compas, au sens d'Euclide

- Sur la figure n°1, tracer le rectangle **ABCD**, avec **C** sur la droite Δ**1**. Le point **D** se trouve-t-il « *obligatoirement* » sur Δ**2** ?
- Sur la figure n°2, le quadrilatère **ABGH** est un parallélogramme, avec **G** appartenant à Δ**1** et **H** appartenant à Δ**2**. Marquer les points **W** (sur Δ**1**) et **P** (sur Δ**2**) tels que le quadrilatère **GHWP** soit un parallélogramme. *Justifier.*
- Démontrer que le quadrilatère **ABPW** est un parallélogramme.

On s'arrête là pour le moment.

Non, il reste une petite place pour une petite « devinette » : « *Je suis un quadrilatère (convexe), mes diagonales sont égales. Qui suis-je ?* ».

Allons-y, dessinons quelques figures…

*Faire de la géométrie « classique » ou usuelle, <u>au niveau M1 du Master Meef-PE</u>, c'est « travailler » avec les objets habituels de la géométrie (euclidienne) <u>plane</u> (mais aussi dans <u>l'espace !</u>), c'est à dire les **points,** les **droites**, les **segments**, les **angles**, les **triangles**, les **cercles** et **disques**, les **quadrilatères**, les **polygones**, les **solides usuels**, les **transformations** (symétries, translation et rotation), les **lignes trigonométriques** dans un triangle rectangle, …, sans oublier quelques théorèmes « emblématiques » du programme de Mathématiques du Collège : la « **droite des milieux** », le théorème de **Pythagore**, le théorème de **Thalès**, sans oublier aussi (bis) les **grandeurs** usuelles au programme (longueurs, aires, volumes, angles, capacités, durées, …*

*<u>Note de **PW**</u>*. L'étude de certains objets marqués ci-dessus est repoussée au S2, en particulier : les solides, les transformations et la trigonométrie.

On doit à Euclide, et à tous ses disciples et « successeurs », jusqu'à Hilbert (*début du XXe siècle*), une approche dite axiomatique de la géométrie enseignée dans le cadre scolaire.

Euclide fonde la GEOMETRIE sur un petit nombre de « postulats » (« = axiomes ») dont il DEDUIT ou INFERE les autres propositions, propriétés et théorèmes (*malgré quelques imperfections et paradoxes : on ne peut pas lui en vouloir !*).

Il faut aussi que la GEOMETRIE présente un intérêt pratique indéniable ; en cela, elle doit refléter ou proposer une image de la REALITE. On parle ainsi de « modélisation du réel ».
Dans les manuels du début du siècle précédent, on pouvait lire :

- l'image d'un ***plan*** (*horizontal*) est fournie par la surface d'un étang « tranquille » (*sans tourbillons, ni ricochets !*).
- l'image d'une ***droite*** (*verticale*) est fournie par celle d'un fil à plomb.
- l'image d'un ***point*** est fournie par une pointe ou une tête d'aiguille.

Ainsi, pour définir de façon plus consistante la GEOMETRIE, il est nécessaire que les AXIOMES (*en nombre limité*) correspondent à des VERITES basées sur des évidences intuitives.

Une description rapide des axiomes de la GEOMETRIE (plane) enseignée dans la cadre scolaire. *Un remarque importante* : un changement d'axiomes, un affaiblissement ou un renforcement de certains d'entre eux, changent la « GEOMETRIE ». *Voilà une bonne piste à explorer…*

- Les axiomes d'incidence : ils décrivent les relations entre les *droites* et les *points*.
- Les axiomes d'ordre : ils ont pour fonction de donner un sens mathématique à la relation « entre ».
- Les axiomes de congruence ou d'égalité : si on s'intéresse aux *segments de droite*, on peut alors parler de longueur (*grandeur*).
- D'autres axiomes de congruence ou d'égalité : si on s'intéresse aux *angles*, on peut alors parler de perpendicularité et de mesures.
- Les axiomes de continuité : ils ont pour fonction de lier ***objet géométrique*** et ***NOMBRES*** (« clef » : *il y a une relation « bijective » entre chaque droite du plan avec la « droite » réelle*).

(*Cf. Daniel PERRIN : « Mathématiques d'Ecole », chez CASSINI*).

<u>*C'est parti*</u> : les axiomes essentiels de la GEOMETRIE plane et les premières PROPRIETES qui s'en déduisent.

On POSTULE l'existence d'un plan dit PLAN EUCLIDIEN. Ses éléments sont des POINTS et il contient des parties remarquables appelées DROITES, avec les trois <u>axiomes d'incidence</u> suivants :

A1. Par deux points distincts du plan, il ne passe qu'une et une seule droite.

A2. Toute droite contient *au moins* deux points.

A3. Il existe trois points non ALIGNES.

Que peut-on alors en DEDUIRE ?

- Deux droites distinctes ont au plus un point commun.
- Deux droites sans point commun sont dites PARALLELES.

<u>Autre axiome</u> : le postulat d'Euclide

Par un point **W**, non situé sur une droite (***d***), il ne passe qu'une et une seule parallèle à (***d***). (*Commentaires **PW***).

<u>Tâche ou exercice</u> : tracer, *en fonction des instruments autorisés*, la parallèle à (***d***) passant par **W**.

Les axiomes d'ordre.

O1. On se donne trois points distincts **P**, **S** et **G**. Si le point **S** est « entre » les points **P** et **G**, le point **S** est « entre » les points **G** et **P**.

O2. Etant donnés deux points distincts **L** et **J**, il existe un point **W** qui est « entre » **L** et **J**.

O3. Etant donnés trois points quelconques et distincts d'une droite, il y en a un qui est « entre » les deux autres.

O4 ou *axiome de Pasch*. Si une droite coupe un côté d'un triangle (*sans passer par un sommet*), alors elle coupe nécessairement *un* autre côté.

Ces axiomes permettent de définir la notion de SEGMENT de droite (*ensemble des points situés « entre » les extrémités*) et la notion de DEMI-DROITE . *Illustrations pendant le* ***CM***.

On postule ensuite que chaque DROITE partage le plan en deux parties appelées DEMI-PLANS. On peut définir ensuite la notion de CONVEXITE. On peut enfin s'intéresser au TRIANGLE : c'est la donnée de trois points non ALIGNES.

Le décor est presque planté : on va pouvoir s'intéresser à la MESURE (avec les axiomes de congruence).

On postule qu'il existe une mesure des longueurs, une mesure des angles, en fait, une mesure de grandeurs « sympathiques ». Le nombre (*réel*) rentre dans le « jeu » de la GEOMETRIE.

Les notions abordées sont :

- Abscisse d'un point sur une droite (***d***) (*régulièrement*) graduée. (*Choix d'une origine, d'un segment unité et association de chaque point de (**d**) à un nombre de la droite réelle*).
- Milieu d'un segment : c'est l'unique point de ce segment situé à égale distance des extrémités.
- Cercle (***C***) de centre **W** et de rayon ***x*** : c'est l'ensemble des points **M** du plan tel que **MW** = ***x***.

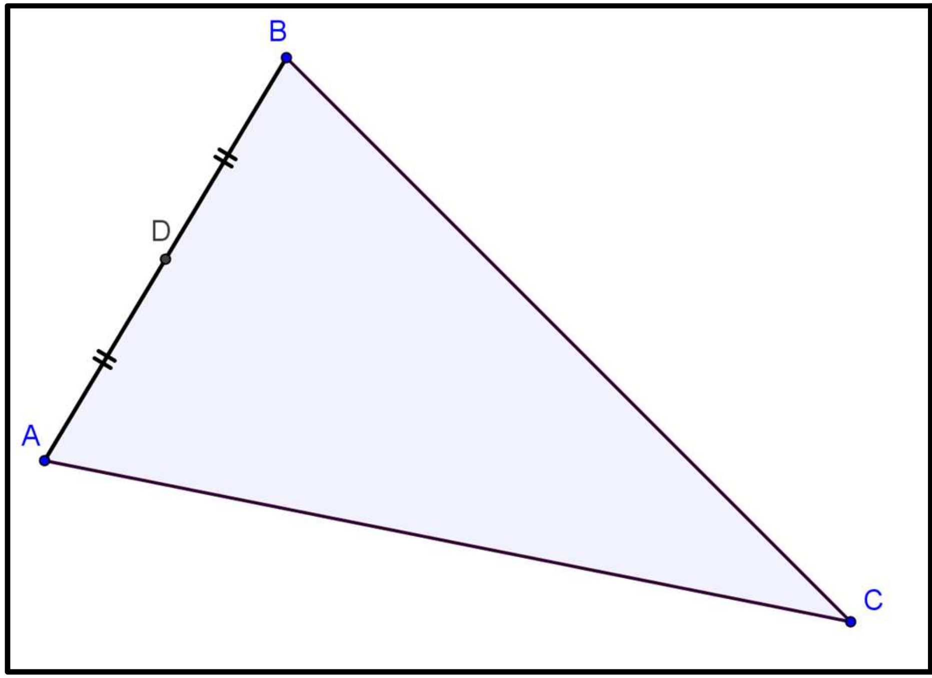
On admet que ce cercle a une longueur, qu'on peut définir rigoureusement (*borne supérieure des lignes polygonales inscrites dans le cercle*), on peut alors mesurer la longueur d'arcs de cercle, ce qui va alors nous permettre de mesurer des angles.

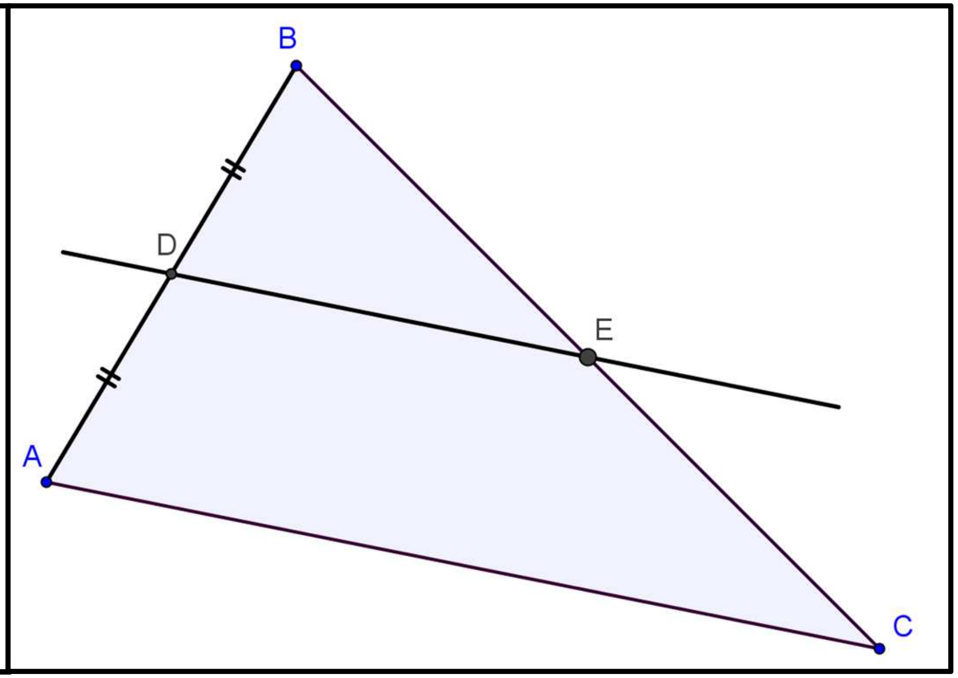
Les trois THEOREMES « emblématiques »

MILIEUX et PARALLELES (*Le premier des trois théorèmes*)

➢ On se donne un triangle (*scalène*) **ABC**. Le point **D** est le milieu du côté **[AB]**. On mène par **D** la parallèle à **(AC)** passant par **D**. On appelle **E** le point d'intersection de cette parallèle avec le côté **[BC]**.

<u>*Question*</u> : que peut-on dire du point **E** ?





<u>ENONCE(S) du THEOREME</u> (voir le fichier « PROPRIETES_GEOM_PLAN » : plusieurs formulations).

- La droite passant par le milieu d'un côté d'un triangle et parallèle à un autre côté coupe le troisième côté en son milieu.
- *SI* (une droite passe par le milieu d'un côté en étant parallèle à un autre côté) *ALORS* (cette droite passe par le milieu du troisième côté).
- …

<u>DEMONSTRATION</u> : pendant le ***CM*** ? <u>Indications</u> :

1.Tracer la parallèle à **[AB]** passant par **E**, noter **F** le point d'intersection de cette parallèle avec **[AC]**. Préciser alors la nature du quadrilatère **DEFA**.

2. En déduire les égalités : **DA** = **EF**, puis **DB** = **EF**.

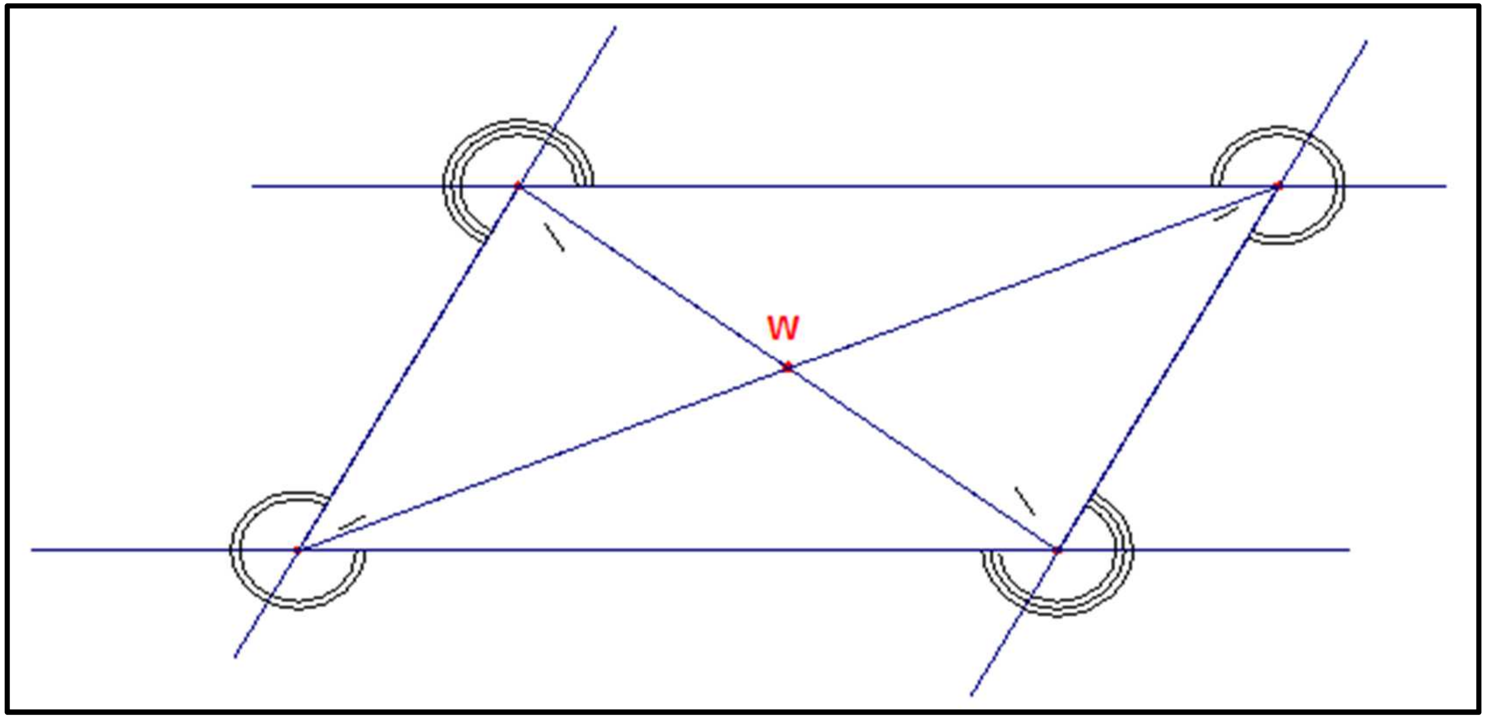
3. Tracer **[DF]**. Préciser alors la nature du quadrilatère **BEFD**.

4. Préciser la nature du quadrilatère **DECF**. Conclure.

Cette (*belle et élégante*) démonstration repose sur les propriétés du PARALLELOGRAMME.

Bonne occasion de refaire le point, avant de s'occuper des autres théorèmes !

Le PARALLELOGRAMME
quelle(s) définition(s) pour quelles propriétés ?



La figure de la diapositive précédente est un parallélogramme. Les principales propriétés, sans hiérarchie, de ce quadrilatère particulier sont :

- ***Les côtés opposés sont parallèles.***
- ***Les côtés opposés ont la même longueur.***
- ***Les diagonales se coupent en leur milieu W.***
- ***Le point W est le centre de symétrie du parallélogramme.***

(Remarque : *les propriétés relatives aux angles ne sont pas prises en compte dans cette caractérisation*).

En fait, chacune de ces propriétés est « ***caractéristique*** », ce qui signifie que chacune d'entre elles peut être prise comme définition, les autres sont alors des propriétés résultant de cette définition. ***Ce qui ne présage en rien de la facilité ou de la difficulté de démontrer effectivement ces propriétés à partir de la définition choisie !***

OPTION n°(1)

DEFINITION 1 : un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.

PROPRIETES : *à démontrer à partir de la définition choisie*

Côtés opposés de même longueur.

Diagonales de même milieu.

Angles opposés égaux et angles consécutifs supplémentaires.

W centre de symétrie.

OPTION n°(2)

DEFINITION 2 : un parallélogramme est un quadrilatère convexe dont les côtés opposés ont la même longueur.

PROPRIETES : *à démontrer à partir de la définition choisie*

Côtés opposés parallèles.

Diagonales de même milieu.

Angles opposés égaux et angles consécutifs supplémentaires.

W centre de symétrie.

OPTION n°(3)

DEFINITION 3 : un parallélogramme est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu.

PROPRIETES : *à démontrer à partir de la définition choisie*

Côtés opposés parallèles.

Côtés opposés de même longueur.

Angles opposés égaux et angles consécutifs supplémentaires.

W centre de symétrie.

OPTION n°(4)

DEFINITION 4 : un parallélogramme est un quadrilatère qui possède un centre de symétrie (le point **W**).

PROPRIETES : à démontrer à partir de la définition choisie

Côtés opposés parallèles.

Côtés opposés de même longueur.

Angles opposés égaux et angles consécutifs supplémentaires.

Diagonales de même milieu.

Le THEOREME de THALES ou « l'invasion » de la PROPORTIONNALITE en GEOMETRIE

Il est connu de tous les collégiens, mais on sait que c'est EUCLIDE qui en a rédigé une démonstration dans son « ouvrage » : « *Les Eléments* ». (*Dans d'autres pays, le théorème de THALES n'est pas celui qui est enseigné au collège en France !*).

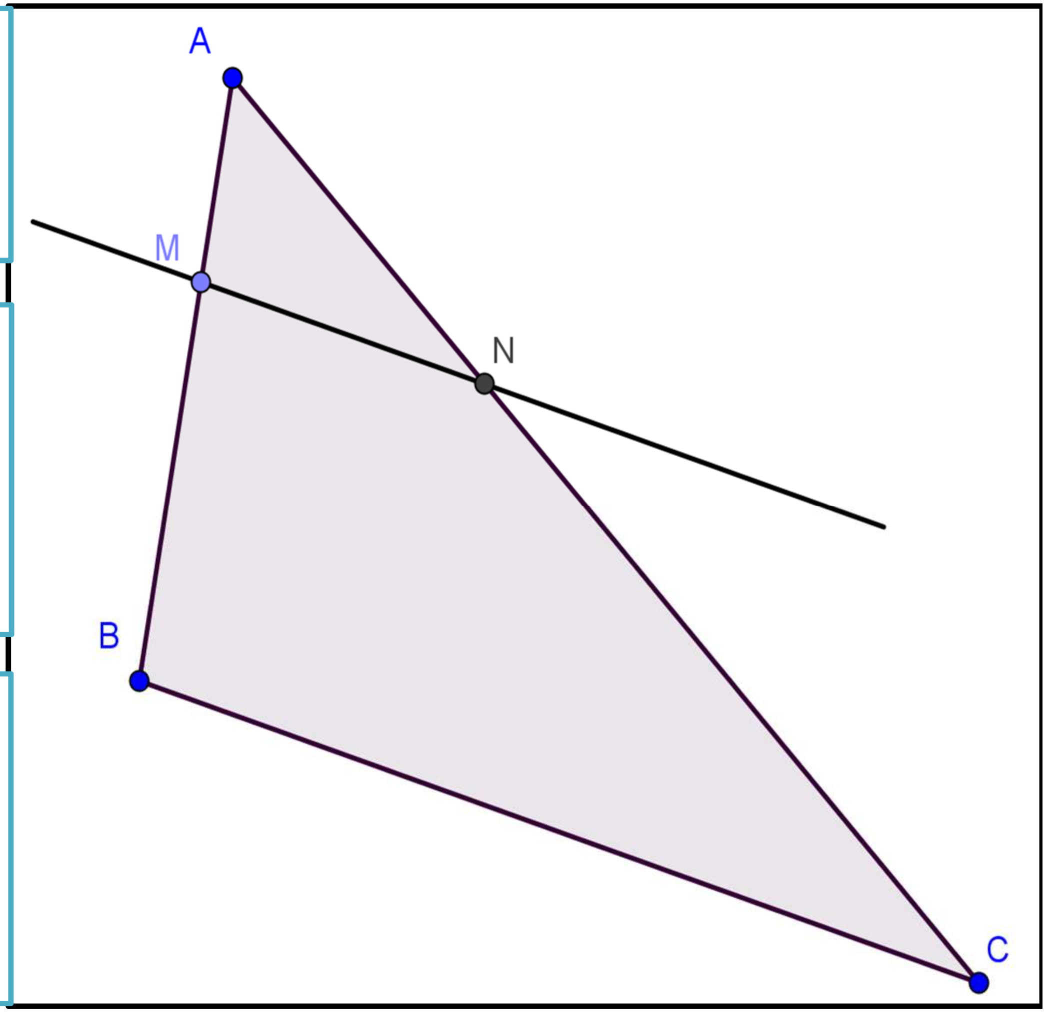
Pour résumer, on peut dire que l'énoncé direct de ce théorème, tel qu'il était enseigné au collège, « modélise » *la proportionnalité en géométrie* : en effet, sous des conditions de parallélisme, on obtient des égalités de quotients, ce qui nous permet alors de calculer des longueurs. Trop fort ! Il permet aussi de partager un segment en segments de même longueur, sans règle graduée ! (La « réciproque » ne se manie pas aussi aisément !).

ENONCE. Dans le triangle **ABC**, on a **M** un point de **(AB)**, **N** un point de **(AC)**.

SI (les droites **(MN)** et **(BC)** sont parallèles) *ALORS* (les rapports **AM/AB**, **AN/AC** et **MN/BC** sont égaux).

Autrement dit : on a (*ci-dessous*) un tableau de PROPORTIONNALITE.

(*Théorème admis*)



AM	**AN**	**MN**
AB	**AC**	**BC**

Un petit tour du côté de la « RECIPROQUE ». Cet énoncé va permettre d'établir que deux droites sont parallèles.

Figure à construire : (**ABC**) est un triangle (*scalène*), les points **M** et **N** appartiennent respectivement aux supports des côtés **[AB]** et **[AC]**.

SI (**M** $\in$ [**AB**) et **N** $\in$ [**AC**) et **AM/AB** = **AN/AC**) *ALORS* ((**MN**) // (**BC**)). (*Théorème admis*).

Tâche. Montrer qu'on ne peut pas affaiblir les hypothèses d'alignement des points. On peut avoir des rapports égaux, sans parallélisme !
(*Proposer un contre exemple*).

C'est parti pour des exercices : se reporter aux ***TD***.

On passe maintenant au théorème de PYTHAGORE. Ce théorème, dont on possède un nombre important de démonstrations (*qui n'en sont pas rigoureusement ! Il faut attendre la notion de produit scalaire au lycée*), est aussi connu de tous les **collégiens** à partir de la classe de quatrième !

Pour résumer, on peut dire que ce résultat emblématique « lie » ***perpendicularité*** et ***distance***. En effet, sous des conditions de perpendicularité de deux côtés d'un triangle, on obtient une égalité numérique du second degré qui permet de calculer des longueurs et réciproquement.

Formulation sous la forme d'une propriété caractéristique du triangle rectangle (*théorème admis*).

Soit **ABC** un triangle.

(**ABC**) est un triangle rectangle en **A** si, et seulement si, on a l'égalité : $\mathbf{AB^2 + AC^2 = BC^2}$.

C'est parti pour des exercices : se reporter aux ***TD***.

NOUVEAUTE 2016 au cycle IV :
« ***Triangles EGAUX*** » et « ***Triangles SEMBLABLES*** ».
Aïe, ça pique ! Euclide et Hilbert et aujourd'hui…

On commence par le début ! THEOREME fondamental :
« la somme des angles d'un triangle est égale à 180° ».

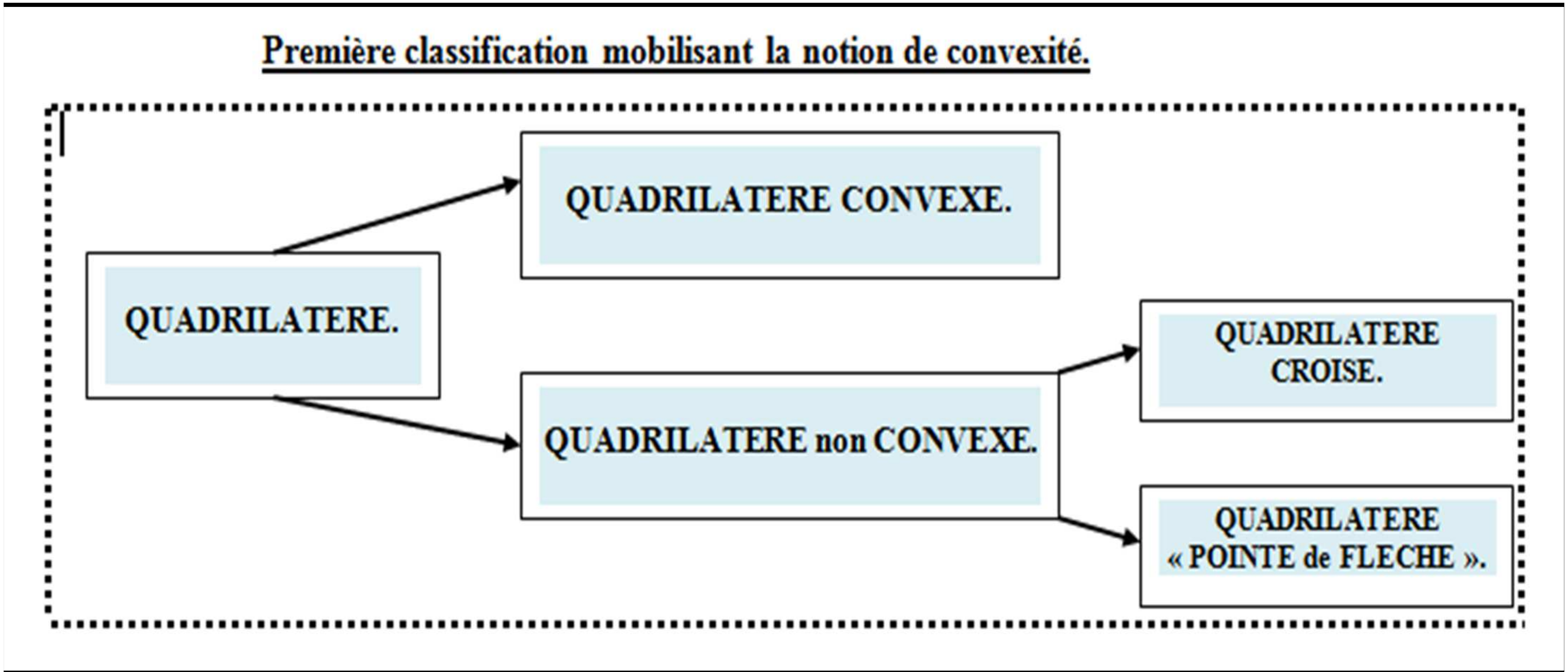
Explication, preuve ou démonstration ? *Pendant le* ***CM***.

Définitions minimales :

- « Deux triangles sont égaux si leurs côtés sont deux à deux de même longueur ». Pour quelles ***propriétés*** ?
- « Deux triangles sont semblables si leurs angles sont deux à deux de même mesure ». Pour quelles ***propriétés*** ?

Vocabulaire associé : triangles superposables, triangles isométriques ; conditions nécessaires et suffisantes pour être un « tel » triangle ; proportionnalité : agrandissement et réduction…

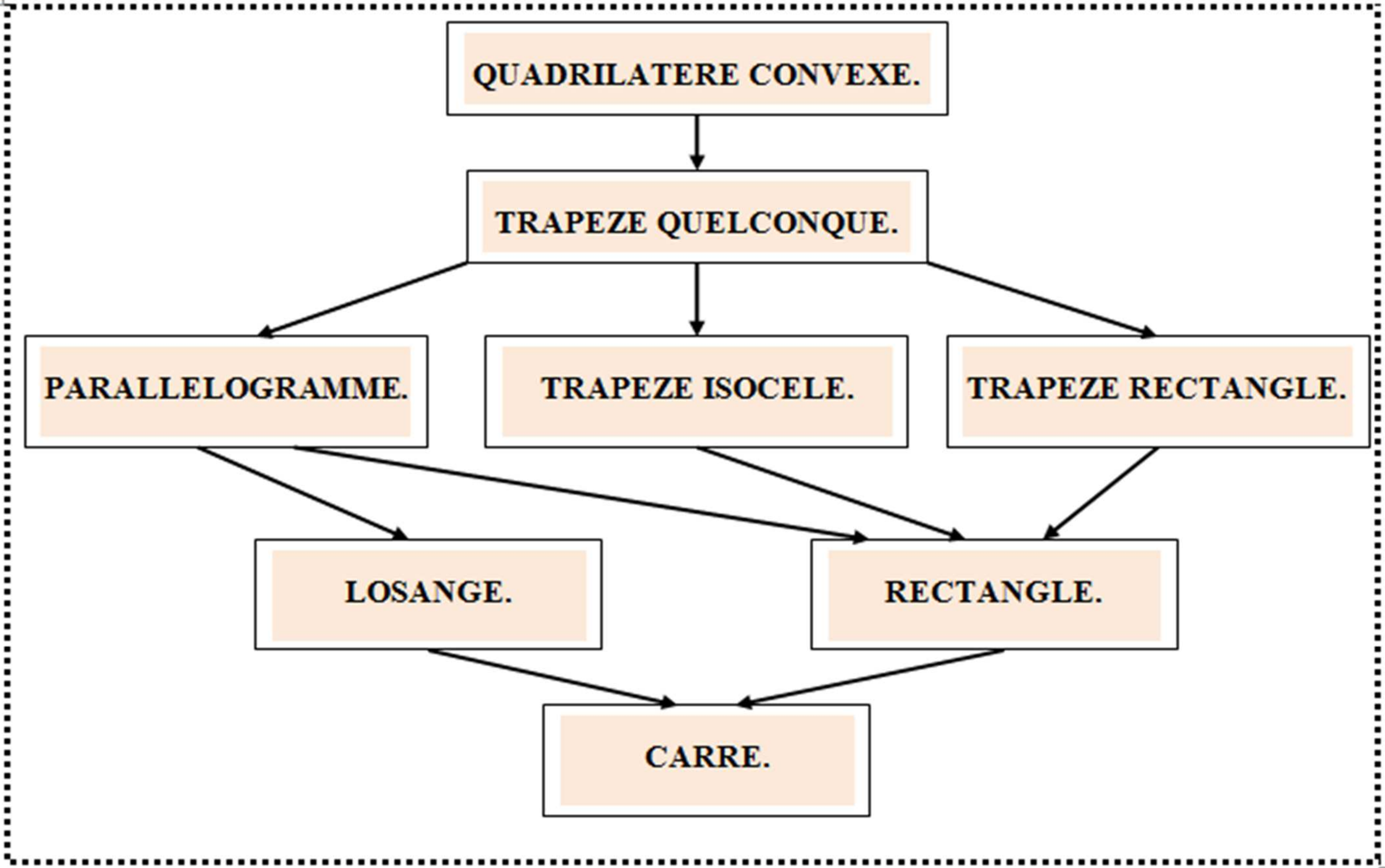
Un petit tour du côté des QUADRILATERES



Deuxième classification. Le **trapèze isocèle** est défini comme suit dans la diapositive ci-dessous : *un trapèze isocèle est un trapèze dont les diagonales ont la même longueur*.

On peut donner d'autres définitions de ce quadrilatère particulier, mais elles ne sont pas nécessairement équivalentes.

Deuxième classification : « du général au particulier ».



DIDACTIQUE : comme quoi, c'est quand même difficile d'enseigner la GEOMETRIE au primaire… Et pas qu'au primaire.

PW invite tout le monde à aller regarder ce qui se fait ailleurs, pourquoi, comment, …

La PROBLEMATIQUE du jour : repérer, énoncer, « discuter » et comprendre quelques « difficultés » non anodines, mais « banales » dans « l'enseignement-apprentissage » de la GEOMETRIE au primaire.
De fait, les « problèmes » sont essentiellement sur le double territoire des PE et des Mathématiques.

Du côté des OBSTACLES , on peut les classer en deux parties : les « *FAUX* » obstacles et les « *VRAIS* » obstacles (*JF GRELIER*). Quelques mots, vite fait !

Du côté de quelques « FAUX » obstacles.

➢ <u>Ce qui relève de la tradition grecque</u>. Le savoir géométrique est ontogénique = il est constitutif de l'homme, et donc, en particulier, il n'est pas à construire. <u>*Conséquence*</u> : une pratique d'une pédagogie dite de l' OSTENSION : quelques « bonnes » définitions, une « bonne » organisation du savoir, en général, du « simple » au « compliqué » suffiraient ! *Et hop, une belle leçon de « choses » en Mathématiques.*

➢ <u>*Corollaire 1*</u> : il y a « danger » que les expériences sur les objets géométriques (ou leurs représentations) basculent et glissent vers des discours sur ces mêmes objets. De fait, « faire de la GEOMETRIE », c'est savoir DEMONTRER… <u>*Exemple…*</u>

➢ <u>*Corollaire 2*</u> : la tradition cartésienne, caractérisée par la prégnance de la <u>méthode déductive</u> : on va du « *simple* » au « *compliqué* » et on avance « step by step ». *Du « point » à la « droite », Ô rage, Ô désespoir…*

➢ <u>*Corollaire 3*</u> : l'histoire récente des « Mathématiques Modernes ». L'algèbre linéaire investit le territoire de la GEOMETRIE. *Bon, voilà !*

➢ <u>*Corollaire 4*</u> : le rapport aux instruments de construction géométrique. Les figures géométriques se construisent à la règle (*non graduée*) et au compas. Quid des instruments moins « nobles » ?

Du côté des «VRAIS » obstacles.

- Préoccupation centrale de tout professeur, PE ou PLC, de ne pas « opposer » démarche déductive et démarche inductive.
- *La représentation de l'espace* : on « fait » de la GEOMETRIE sur des objets géométriques que parfois on ne sait pas dessiner ou pas représenter. Les trois espaces (micro, méso, macro)…
- *Le langage spécifique de la GEOMETRIE* : c'est un langage sur la spatialité. Au primaire, les relations spatiales étudiées portent sur le REPERAGE et le POSITIONNEMENT, l'ORIENTATION, la DIRECTION (dont la PERPENDICULARITE et le PARALLELISME) et la notion de TRANSFORMATION (essentiellement la « SYMETRIE-PLIAGE »).
- *Corollaire* : apprendre de la GEOMETRIE consiste ainsi à structurer des connaissances sur les formes, et à structurer des connaissances sur les relations spatiales qu'ont les formes entre elles. Du coup, par quoi est-il pédagogiquement raisonnable de commencer ? Vaste question !
- Rôle(s) et place(s) des supports d'expériences graphiques, puis géométriques. Variables de situations et variables didactiques…

A partir de là, l'affaire se complique : c'est le problème du professeur ! *Komment céti don ki faut-y faire* ? On y vient ! Mais avant, on jette un oeil sur les programmes. Et oui !

1) Manuel de CM (1 et 2) édité par Magnard. *Prog. 2008.*

Que penser des énoncés ci-dessous, et surtout que peut-on en faire, c'est-à-dire, quels types de problèmes sont résolvables avec ces énoncés ? *Question sensible et cruciale !*

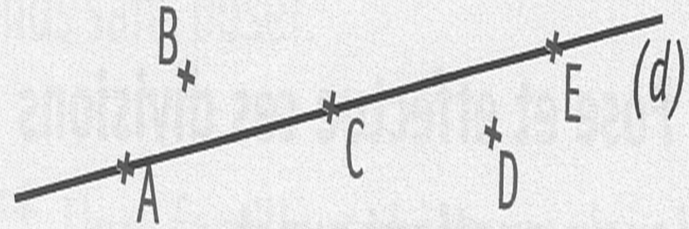
La géométrie exige **rigueur et précision dans le vocabulaire utilisé.**

Bon, yes, it's OK !

Une **droite** est formée par un nombre infini de points alignés : on ne peut donc pas mesurer une droite.

On représente un point par une croix.

On le nomme au moyen d'une lettre majuscule d'imprimerie.



Les points A, C et E sont alignés. Ils appartiennent à la droite (d).

2) Manuel de CM édité par Retz. Même consigne que la diapositive précédente. *Prog. 2002 et suivant* !

Je découvre

1 En géométrie, la droite passant par les points A et B se note (AB).
Elle comprend le point A, le point B et tous les points alignés avec A et B.

- *Peux-tu imaginer un point de (AB) situé sur l'autre page du livre ? Montre-le approximativement.*
- *Peux-tu imaginer un point de (AB) situé plus loin dans ta salle de classe ? … plus loin, au-delà de ton école ? … au-delà de la Terre ?*

J'ai appris (AB) comprend : 1°) le point A et le point B,

2°) tous les points à l'intérieur de [AB],

3°) tous les points alignés avec A et B
et situés à l'extérieur de [AB].

La longueur d'une droite est infinie.

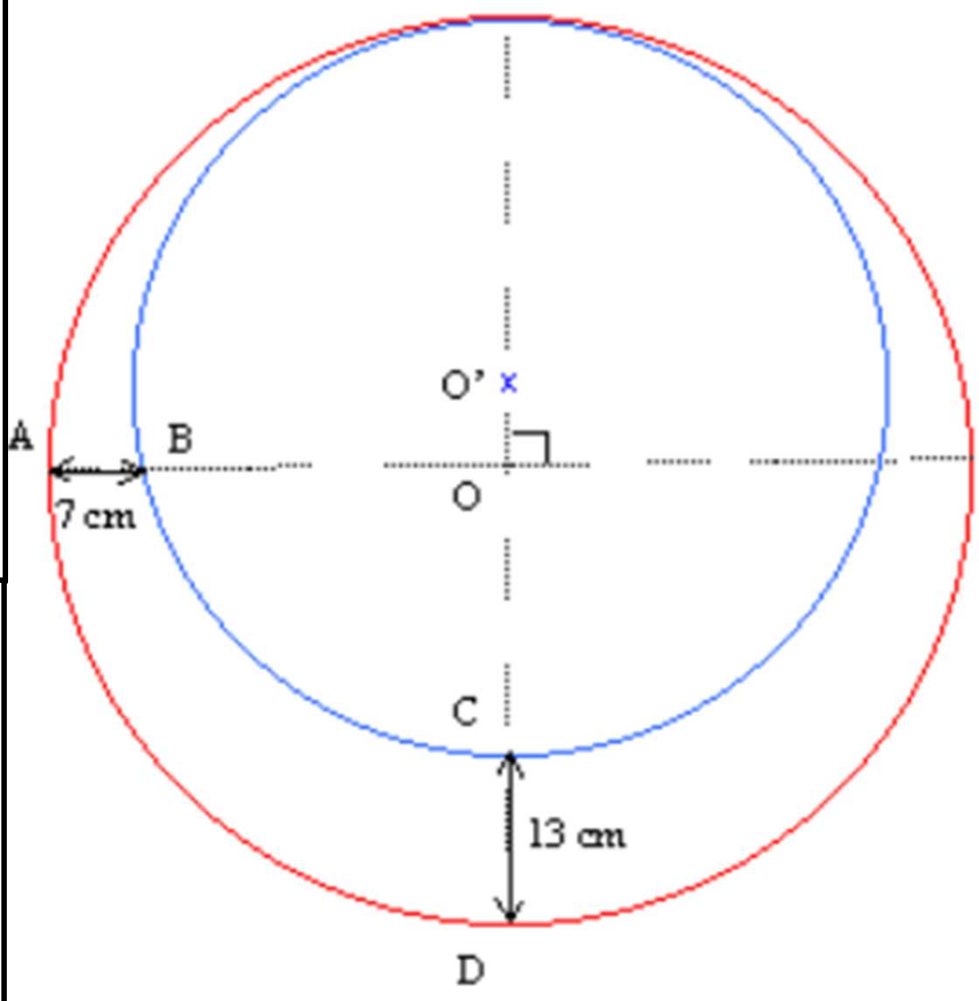
En géométrie, pour nous aider à imaginer la droite passant par A et B,
on trace toujours un trait plus long que celui qui relie les points A et B.
Mais ce trait est forcément beaucoup moins long que (AB) !

Bon, céti ki n'en n'a du taf !
Ah oui, ne pas oublier de consulter les documents annexes…

Une dernière friandise (*Rallye Mathématique du Centre)*

Le « *petit* » cercle (bleu) a pour centre le point **O'** et pour rayon ***r***. Le « *grand* » cercle (rouge) a pour centre le point **O** et pour rayon ***R***.

<u>*Indication*</u>. Montrer que **OO'** = 6,5cm. Appliquer le théorème de Pythagore au triangle **OO'B**, rectangle en **O**. *Calculs.* On a : ***r*** = 42,5cm et ***R*** = 49cm.



Déterminer les rayons de ces deux cercles tangents de centres O et O'.