École supérieure
du professorat
et de l'éducation
Académie d'Orléans-Tours

UNIVERSITE D'ORLEANS

Master Meef M1

Novembre 2017, (*dernier*) CM de MATHEMATIQUES

Patrick WIERUSZEWSKI

NUMERATION : calculs dans une base de numération quelconque. Eléments de TRIGONOMETRIE dans le triangle rectangle. GEOMETRIE dans l'ESPACE : définitions et règles usuelles, représentation en Perspective Cavalière.

(1) NUMERATION : systèmes de numération autres que dix

Se reporter à deux documents, déposés sur CELENE :

- aux **CM**(s) de Sept. 2011, Sept. 2013 et Sept. 2017 ;
- au fichier **EGYPTCHINEBABYMAYA**, consacré aux « numérations antiques »,

EXERCICE 1

i. Une collection de bouchons est organisée en paquets de cinq. Il y a 26 paquets de cinq bouchons et 3 bouchons restants. Expliquer alors comment on peut écrire le nombre d'éléments de cette collection en base cinq.

ii. Donner l'organisation de cette collection si on avait regroupé cette même collection de bouchons par paquets de dix. Donner alors les deux écritures, en base dix et en base cinq, exprimant le cardinal de cette collection

iii. Une autre collection d'objets s'écrit : $(3201)_{cinq}$, en base cinq. Donner le cardinal de cette collection en base dix.

iv. Une autre autre collection d'objets d'écrit : $(\boldsymbol{a}0\boldsymbol{c})_{cinq}$, en base cinq, avec $\boldsymbol{a} \neq 0$. Quelles sont les valeurs possibles du cardinal de cette collection en base dix ?

PISTES de CORRECTION, à étudier et à retravailler…

i. <u>Un principe général</u>. Pour DENOMBRER en base cinq (*idem dans une base autre !*) :

On effectue des paquets ou des groupements par cinq = on effectue des groupements de première <u>espèce</u> ;

Puis, on effectue des groupements par vingt-cinq (= cinq × cinq) = on effectue des groupements de deuxième <u>espèce</u> ;

Puis on effectue des groupements par cent vingt-cinq (= vingt-cinq × cinq = cinq × cinq × cinq) = on effectue des groupements de troisième <u>espèce</u>, *and so on*, jusqu'à épuisement de la collection.

Les groupements se font donc suivant les puissances successives de cinq : $5^0 = 1$, $5^1 = 5$, $5^2 = 25$, $5^3 = 125$, …

On écrit alors la suite d'égalités : $26 \times 5 + 3 = 25 \times 5 + 1 \times 5 + 3 = 1 \times 125 + 0 \times 25 + 1 \times 5 + 3 = 1 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 1 \times 5^1 + 3 \times 5^0$.

Le nombre de bouchons ou le cardinal de cette collection s'écrit alors : (1013)cinq dans la base *cinq*.

Les chiffres de la base cinq sont donc les cinq chiffres suivants : 0, 1, 2, 3 et 4. Le chiffre « 5 » n'existe pas dans cette base, car dès qu'il y a plus de quatre unités ou paquets d'une certaine espèce, on « monte » alors d'une espèce, on « passe » à l'espèce suivante : c'est l'aspect positionnel su système.

ii. <u>Organisation en paquets de dix</u> : $26 \times$ cinq $+ 3 = 13 \times$ dix $+ 3 = 1 \times 100 + 3 \times 10 + 3 = 133$. C'est l'écriture « usuelle » en base dix.

<u>Notation</u> : $133 = (133)_{dix} = (1013)_{cinq}$

iii. <u>Problème de changement de bases</u> : (3201)cinq = (.?.)dix

Une technique classique mobilisant la propriété fondamentale d'existence et d'unicité de la décomposition canonique d'un nombre dans le système de numération donné.

On a : $(3201)_{cinq} = 3 \times 5^3 + 2 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 1 \times 5^0 = 375 + 50 + 1 = 426$. On écrit : $(3201)_{cinq} = 426$.

Application. Convertir en base dix les nombres suivants :

- A = $(3456)_{huit}$ = $(.?.)_{dix}$
- B = $(1202101020)_{trois}$ = $(.?.)_{dix}$
- C = $((11)7(21)5(13))_{soixante}$ = $(.?.)_{dix}$
- D = $(98065)_{treize}$ = $(.?.)_{dix}$

iv. On pose : N = $(\boldsymbol{a}0\boldsymbol{c})_{cinq}$. Le « chiffre » $\boldsymbol{a}$ peut donc prendre les valeurs 1, 2, 3 ou 4. Le « chiffre » $\boldsymbol{c}$ peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3 ou 4. Tiens, on rencontre de plus un problème de dénombrement, cool, on va faire un arbre !

Une piste de solution, au lecteur curieux de poursuivre le travail.

Si $\boldsymbol{a} = 1$, alors $N = 1 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + \boldsymbol{c} \times 5^0 = 25 + \boldsymbol{c}$. D'où les solutions : N = 25 ($\boldsymbol{c}$ = 0), N = 26 ($\boldsymbol{c}$ = 1), N = 27 ($\boldsymbol{c}$ = 2), N = 28 ($\boldsymbol{c}$ = 3) et N = 29 ($\boldsymbol{c}$ = 4). *A terminer…*

v. <u>Problème réciproque</u> : convertir un nombre en base *dix* dans une base *autre*. *Etude d'exemples*.

421 = (.?.)*sept* ; 906523 = (.?.)*quatorze* ; 2011 = (.?.)*deux* et 7402 = (.?.)*dix-sept*.

<u>Exemple détaillé</u> : 421 = (.?.)*sept*

On est dans la base sept : on « fait » donc des paquets de UN, des paquets de SEPT, des paquets de (SEPT × SEPT), des paquets de (SEPT × SEPT × SEPT), and so on folks, …

Un principe facilitateur, on cherche la « plus grande » espèce, et après on « descend ».

Or : $7^3 < 421 < 7^4$. La lecture de cette double inégalité nous renseigne sur le fait qu'on ne peut pas faire des paquets de quatrième espèce. D'où $421 = 1 \times 7^3 + 78 = 1 \times 7^3 + 1 \times 7^2 + 29 = 1 \times 7^3 + 1 \times 7^2 + 4 \times 7^1 + 1 =$ (1141)*sept*.

Recours au tableau de numération : fait pendant le ***CM***.

C'est la technique précédente qui autorise et légitime une technique plus usuelle et connue : « la suite des divisions euclidiennes par sept ».

421	**7**		
Reste = 1	**60**	**7**	
	Reste : 4	**8**	**7**
		Reste : 1	**1**

<u>Sens de lecture</u> : dans le sens de la flèche, à partir du dernier <u>quotient</u> <u>NON nul</u>, on liste la suite des restes en « remontant ».

D'où la conversion :

421 = (1141)*sept*

*STOP pour cette partie. Se reporter aux **TD** pour des exercices adaptés.*

(2) Un petit tour du côté de la TRIGONOMETRIE

Exercices supports : le problème de la JAUGE et le problème du NOMBRE d'OR de la fiche d'exercices donnée en ***TD***.

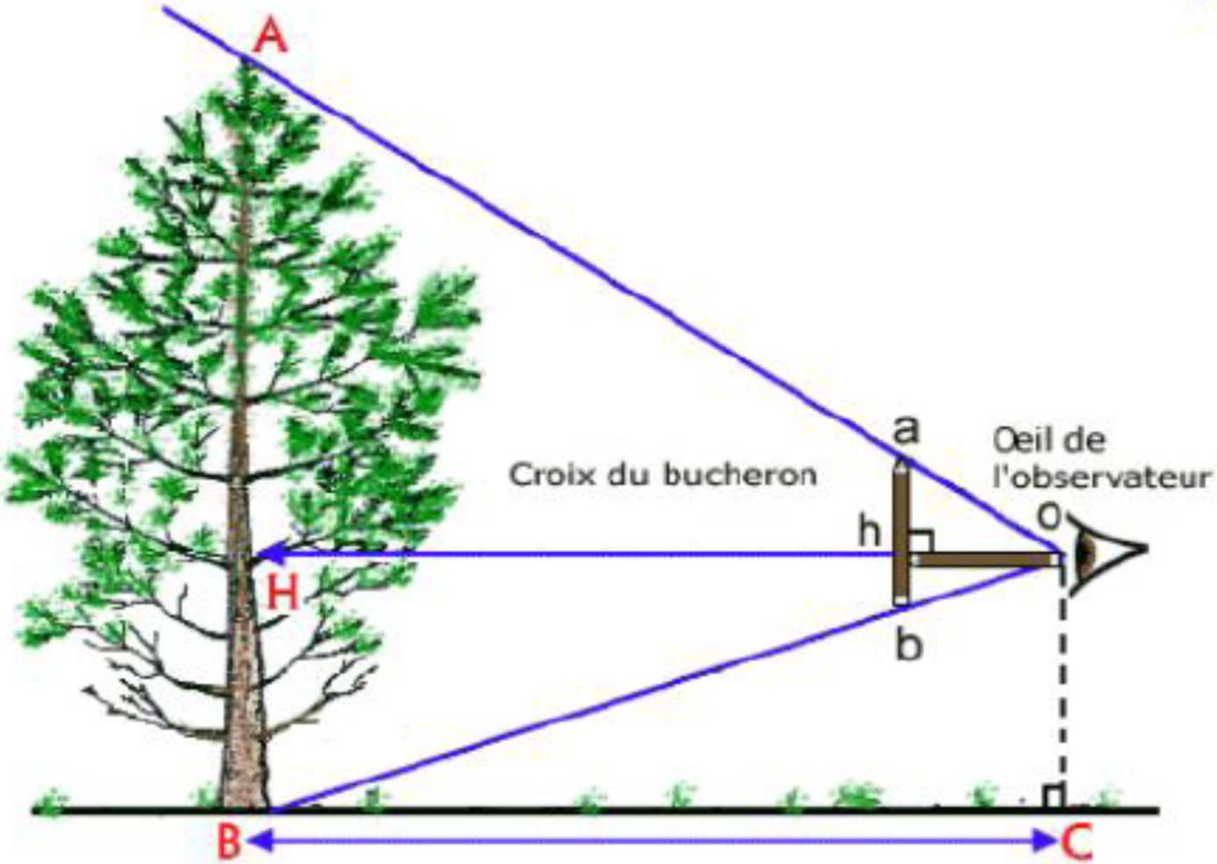
Le problème et la clef ! : calculer des angles connaissant des longueurs et calculer des longueurs connaissant des angles, sans pouvoir nécessairement MESURER « physiquement » ces grandeurs.

Historiquement, ce sont les astronomes babyloniens qui ont posé le problème : *comment déterminer des distances entre les planètes et les astres ?* L'idée : *créer un « instrument » physique qui donne des informations relatives aux angles, permettant alors de passer des angles aux longueurs et inversement*. Pour ce faire, les premières tables reliant les angles au centre et les cordes ont été produites. C'est de cette époque que date la « division » du cercle en 360°. (Schéma en ***CM***).

La croix de bucheron :

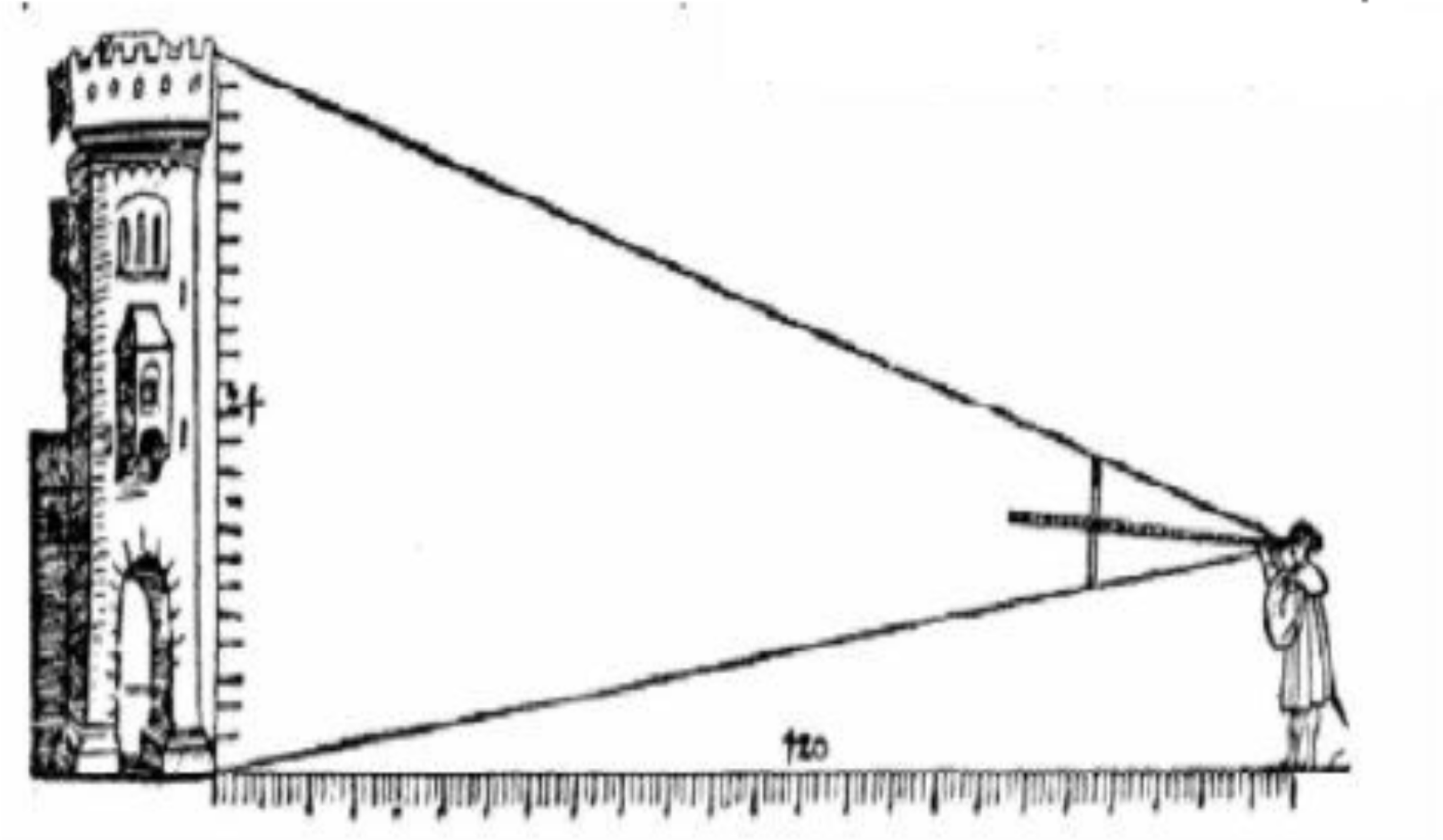
Pour mesurer la hauteur d'un arbre, un technicien forestier utilise la méthode ancestrale appelée « croix du bûcheron ». Il suffit pour cela de prendre deux bâtons de longueurs identiques et les assembler en formant un angle droit. Il faut alors viser l'élément à mesurer en avançant ou en reculant de sorte à faire coïncider le haut et le bas de la croix du bûcheron avec le haut et le bas de l'élément.

Cette méthode ancestrale est schématisée par la gravure de la figure ci-dessous.

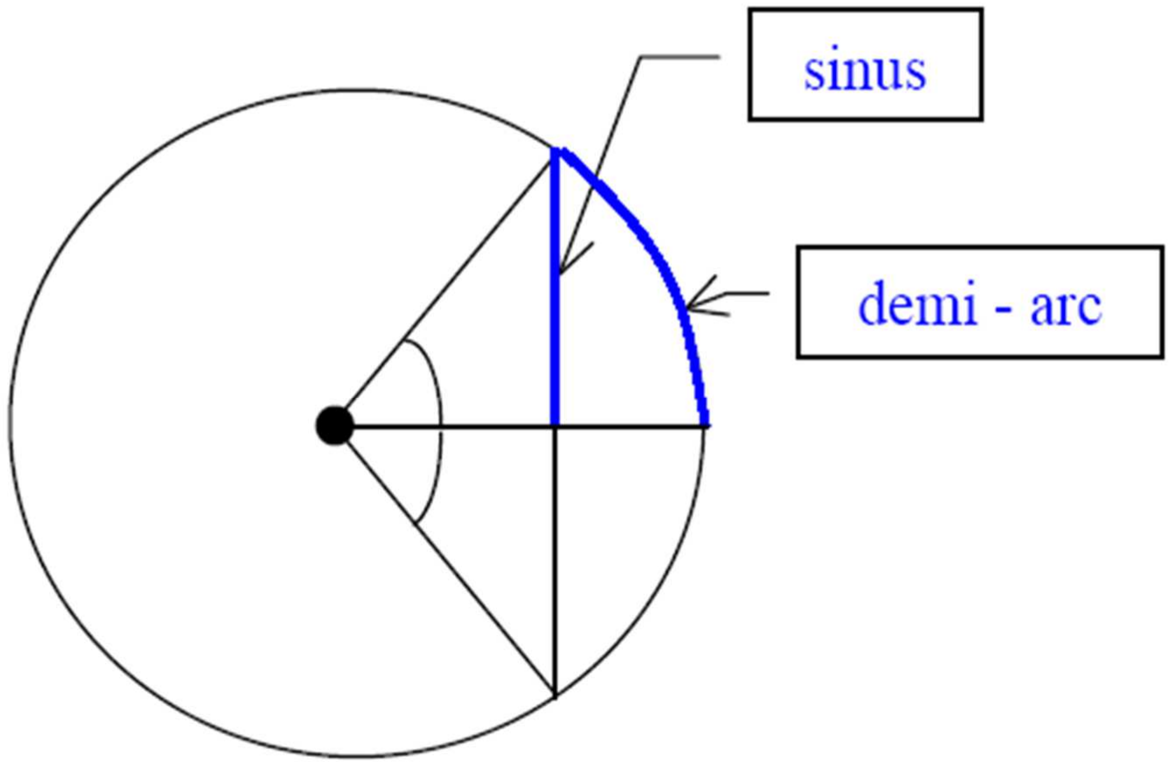


L'**arbalestrille** ou le **bâton de Jacob** est apparu dès le XVe siècle, Il est utilisé à terre pour mesurer des hauteurs de montagnes ou de bâtiments, ou encore des distances angulaires entre deux points. En mer il sert à mesurer des hauteurs d'astres.

Doc tiré de la Société Astronomique de Lyo



Suite aux tables des cordes, le mathématicien Aryabata eut la « bonne » idée de remplacer les tables de cordes par des tables de demi-cordes de l'angle double.

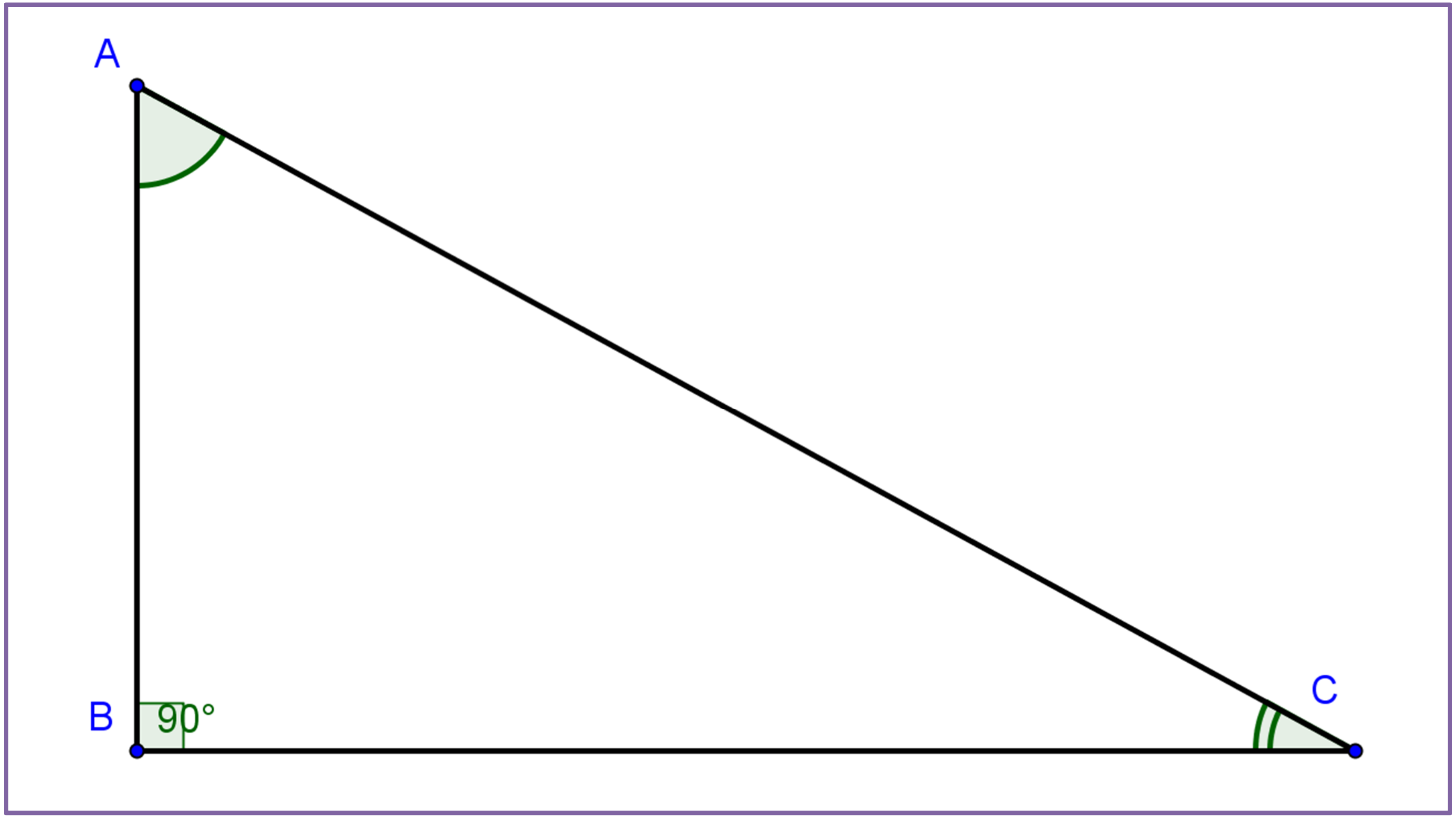


Ces nouvelles tables ont été appelées tables des SINUS. C'est le mathématicien perse Al – Khwarizmi qui a publié les tables les plus complètes à l'époque.

(*Schéma du quart de cercle trigonométrique en* ***CM***).

RELATIONS ou RAPPORTS ou LIGNES TRIGONOMETRIQUES dans le TRIANGLE **RECTANGLE**

Situation : on se place dans le triangle **ABC**, rectangle en **B**



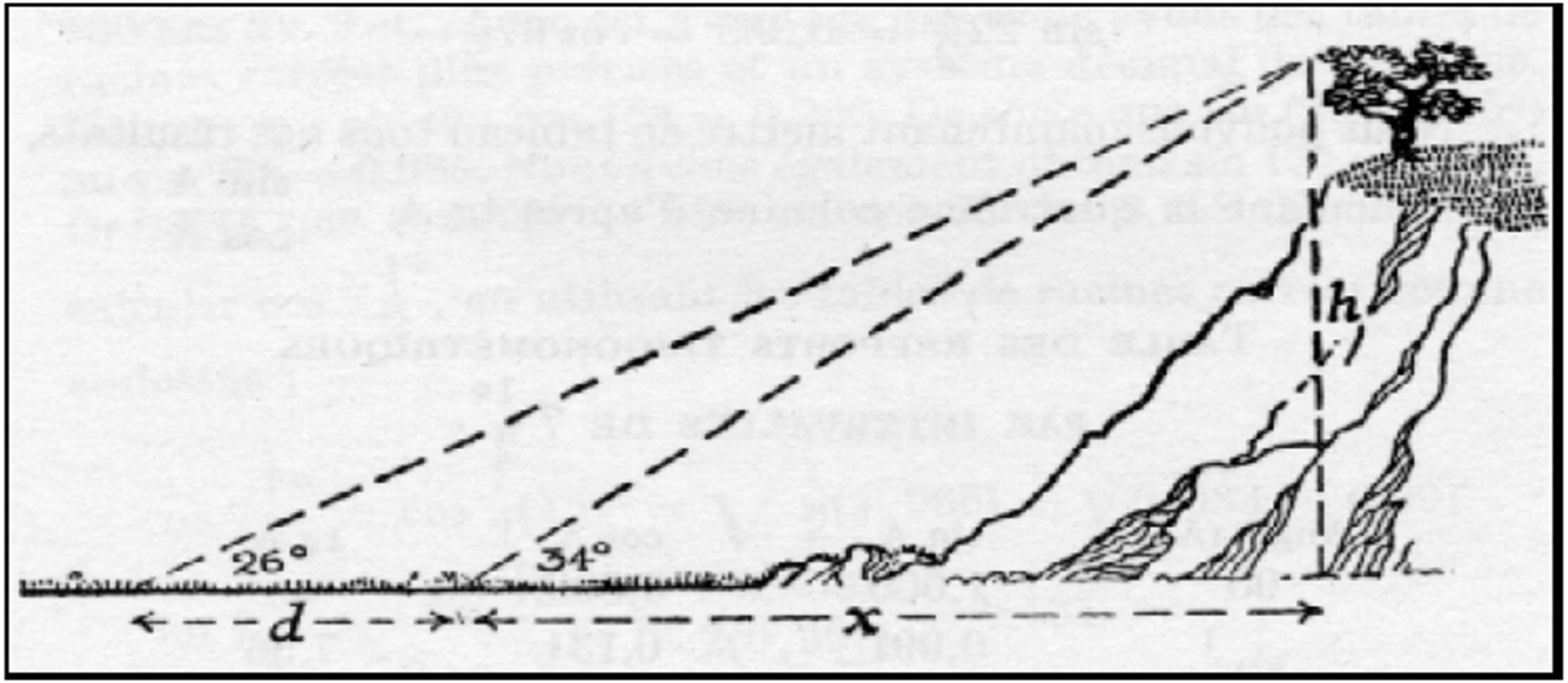
On définit alors trois « lignes trigonométriques » pour l'angle de sommet **A** et de côtés **[AB)** et **[AC)**, noté : $\angle$**BAC** :

cosinus $\angle$**BAC** = ***cosinus*** $\angle$**A** = **BA/AC** (< 1), ***sinus*** $\angle$**BAC** = ***sinus*** $\angle$**A** = **BC/AC** (< 1) et ***tangente*** $\angle$**BAC** = **BC/AC** = ***sinus*** $\angle$**BAC/*cosinus*** $\angle$**BAC**.

EXERCICE.
Définir les trois lignes trigonométriques de l'angle $\angle$**ACB**.
Remarques et observations ? Types de tâches à expliciter.

Quelques propriétés, mises en forme et rédigées pendant le ***CM*** au tableau.

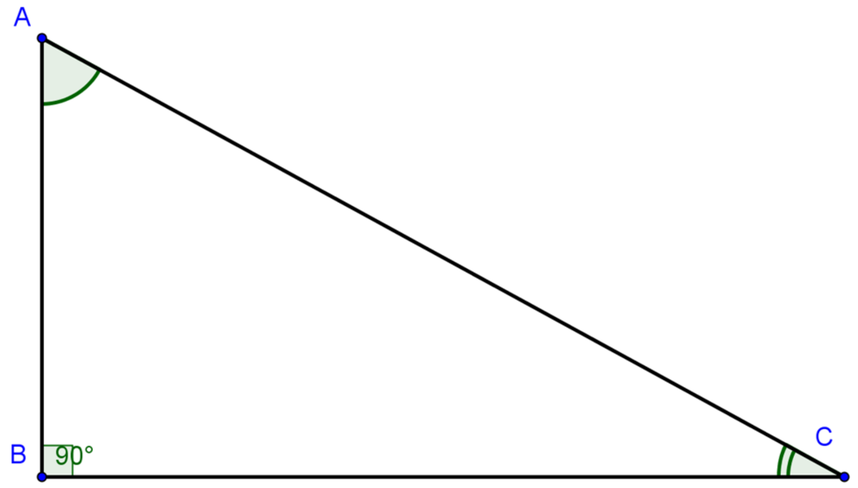
APPLICATION : mesure de la hauteur d'une falaise, connaissant uniquement deux angles de visée.
Un grand classique pour qui s'intéresse aux arpentages.
Voir diapositives précédentes et suivante.



INDICATION : on a les valeurs de deux angles, on donne ***d*** = 64 mètres, qu'on peut effectivement mesurer.
La question est : déterminer ***h*** et ***x***.

Réponse : on trouve ***h*** ≈ 113 mètres et ***x*** ≈ 168 mètres. (*Un peu « technique » comme calcul !*)

Quelques résultats « classiques » à connaître



On se place dans le triangle **ABC** rectangle en **B**. On peut alors établir des égalités entre lignes trigonométriques, dont voici les plus importantes au niveau du CRPE.

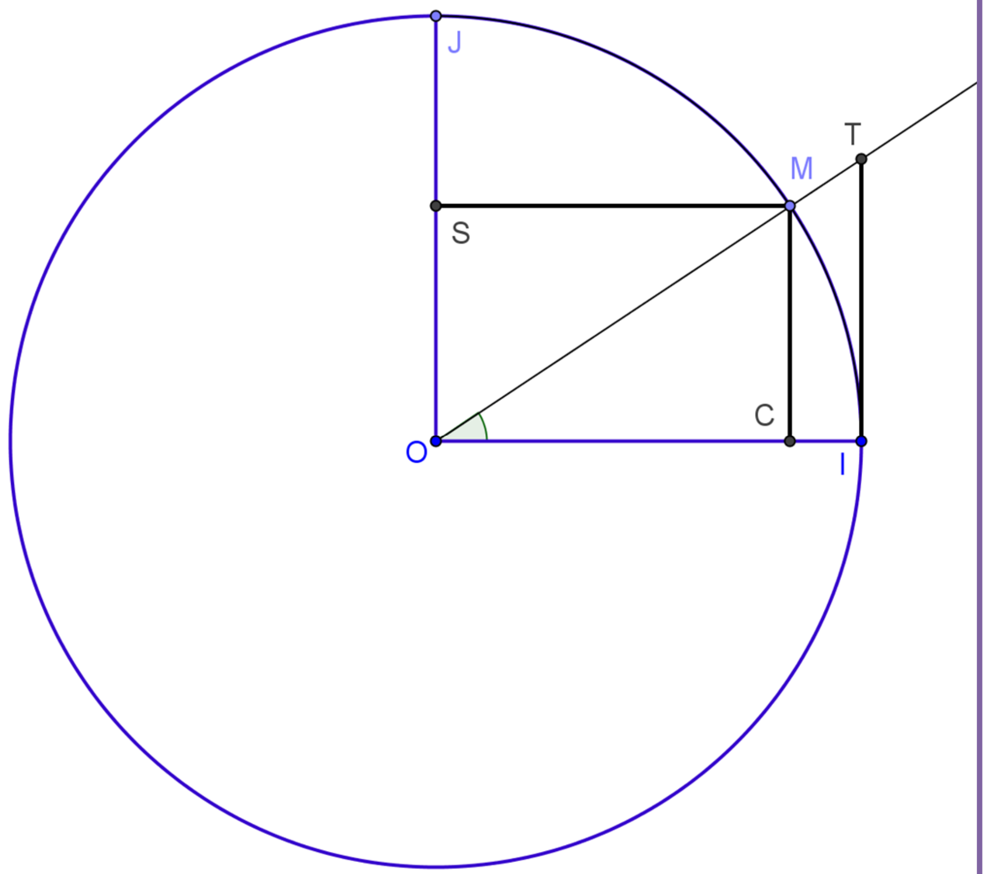
- $\sin \angle A = \cos \angle C$ et $\cos \angle A = \sin \angle C$. (*On utilise la définition de ces lignes trigonométriques données en diapositive 13*).
- $(\sin \angle A)^2 + (\cos \angle A)^2 = 1$. (*Démonstration à finir de rédiger, en utilisant les définitions données en diapositive 11 : on a* $(BA/AC)^2 + (BC/AC)^2 = (BA^2 + BC^2)/AC^2 =$ (*application du théorème de Pythagore*) $AC^2/AC^2 = 1$).
- $\tan \angle A = \sin \angle A / \cos \angle A$. Idem pour l'angle $\angle C$.

En fin de collège (<u>*et surtout au lycée*</u>), on travaille dans le cercle trigonométrique : le cercle de rayon 1. On définit alors les lignes trigonométriques dans le quart de cercle pour les angles aigus de la manière suivante :

Soit **M** le point de coordonnées $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ dans le repère orthonormal de centre O, noté : (O, I, J).

On a alors :
OM = $\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 = 1$, avec
$\boldsymbol{x}$ = OC = cos ∠O (*codé*)
$\boldsymbol{y}$ = OS = sin ∠O (*codé*) et
IT = tan ∠O (*codé*).

(<u>*Pistes de démonstration*</u> *: on a des triangles rectangles un peu « partout », donc…*).



A titre d'exercice

Retrouver les lignes trigonométriques des angles « *particuliers* » : 0° ; 30° ; 45° ; 60° et 90°.

On pourra utilement remplir et résumer ces valeurs exactes dans un tableau comme ci-dessous, à apprendre et à savoir.

	0°	30°	45°	60°	90°
cos					
sin					
tan					

Pour ce faire, écrire les lignes trigonométriques des angles d'un « demi-triangle équilatéral » et des angles d'un « demi-carré ».

Construire les figures et mettre en forme un tableau récapitulatif des lignes trigonométriques de ces angles particuliers.

(3) GEOMETRIE dans l'ESPACE

A notre niveau, c'est à dire celui du CRPE et du Master MEEF ; on peut faire notre un des objectifs fondamentaux de l'enseignement des mathématiques au COLLEGE sur le thème de la géométrie dans l'espace (*« géométrie spatiale » pour les journalistes, hihihi !*), qu'on peut résumer comme suit :

« L'objectif est (toujours) *d'apprendre à voir dans l'espace et de calculer des longueurs, des aires et des volumes.*

Ceci implique un large usage des représentations en perspective (cavalière) *et de la fabrication des patrons. L'observation et l'argumentation au cours de tous ces travaux font appel aux acquis de la géométrie plane et à quelques énoncés classiques concernant le parallélisme et l'orthogonalité dans l'espace ».*

On doit dès à présent mettre cet objectif en perspective avec ce qui est demandé au primaire. Au cycle II et au cycle III, l'étude physique et mathématique de solides tels que le cube et le pavé droit doit permettre à l'élève de développer et d'acquérir les compétences suivantes.

- **Distinguer, de manière perceptive, le cube et le pavé droit parmi d'autres solides usuels. Donner le nom du solide perçu.**
- **Utiliser le vocabulaire adéquat : cube, pavé droit ou parallélépipède rectangle, face, arête, sommet.**
- **Vérifier certaines propriétés relatives aux faces ou aux arêtes d'un solide à l'aide des instruments de géométrie.**
- **Décrire un solide, en vue de l'identifier, de le reproduire ou de le faire reproduire. Construire un solide. Reconnaître, construire ou compléter un patron de cube, de pavé droit.**

Dans la suite, nous allons travailler un aspect plus mathématique.

<u>Pourquoi un intérêt (*si particulier*) pour le cube et le pavé droit</u> ?

Premièrement, les « outils » classiques de la géométrie plane vont être réinvestis. Par « outil » classique, on entend les deux théorèmes fondamentaux de la géométrie euclidienne plane (le théorème de Thalès et le théorème de Pythagore), la géométrie du triangle et des quadrilatères, la trigonométrie élémentaire, …

Deuxièmement, ces solides sont deux bons « objets » matériels et mathématiques qui permettent d'appréhender et d'étudier les propriétés liées au parallélisme et les propriétés liées à l'orthogonalité.

Troisièmement, l'étude de ces solides permet de développer des images mentales, d'expliquer ou de justifier des hypothèses ou des conjectures et d'ancrer quelques savoirs de base pour « bien voir » dans l'espace.

(3) GEOMETRIE dans l'ESPACE (suite)

REGLES et DEFINITIONS de BASE
Un inventert à la PREVAIRE ! (*Voir le fichier d'exercices*)

<u>R 1</u>. Etant donné deux points distincts **A** et **B** de l'espace, il n'existe qu'une et une seule droite contenant **A** et **B**.

<u>R 2</u>. Etant donné trois points **A**, **B** et **C**, non alignés de l'espace, il existe un et un seul plan contenant ces trois points. <u>*Notation*</u> : plan **(ABC)**.

<u>DEF 1</u>. On appelle points coplanaires des points appartenant au même plan.

<u>R 3</u>. Si deux points **A** et **B** sont distincts, alors la droite **(AB)** est contenue dans chaque plan passant par les points **A** et **B**.

R 4. Position relative d'une droite et d'un plan.

Une droite peut être :

- sécante à un plan (*la droite et le plan ont un seul point commun*).
- parallèle à un plan (*la droite et le plan n'ont aucun point commun* OU *la droite est contenue dans le plan*).

Positions relatives de deux droites

R5. Quand une figure de l'espace est contenue dans un plan, on peut utiliser toutes les propriétés de la géométrie plane.

R6. Deux droites de l'espace peuvent être :

- coplanaires, s'il existe un plan les contenant toutes les deux.
- non coplanaires, s'il n'existe aucun plan contenant à la fois ces deux droites.

(*Suite*)

DEF 2. Deux droites de l'espace sont parallèles si elles vérifient DEUX conditions :

- elles sont coplanaires ;
- ET elles sont confondues ou n'ont pas de point commun.

R7. Deux droites parallèles à une même autre droite sont parallèles entre elles.

R8.

- SI une droite (***d***) est parallèle à une droite d'un plan (**P**), ALORS cette droite (***d***) est parallèle au plan (**P**).
- *Réciproquement*. SI une droite (***d***) est parallèle à un plan (**P**), ALORS, cette droite (***d***) est parallèle à au moins une droite de ce plan (**P**).

Positions relatives de deux plans

R9. Deux plans peuvent être :

- sécants. Dans ce cas, leur intersection est une droite.
- parallèles. Dans ce cas, ils n'ont aucun point commun ou ils sont confondus.

R10.

SI deux plans sont parallèles, ALORS toute droite de l'un est parallèle à l'autre.

SI deux droites sécantes d'un plan sont parallèles à un autre plan, ALORS ces deux plans sont parallèles.

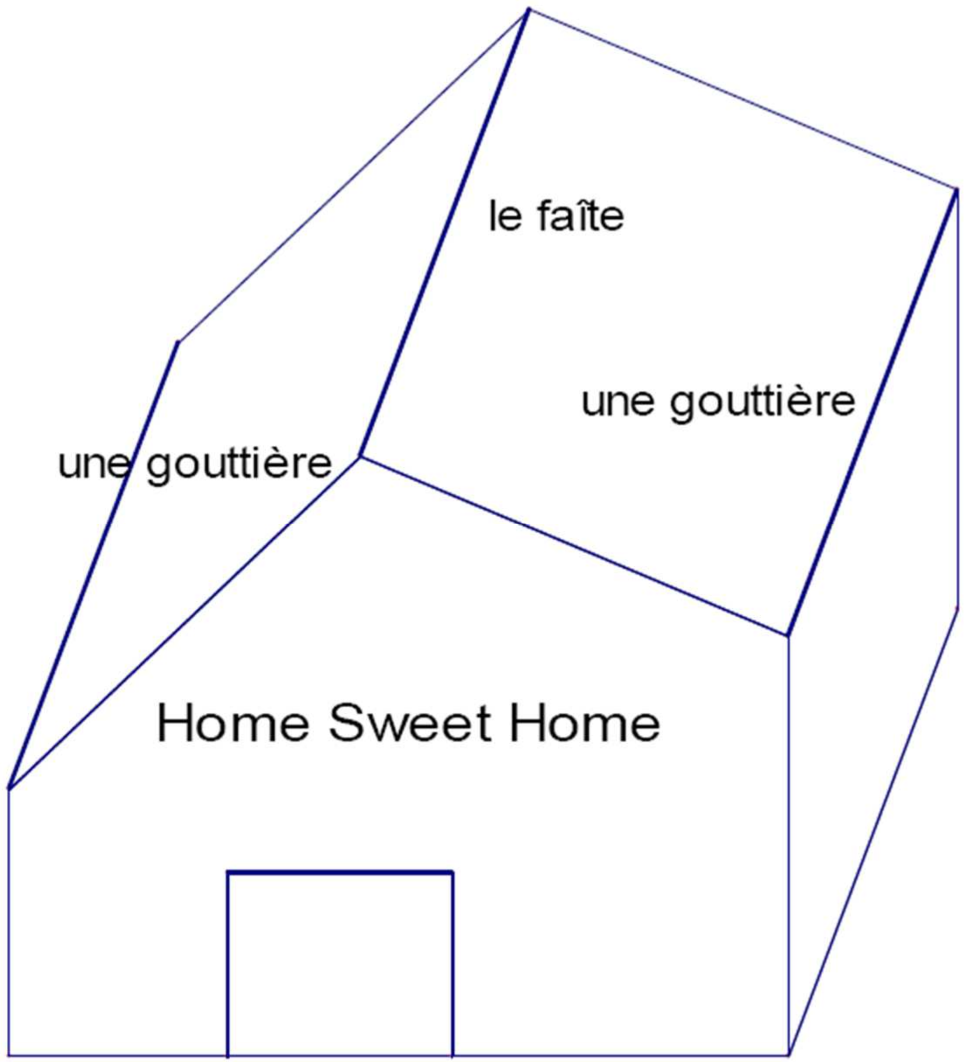
R11. SI deux plans sont parallèles; ALORS tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

R12. Deux plans parallèles à un même plan sont parallèles entre eux.

R13. « Le théorème du TOIT ».
On se donne deux droites (***d***) et (***d’***) parallèles.

SI un plan (**P**) contenant (***d***) est sécant avec un autre plan (**P’**) contenant (***d’***), ALORS la droite d’intersection de ces deux plans est parallèles aux droites (***d***) et (***d’***).

VOILA, on a presque « tout », c’est le but du jeu ! Il ne reste plus qu’à apprendre !!! En effet, il y a encore des manques !

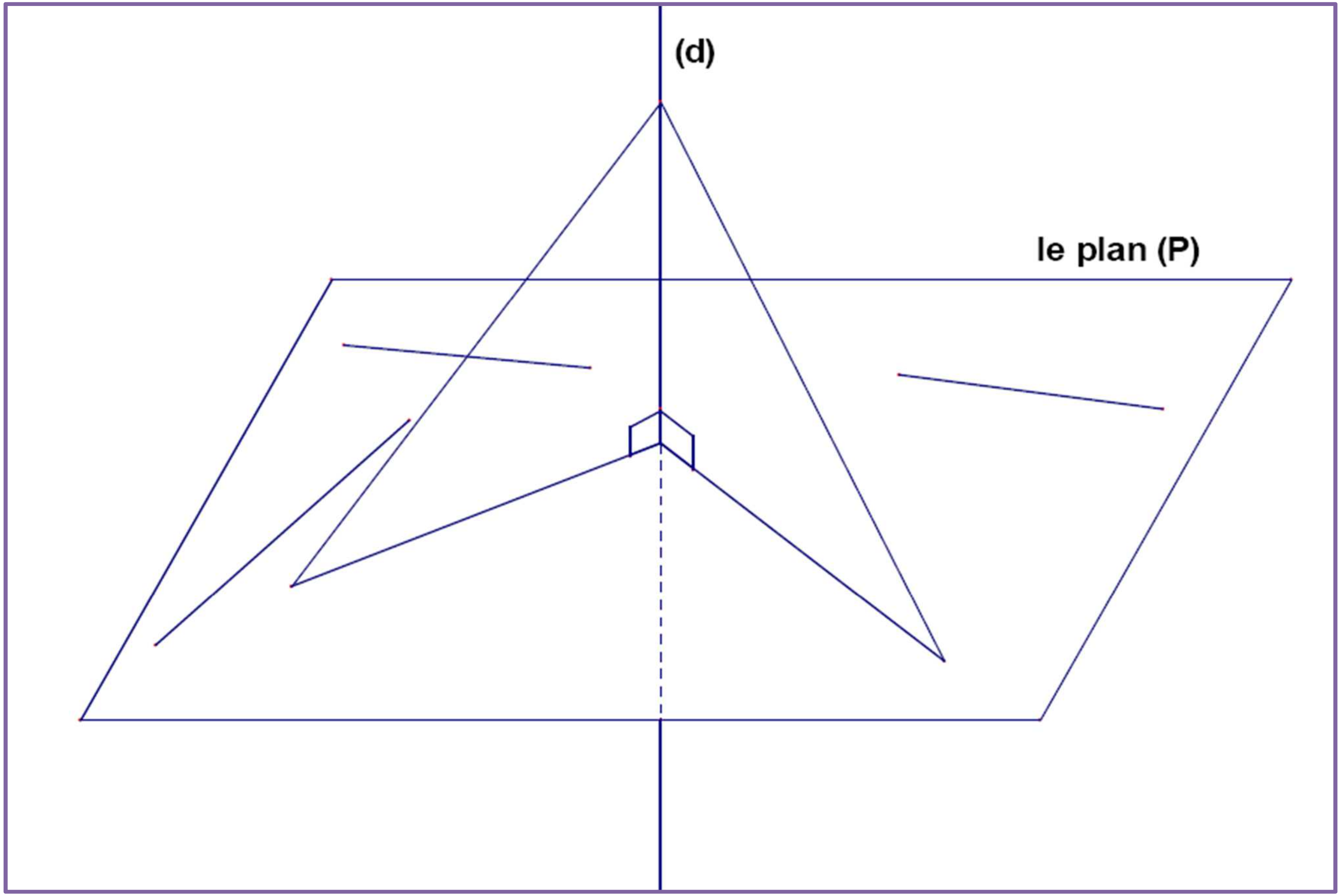


Et les droites orthogonales ? *Ah oui*. Les fameuses droites perpendiculaires qui ne se coupent pas !

Droite perpendiculaire à un plan

Dès qu'une droite (***d***) est perpendiculaire (*ou simplement orthogonale*) à deux droites sécantes (***D***) et (***D'***) d'un plan (**P**) ; cette droite (***d***) est orthogonale à toutes les droites de ce plan (**P**). (*Voir schéma diapositive suivante*).

Définition. On dit alors que « la droite (***d***) est perpendiculaire au plan (**P**) » ou que « le plan (**P**) est perpendiculaire à la droite (***d***) » ou que « la droite (***d***) et le plan (**P**) sont perpendiculaires ».


(d)
le plan (P)

Les questions qui se posent ensuite sont celles relatives à la représentation sur un plan d'un objet de l'espace.

Plusieurs « verbes d'action » sont ainsi à étudier.

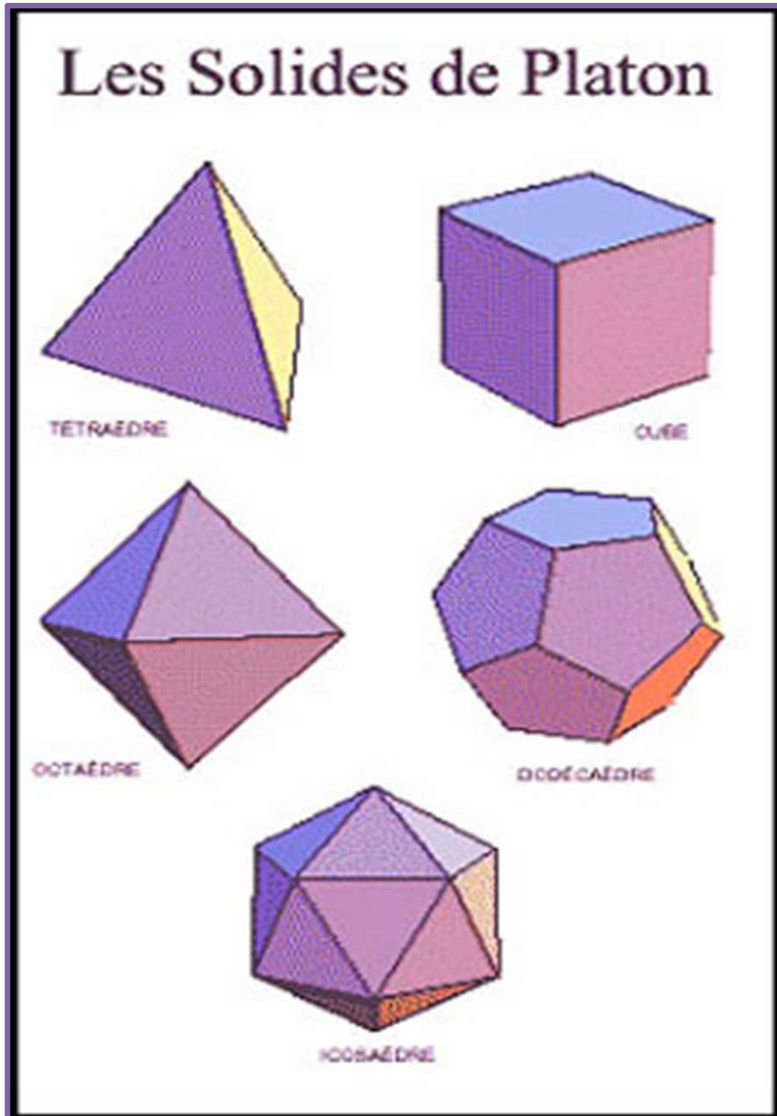
- **CONSTRUIRE.** C'est se mettre dans la situation d'un architecte ou d'un maçon qui veut effectivement réaliser ou fabriquer l'objet dans l'espace.

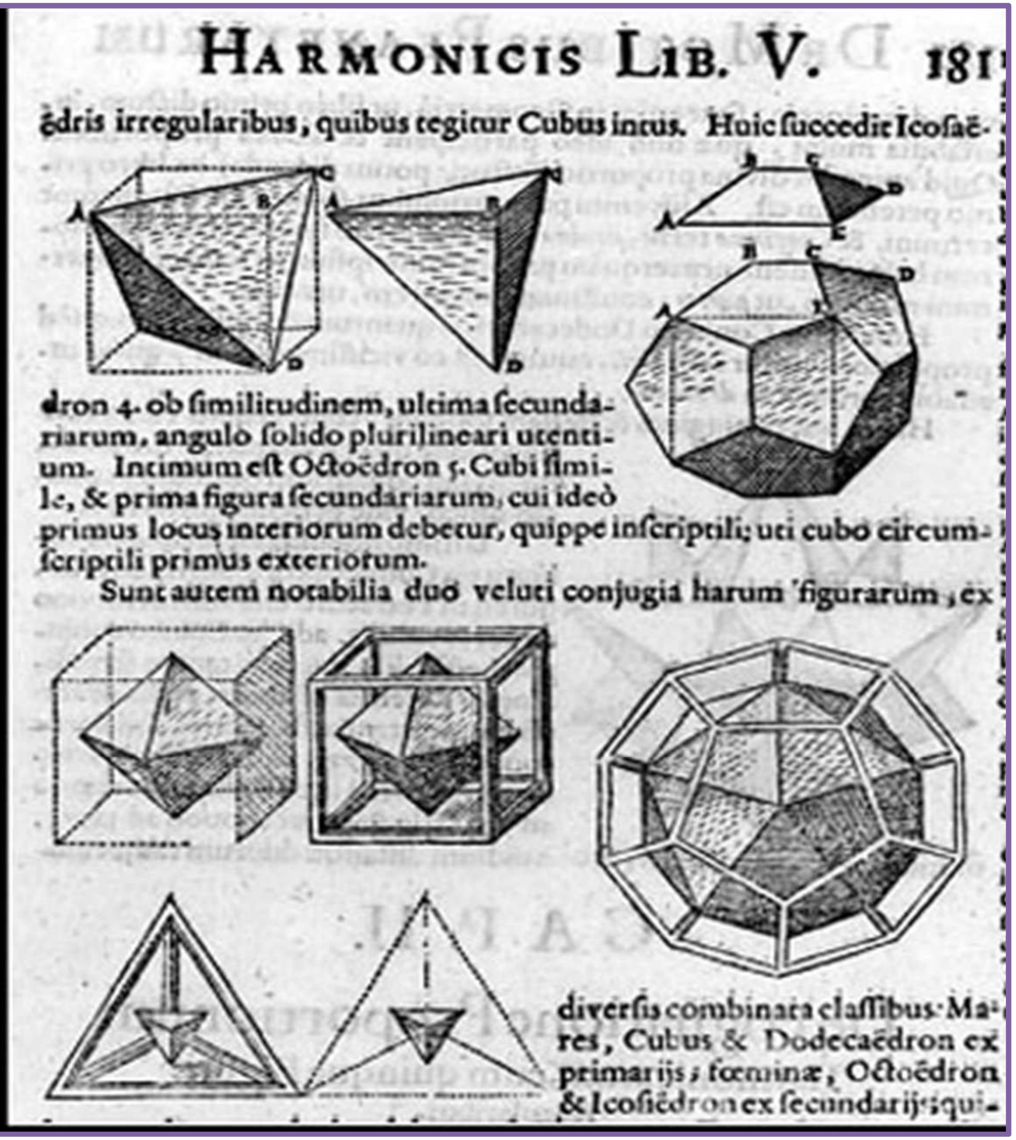
- **REPRESENTER.** C'est se mettre dans la situation d'un dessinateur qui a conçu l'objet qui veut éventuellement transmettre un message à un constructeur ou à un exécutant. *On change de support de travail…*

- **DECRIRE.** C'est se mettre dans la situation d'un(e) journaliste (*Aïe, aïe, aïe !*) qui doit rédiger un article synthétique et concis de ce qui caractérise l'objet.

- **REPRODUIRE.** C'est se mettre dans la situation de l'exécutant devant « refaire » l'objet ou redessiner le plan de l'objet, à l'identique ou à l'échelle.

On poursuit l'étude.
Solides usuels et quelques propriétés





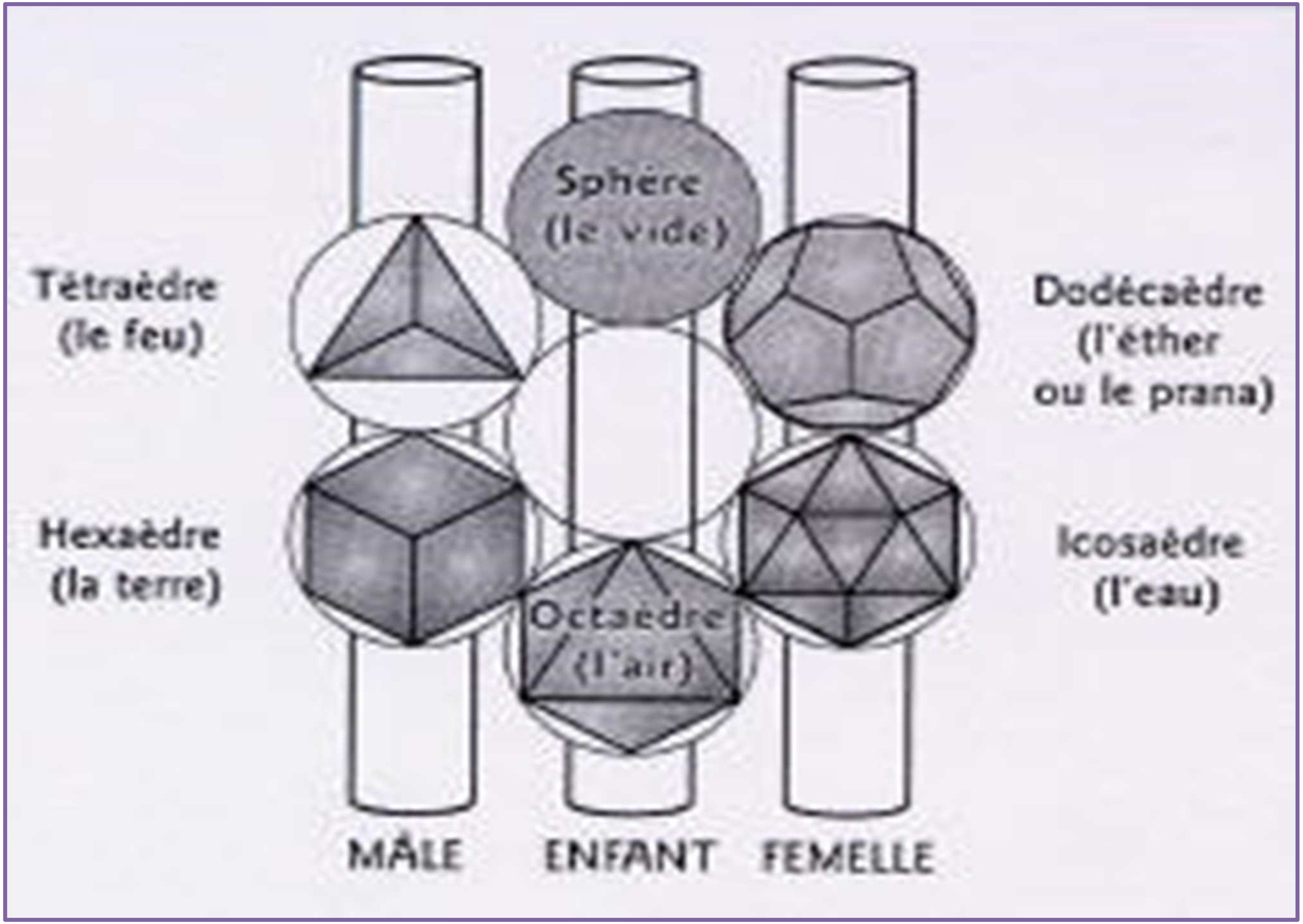
HARMONICIS LIB. V. 181

ědris irregularibus, quibus tegitur Cubus intus. Huic ſuccedit Icoſaë-

dron 4. ob ſimilitudinem, ultima ſecundariarum, angulo ſolido plurilineari utentium. Intimum eſt Octoëdron 5. Cubi ſimile, & prima figura ſecundariarum, cui ideò primus locus interiorum debetur, quippe inſcriptili; uti cubo circumſcriptili primus exteriorum.

Sunt autem notabilia duo veluti conjugia harum figurarum, ex

diverſis combinata claſſibus: Mares, Cubus & Dodecaëdron ex primarijs; fœminæ, Octoëdron & Icoſiëdron ex ſecundarijs; qui-


Sphère
(le vide)
Tétraèdre
(le feu)
Dodécaèdre
(l'éther
ou le prana)
Hexaèdre
(la terre)
Icosaèdre
(l'eau)
Octaèdre
(l'air)
MÂLE
ENFANT
FEMELLE

Qu’est-ce qu’un « solide de PLATON » ?

Il y en a cinq (*merci Euclide !*).

Un solide de PLATON est un solide inscriptible dans une sphère et dont toutes ses faces sont des polygones réguliers superposables ou isométriques.

CUBE

Il est composé de six faces qui sont des carrés. Il a huit sommets et douze arêtes. Il a trois arêtes en chacun des sommets.

Chez les grecs, il était le symbole de la TERRE.

TETRAEDRE

Il est composé de quatre faces qui sont des triangles équilatéraux. Il a quatre sommets et six arêtes. Il a trois arêtes en chacun des sommets.

Chez les grecs, il était le symbole du FEU.

OCTAEDRE

Il est composé de huit faces qui sont des triangles équilatéraux. Il a six sommets et douze arêtes. Il a quatre arêtes en chacun des sommets.

Chez les grecs, il était le symbole de l’AIR.

DODECAEDRE

Il est composé de douze faces qui sont des pentagones réguliers. Il a vingt sommets et trente arêtes. Il a trois arêtes en chacun des sommets.

Chez les grecs, il était le symbole de l'UNIVERS.

ICOSAEDRE

Il est composé de vingt faces qui sont des triangles équilatéraux. Il a douze sommets et trente arêtes. Il a cinq arêtes en chacun des sommets.

Chez les grecs, il était le symbole de l’EAU.

Une démonstration : pourquoi cinq seulement ?

Un polyèdre régulier doit avoir le même nombre de polygones réguliers en chacun de ses sommets. Ce nombre est évidemment au minimum de trois. Le maximum dépendra de l'angle du polygone régulier.
En effet si la somme des angles au sommet atteint ou dépasse 360°, nous obtenons un plan ou une superposition des faces.

Commençons donc par trois.

Le polygone régulier ayant trois côtés est le triangle équilatéral, chaque angle mesure 60°.

Si nous en plaçons trois en chaque sommet du polyèdre régulier, nous obtenons le tétraèdre régulier.

Si nous plaçons quatre triangles équilatéraux en chaque sommet du polyèdre régulier, nous obtenons l'octaèdre régulier.

Si nous plaçons cinq triangles équilatéraux en chaque sommet du polyèdre régulier, nous obtenons l'icosaèdre régulier.

Et si nous essayons six triangles, nous avons $6 \times 60° = 360°$, nous n'aurons pas de sommet pour le polyèdre, c'est donc impossible, regardons maintenant le polygone régulier à quatre côtés, il s'agit du carré.

On peut placer trois carrés en chaque sommet du polyèdre régulier, nous obtenons alors le cube.
Si nous essayons quatre carrés, nous avons $4 \times 90° = 360°$, nous n'aurons pas de sommet pour le polyèdre, c'est impossible, regardons maintenant le polygone régulier à cinq côtés, il s'agit du pentagone régulier dont chaque angle mesure 108°.

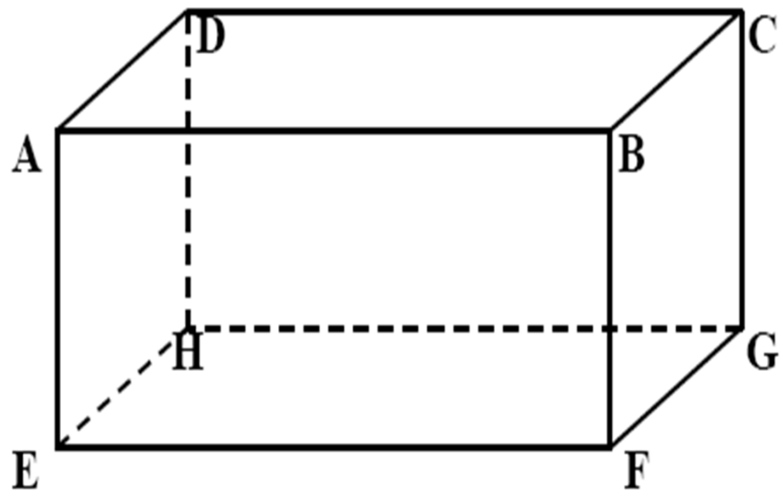
On peut placer trois pentagones réguliers en chaque sommet du polyèdre régulier, nous obtenons le dodécaèdre.
Si nous essayons quatre pentagones , nous avons $4 \times 108° = 432°$, supérieur à 360°, il y aura superposition, nous n'aurons pas de sommet pour le polyèdre, c'est impossible, regardons maintenant le polygone régulier à six côtés, il s'agit de l'hexagone régulier dont chaque angle mesure 120°.
Mais $3 \times 120° = 360°$, c'est impossible. Et les autres polyèdres réguliers ont des angles de plus en plus « grands », inutile alors de continuer.

Et TOUS les autres ? Il y en a un « paquet » !!!
Avec un petit exercice, ça devrait le faire

EXERCICE 1.

On considère le dessin ci-contre.
Il représente, en perspective cavalière, un pavé droit.
Compléter chaque phrase par l'une des quatre expressions :

- ☺ dans la réalité uniquement ;
- ☺ sur le dessin uniquement ;
- ☺ dans la réalité et sur le dessin ;
- ☺ ni dans la réalité et ni sur le dessin.



1) Les points **E**, **H** et **B** sont alignés.
2) Les (*supports des*) segments **[BF]** et **[BC]** sont perpendiculaires.
3) Les (*supports des*) segments **[EF]** et **[DC]** sont parallèles.
4) Les (*supports des*) segments **[DH]** et **[AB]** sont sécants.
5) Les segments **[BG]** et **[CF]** ont la même longueur et sont perpendiculaires.
6) La face **(ABCD)** est un parallélogramme, non rectangle.
7) La face **(ABFE)** est un rectangle.

Indication : on peut utiliser des couleurs en surlignant les objets sur lesquels on travaille.

Pistes de correction

1) Les points **E**, **H** et **B** ne sont pas alignés, ni dans la réalité, ni sur le dessin.
2) Les segments [**BF**] et [**BC**] sont perpendiculaires dans la réalité, mais pas sur le dessin. C'est une information qu'on perd dans la représentation en perspective cavalière
3) Les segments [**EF**] et [**DC**] sont parallèles dans la réalité et sur le dessin. En effet, la perspective cavalière conserve le parallélisme. On a (**EF**) // (**AB**), car côtés opposés du rectangle (**ABFE**) et (**DC**) // (**AB**), car côtés opposés du rectangle (**ABCD**), les droites (**EF**) et (**DC**) sont donc parallèles, car toutes deux parallèles à une même troisième droite (**AB**).
4) Les segments [**DH**] et [**AB**] ne sont pas sécants dans la réalité, même s'ils le sont sur le dessin. En fait, les segments [**DH**] et [**AB**] sont orthogonaux. L'orthogonalité est le « pendant » de la perpendicularité dans l'espace : les droites ne se coupent pas nécessairement. On a (**AB**) perpendiculaire au plan (**ADHE**), cette droite est alors orthogonale à toute droite de ce plan, donc, (**AB**) est orthogonale à (**DH**).
5) Les deux segments [**BG**] et [**CF**] n'ont pas la même longueur sur le dessin, ils ne sont pas perpendiculaires ni sur le dessin, ni en réalité. *Etudier le cas où la face (**BCGF**) est un carré.*
6) **a**) Dans la réalité, (**ABCD**) est rectangle comme face d'un pavé droit. **b**) Par convention, la perspective cavalière conserve le parallélisme ; donc, sur le dessin, on a (**AB**) parallèle à (**DC**) et (**AD**) parallèle à (**BC**) ; (**ABCD**) est un parallélogramme.
7) **a**) Dans la réalité, (**ABFE**) est un rectangle, comme face d'un pavé droit. **b**) Sur le dessin, (**ABFE**) est aussi un rectangle.

<u>Quelques définitions et propriétés</u>

☺ On appelle solide géométrique tout objet indéformable ayant trois dimensions, limité par des surfaces fermées. On peut distinguer deux types de solides :

(i) ceux délimités par une surface uniquement composée de polygones, on les appelle les polyèdres ;

(ii) ceux dont une au moins des parties de la surface le constituant n'est pas un polygone, on les appelle les non-polyèdres.

<u>Quelques exemples emblématiques</u> : le pavé droit est un polyèdre (*il est délimité par des rectangles)* et le cône de révolution est un non-polyèdre : il n'est pas délimité uniquement par des polygones.

☺ Où il est question de vocabulaire spécifique : faces, arêtes et sommets, voir les bons manuels de préparation au CRPE !

☺ On peut reconnaître un polyèdre convexe au fait que si on le « pose » sur une surface plane, il « repose » alors sur une face entière. Sinon, on dit que le polyèdre est non-convexe (*parfois concave).*

☺ Parmi les polyèdres convexes, il y en a qui sont particuliers. Ce sont ceux dont : (i) toutes les faces sont des polygones réguliers ; (ii) le même nombre d'arêtes part de chaque sommet en formant le même angle. Ces polyèdres sont les polyèdres réguliers (les solides de Platon, voir diapositives précédentes)

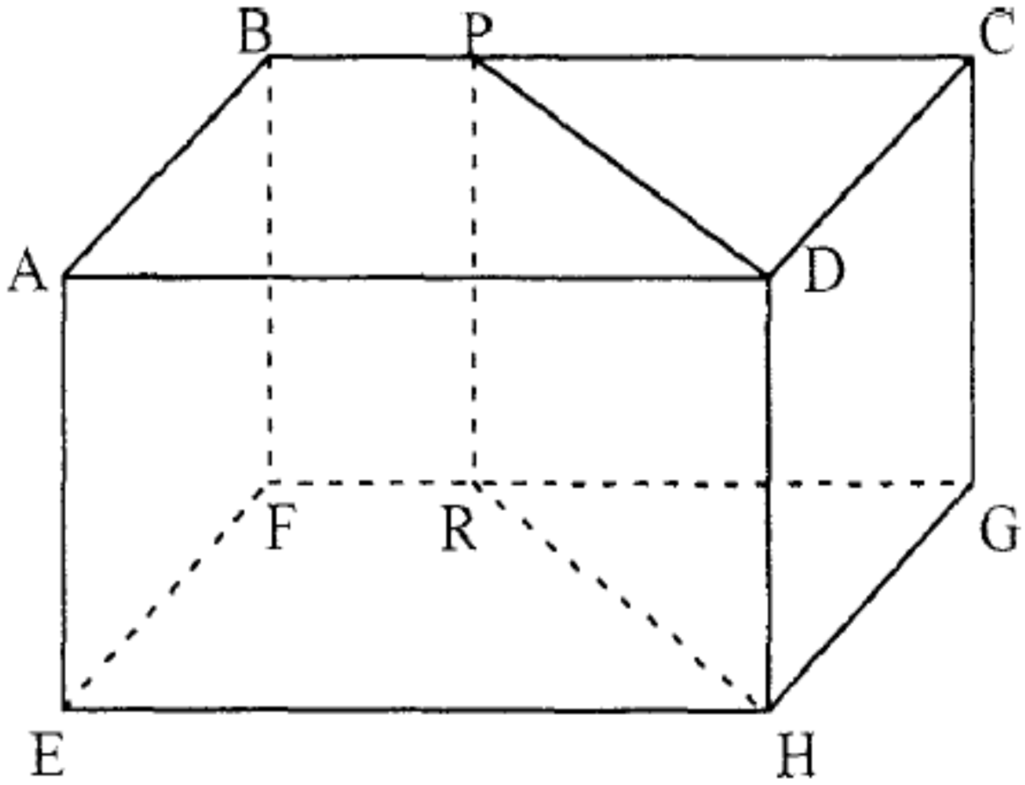
On termine avec les règles ou les conventions de la Perspective Cavalière ou représentation en PC

- Les lignes représentées en traits pleins sont vues par l'observateur, sinon, elles sont représentées en pointillés.
- la PC conserve le parallélisme : deux droites parallèles sont représentées par deux droites parallèles.
- la PC conserve les milieux : le milieu d'un segment est représenté par le milieu du segment tracé.
- Il existe un plan frontal. On le « dessine » tel quel, à l'échelle. Tout segment situé dans le plan frontal est représenté sur le dessin en vraie grandeur ou à l'échelle.
- Tout segment perpendiculaire à un plan frontal est représenté par un segment « plus court » porté par une oblique.
- On choisit un angle de fuyante et un coefficient de réduction des longueurs sur les fuyantes.
- *… Il y en a d'autres, plus complexes, qui ne sont pas au programme.*

Quelques EXERCICES (*résolus, ouf !*).
Patron, Volumes, Calculs et divers…

Ex 1. Le pavé droit **ABCDEFGH** ci-contre est coupé selon un ***plan*** et la section obtenue est le quadrilatère **DPRH**.

On donne : **EH** = 8 cm, **HG** = 5 cm, **CG** = 4 cm et **BP** = 2 cm.



1) Tracez en vraie grandeur le quadrilatère **DPRH**.
2) Calculez la valeur exacte de **PH**.
3) Calculez le volume du prisme **ABPDEFRH**.

Ex 2. Les aires des faces d'un parallélépipède rectangle (on dit aussi un pavé droit) sont respectivement égales à 96, 160 et 240 centimètres carrés.

Quel est le volume de ce pavé ?

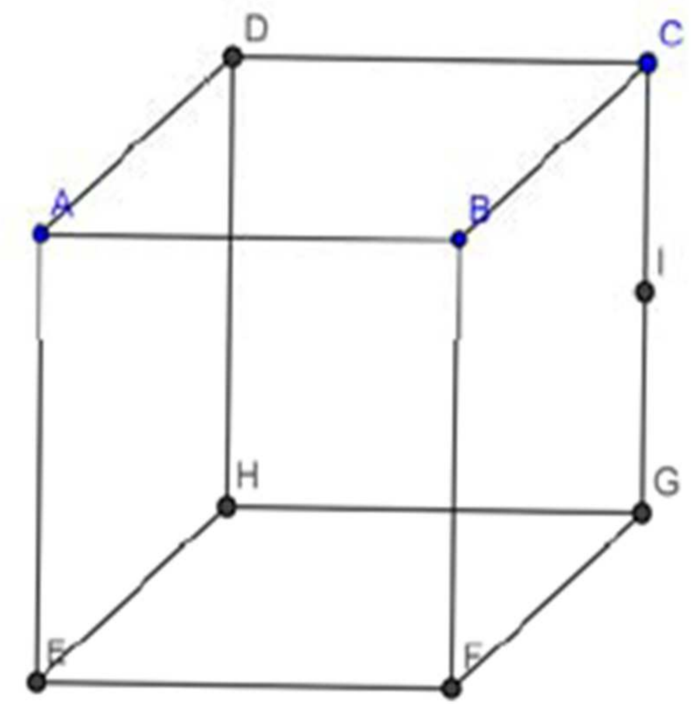
Indication : d'abord un petit dessin ! On appelle x, y et z les trois dimensions du pavé. On a alors les trois égalités suivantes : $x \times y = 96$; $y \times z = 160$ et $x \times z = 240$. Un petit traitement algébrique ou arithmétique reste à produire…

Ex 3. Un cube en bois plein d'arête 12 centimètres est posé sur une table. On considère deux arêtes verticales de ce cube n'appartenant pas à la même face.

Calculer la longueur du plus court chemin reliant une extrémité d'une de ces arêtes au milieu de l'autre arête, en restant à la surface du cube.

Pas facile, quelques dessins de patrons doivent pouvoir faciliter les recherches ! Cf. les diapositives suivantes.

On nomme **ABCDEFGH** le cube étudié. Le point **A** est le sommet de la première arête, dans ce cas, l'arête parallèle à l'arête verticale passant par **A** est **[CG]**. On appelle **I** le milieu de **[CG]**.

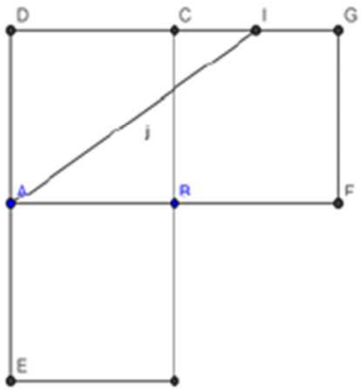


Cet exercice s'appelle aussi « *le problème de la fourmi* » qui se « promène » sur le cube, en suivant un chemin « *le plus court* ».

Le « chemin le plus court » entre deux points sur un plan est la « ligne droite ».

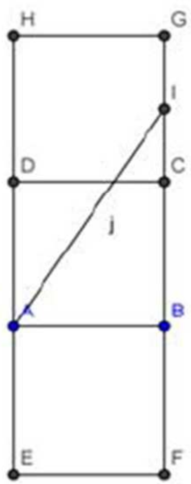
Il s'agit donc d'étudier les segments **[AI]** les « plus courts » sur divers patrons.

Patron 1



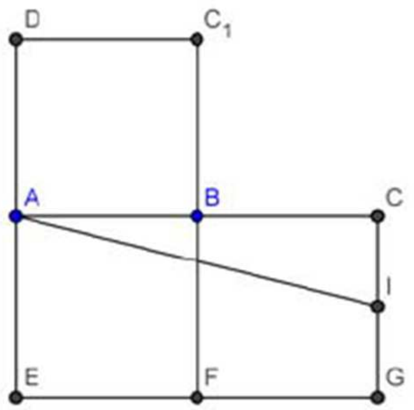
Par le théorème de Pythagore appliqué, dans le patron 1, dans le triangle ADI rectangle en D, on a AI²=AD²+DI²=12²+18². On en déduit $AI = 6\sqrt{13}$

Patron 2



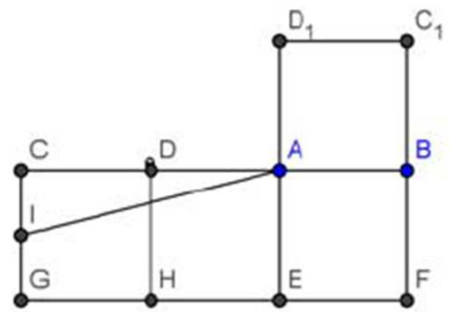
Par le théorème de Pythagore appliqué, dans le patron 2, dans le triangle ABI rectangle en B, on a AI²=AB²+BI²=12²+18². On en déduit $AI = 6\sqrt{13}$

Patron 3



Par le théorème de Pythagore appliqué, dans le patron 3, dans le triangle ACI rectangle en C, on a AI²=AC²+CI²=24²+6². On en déduit $AI = 6\sqrt{17}$

Patron 4



Par le théorème de Pythagore appliqué, dans le patron 4, dans le triangle ACI rectangle en C, on a AI²=AC²+CI²=24²+6². On en déduit $AI = 6\sqrt{17}$

CONCLUSION :

le « chemin le plus court » mesure donc $6\times\sqrt{13}$ cm

Du côté du « *problème 3* » du *CRPE… Un exemple classique*

Dans le manuel pour les élèves de la collection « **Cap Maths** » **CM1** (*Editions Hatier, 2003, page 95*), l'activité suivante est proposée aux élèves.

Recherche Construire un patron

Tu vas devoir construire une boîte identique
à celle qui t'a été remise.
Pour cela, tu vas réaliser un patron de cette boite.
Tu disposes d'une feuille de papier, d'un crayon,
d'une paire de ciseaux.
Tu ne peux utiliser ni règle, ni équerre,
mais tu peux te servir de la boîte
comme gabarit pour effectuer des tracés.

Cette activité vient après un travail de description de ***polyèdres*** *sans que la notion de* ***patron*** *n'ait été abordée.*

1. L'enseignant(e) va préciser la définition d'un patron lors de la phase d'appropriation du problème.

a) Proposer une définition d'un patron.

b) Quelle pourrait être l'activité de l'enseignant(e) lors de cette phase d'appropriation ?

c) Pas de question **c)** ! *Hihihi…*

2. Pourquoi les auteurs interdisent-ils aux élèves l'usage de la règle et de l'équerre ?

3. Indiquer deux procédures utilisables par les élèves.

4. Citer trois erreurs que l'on peut attendre des élèves.

5. Lors de la synthèse, quelle conclusion pourrait être tirée de cette activité ?

Pistes de CORRECTION, *avec les programmes 2015-2016*

1) a) Une définition d'un patron

<u>Remarque</u>. La question ne précise pas si cette proposition doit être faite en des termes accessibles à des élèves de CM1 ou bien à un niveau de formulation plus expert, nous pouvons lever cet implicite en interprétant la question comme l'attente d'un niveau de formulation expert car si la demande avait concerné les élèves de CM1, cela aurait été indiqué dans la question.

Un patron d'un solide est une **SURFACE** qui doit satisfaire à plusieurs contraintes :

elle constitue une figure plane ;

elle doit être d'un seul tenant et formée de l'assemblage de toutes les faces du solide ;

elle doit permettre, par pliage, en utilisant comme plis ses tracés intérieurs, de reconstituer le solide dans sa totalité sans qu'il y ait superposition de faces.

On peut formuler cela en une seule phrase : « Un patron de solide est une surface délimitée par une figure plane, faite d'un seul morceau, telle que, uniquement par pliage et sans chevauchement de faces, elle permette d'obtenir le solide complet ».

<u>Remarque</u>. Tous les solides ne possèdent pas de patron, il est bien connu par exemple, que la sphère ne peut pas être « mise à plat » sans déformation (problème des cartes de géographie), elle ne possède donc pas de patron. On appelle solide développable un solide possédant un patron et solide non développable un solide ne possédant pas de patron.

1) b) Activité de l'enseignant(e) lors de la phase d'appropriation

Remarque. Le programme de géométrie du cycle III, pour la partie primaire, comporte dans le paragraphe « Solides : cube, parallélépipède rectangle », une ligne précisant : « reconnaître, construire ou compléter un patron de cube, de parallélépipède rectangle ».

On peut donc supposer qu'avant d'aborder cette activité de recherche sur le patron du parallélépipède rectangle, les élèves ont déjà rencontré certains patrons et notamment des patrons de cubes. La notion de patron ne peut donc pas être totalement nouvelle pour eux. Cette notion sera évidemment reprise en fin de cycle III, c'est-à-dire au collège !

Dans un premier temps, l'enseignant peut solliciter les élèves en leur demandant de préciser ce qu'est, à leur avis, un **patron** de la boîte. Il recueillera leurs différentes propositions, en élaborera une synthèse orale ou écrite pour dégager et mettre en évidence les trois types de contraintes évoquées dans la question précédente.

Dans un second temps, elle pourra montrer aux élèves un patron de cube correct qui par pliage permet de reconstituer un cube ou même qui permet d'emballer un cube en bois servant de témoin. Il pourra aussi montrer un patron de cube incorrect dont le pliage entraînerait, par exemple, la superposition de deux faces du cube.

2) <u>L'interdiction d'utiliser la règle et l'équerre</u>.

L'objectif choisi par le maître est de « faire » travailler les élèves sur le patron d'un parallélépipède rectangle.

Si l'enseignant demande aux élèves d'utiliser la règle et l'équerre pour construire les différents rectangles composant ce patron, l'essentiel de l'activité des élèves devient la construction de ces différents rectangles avec toute l'attention que cela demande ; l'agencement des faces entre elles, aspect déterminant de la compréhension de la notion de patron, passe alors au second plan.

En interdisant aux élèves de se servir de la règle et de l'équerre, il les incite à utiliser le solide initial comme gabarit pour tracer le contour de chacune de ses faces, ce qui décharge les élèves des tâches de construction et leur permet de se concentrer sur la façon dont les différents rectangles doivent être agencés pour former un patron du solide : ainsi, il focalise l'activité de l'élève sur la réalisation du patron.

3) Deux procédures utilisables par les élèves

Une procédure doit ici être considérée comme une succession d'actions permettant de réaliser un patron. On peut choisir deux procédures parmi les suivantes :

<u>Procédure **A**</u> : À partir d'une position initiale, faire basculer la boîte trois fois en respectant la direction et le sens choisi. À la première position, et pour chacune des trois autres, dessiner le contour de la face qui est en contact avec la feuille. À partir de la dernière position, basculer la boîte dans la direction perpendiculaire à la direction choisie initialement dans un sens, puis dans l'autre (après être revenu à la dernière position), ceci permet de dessiner le contour des deux faces non encore représentées.

Procédure **B** :

En choisissant de commencer par dessiner le contour de la face de la boîte se trouvant en contact avec la feuille, basculer la boîte autour de chacune des quatre arêtes de cette face, en revenant chaque fois à la position initiale, pour dessiner ainsi le contour des faces du solide qui sont adjacentes à la face initiale, autour du contour de la face initiale. Quand ces cinq faces ont été dessinées, faire subir au solide un double basculement pour amener au contact de la feuille la face opposée à la face initiale et en dessiner le contour.

Procédure **C** :

Dessiner les contours des faces les unes après les autres en imaginant que l'on « ouvre » le solide selon certaines de ses arêtes, sans forcément se livrer à un déroulement effectif du solide sur la feuille.

Procédure **D** :

On ne peut rejeter l'idée d'emballer le solide dans la feuille en essayant de ne pas la friper, en marquant par des plis qui seront repassés au crayon l'emplacement des différentes arêtes du solide. Toutefois cette dernière procédure semble plus hasardeuse que les précédentes. Elle peut être utilisée comme une première étape qui fournit un guide pour trouver une procédure plus précise.

4) Trois erreurs que l'on peut attendre des élèves

On peut choisir trois erreurs parmi les propositions suivantes :

l'élève a oublié une face du solide ;

l'élève a dessiné deux fois le contour de la même face (*le patron possède alors plus de six faces*) ;

l'agencement des faces entre elles ne permet pas le pliage (*mauvaise disposition des faces*) ;

l'agencement des faces entre elles amène une superposition de deux d'entre elles par pliage (*mauvaise disposition des faces*) ;

l'agencement des faces provoque la mise en contact, lors du pliage, de deux côtés n'ayant pas la même longueur et ne pouvant donc pas former une arête du solide (*mauvaise disposition des faces*).

5) Conclusion de l'activité.

Le maître pourrait à la fois insister sur la pluralité des patrons obtenus (réponses correctes au problème) et sur les caractéristiques communes à chacun de ces patrons.

Sa conclusion pourrait alors avoir la forme suivante : (*diapositive suivante*)

- Un patron est formé de l’assemblage de toutes les faces, comme si on « démontait » le solide pour le mettre à plat ;
- Un même parallélépipède rectangle possède plusieurs patrons différents ;
- Chacun de ses patrons comporte six faces rectangulaires deux à deux identiques ; lorsqu’on le plie, deux faces ne doivent pas se superposer ; deux côtés du patron qui se touchent lorsqu’on le plie doivent avoir la même longueur pour former une arête du solide.

Remarque. *Cette conclusion pourrait servir de base à des exercices d’application dans lesquels les élèves devraient par exemple, distinguer parmi différentes propositions de patrons, ceux qui sont des patrons corrects en anticipant par la pensée l’effet de leur pliage, le découpage et le pliage n’intervenant qu’au moment de la validation.*
Face à un patron correct, le maître pourrait leur demander de dessiner de la même couleur les rectangles correspondant à deux faces opposées sur le solide, puis d’indiquer par des flèches, ou un autre code couleur, les côtés qui viennent au contact l’un de l’autre lors du pliage pour former une arête du solide.

De la même manière, le maître pourrait demander aux élèves de compléter un patron incomplet en dessinant la ou les faces manquantes.

L’un des buts de ces différents exercices étant de favoriser l’anticipation des effets du pliage afin de développer l’articulation plan - espace chez les élèves.