NOMBRES ENTIERS et ***NUMERATION, en base 10…***
Pistes de correction des exercices et problèmes. Corrigés ***PW*** et *COPIRELEM*

EXERCICES 1 et 2 non entièrement corrigés

Exercice 1 corrigé à l'oral en TD. Une piste pour l'exercice 2.

- *Facile* : il y a dix signes distincts (les dix ***chiffres***) pour écrire tous les nombres de 0 à 9.
- Pour les mots, dressons « l'inventaire » dans un pré vert à la Prévert ! On a d'abord besoin des dix noms des chiffres : zéro, un, deux, …, huit, neuf. *Remarque* : zéro ne sert qu'à écrire 0 ! On continue : les unités de dizaines : dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante. Les « exceptions » : onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize. Le mot « et» qui nous sert beaucoup. Enfin, les mots permettant d'écrire au dessus de cent : cent(s), mille(s), million(s)et milliard(s).

Au lecteur de compter combien ça fait en tout !

EXERCICE 3

Les cinq items. *Item 16*. Pas rigolo ! ***VRAI*** pour le « 7 » et ***FAUX*** pour le « 4 » : il s'agit d'un « 5 ». Pas de méthode immédiatement « simple ». *Dommage* ! Mais, ***PW*** ne dispense pas de chercher ! Sachant que pour ceux qui ont suivi en CM1 l'exercice portant sur le « gros » dictionnaire de 1998 pages, la « technique » est identique…Item corrigé en détail pdt le TD (*avec deux propositions de solution*).

Item 40. Solution classique : on décompose « canoniquement ».
On a : $\underline{abcabc} = (abcabc)_{10} = a \times 10^5 + b \times 10^4 + c \times 10^3 + a \times 10^2 + b \times 10^1 + c \times 10^0 = a \times 10^5 + a \times 10^2 + b \times 10^4 + b \times 10^1 + c \times 10^3 + c \times 10^0 = a \times (10^5 + 10^2) + b \times (10^4 + 10^1) + c \times (10^3 + 10^0) = a \times 100100 + b\ 10010 + c \times 1001$. C'est déjà ça ! Maintenant, ce serait super que 1001 soit divisible par 13 : on teste, et ça « marche ». En effet, on a : $1001 = 13 \times 77$. On a alors une somme de trois nombres divisibles par 13 (*à écrire*), donc la proposition est ***VRAIE***.

Item 41. Attention à la formulation ! C'est ***FAUX*** ! Mais, il n'y a pas de retenue quand même. Why ? Est-il possible de trouver une somme de deux *chiffres* qui soit égale à 19 (*rappel de la petite musique : « je pose 9 et je retiens 1 »*) ? Et donc ?

Item 20. ***VRAI***. Soit n le nombre d'élèves dans la classe et a l'âge majoritaire. On peut traduire l'énoncé par : $(n - 9) \times a + 7 \times (a + 1) + 2 \times (a - 1) = 324$. Modélisation algébrique, certes, mais on peut aussi effectuer des tests par « essais-erreurs-ajustements » : technique qui va avoir de l'avenir !
D'où $n \times a + 5 = 324$. Ou encore $n \times a = 324 - 5 = 319$.
Or, n et a sont des nombres entiers et les seuls diviseurs de 319 sont 1, 11, 29 et 319. Par rapport au contexte du problème, seule la décomposition $319 = 11 \times 29$ est à retenir. Sachant qu'il s'agit d'une classe de collège, c'est donc a qui prend la valeur 11 et n la valeur 29 : l'âge majoritaire est 11 ans et la classe compte 29 élèves. *Vérification* : $20 \times 11 + 7 \times 12 + 2 \times 10 = 324$.

Item 24. **FAUX**, erreur dans l'écriture du nombre : il s'agit de $2520 = 5 \times 7 \times 8 \times 9$. Une technique élémentaire : on écrit le produit de tous les nombres de 1 à 10 et on « discute » de ceux qu'il faut garder. Mais il y a plus subtil : 2250 n'est pas divisible par 4 et donc il n'est pas « bon » !

EXERCICE 4

1. et 2. Dans les conditions de l'exercice, le plus petit nombre est 4321 et le plus grand est 9876. Why ? *Facile : pour cet item, il est obligatoire de ramasser les 0,25pt !*

3. *Facile aussi.* Le chiffre des unités de mille est 6. On joue sur les autres chiffres, en respectant les conditions sur les chiffres, d'où les dix solutions : 6543, 6542, 6541, 6532, 6531, 6521, 6432, 6431, 6421, 6321. *On peut dessiner un arbre de choix ou toute autre représentation…*

4. *Classique* : décomposition canonique, la clef ! On a : $\mathbf{N} = 1000m + 100c + 10d + u$ et $\mathbf{M} = 1000u + 100d + 10c + m$. D'où $\mathbf{D} = \mathbf{N} - \mathbf{M} = 1000 \times (m - u) + 100 \times (c - d) + 10 \times (d - c) + (u - m)$.
Petit « bricolage » de signe : $\mathbf{D} = 1000 \times (m - u) + 100 \times (c - d) - 10 \times (c - d) - (m - u)$
Finalement : $\mathbf{D} = 999 \times (m - u) + 90 \times (c - d)$ (Expression algébrique réduite de **D**).

5. On peut mettre 9 en facteur dans l'expression trouvée ci-dessus, on a alors : $\mathbf{D} = 9 \times [111 \times (m - u) + 10 \times (c - d)]$; avec $(m - u)$ et $(c - d)$ entiers naturels (car $m > u$ et $c > d$), donc : $111 \times (m - u) + 10 \times (c - d)$ est un entier naturel. Le nombre **D** est donc un multiple de 9 (ou (*vocabulaire*) : 9 est un diviseur de **D**).

6. Valeur maximale de **D**. Le nombre **D** est maximum quand les nombres $(m - u)$ et $(c - d)$ sont maximum (soient les écarts respectifs entre m et u d'une part et c et d d'autre part maximum).

Il faut d'abord choisir le nombre $(m - u)$ maximum car il est multiplié par 111, supérieur à 10. Compte tenu de la condition $m > c > d > u$, $(m - u)$ varie entre 8 et 3, la valeur maximale est obtenue pour $m = 9$, $u = 1$. La valeur maximale de la différence $(c - d)$ est alors de 6, obtenue pour $c = 8$, $d = 2$. Le nombre **D** est alors égal à $9 \times ((111 \times 8) + (10 \times 6))$ soit : $\mathbf{D} = 8532$, ce qui correspond à $\mathbf{N} = 9821$.

7. Valeur minimale de **D**.

Le nombre **D** est minimum pour les écarts minimum de (***m*** – ***u***) et de (***c*** – ***d***) ; soit, compte tenu de la condition ***m*** > ***c*** > ***d*** > ***u***, pour ***m*** – ***u*** le nombre 3 et pour ***c*** – ***d*** le nombre 1. Cela engendre plusieurs cas possibles.

La valeur de **D** est alors $(999 \times 3) + (90 \times 1)$, soit **D** = 3087.

Les cas possibles sont obtenus à chaque fois que les chiffres du nombre **N** sont consécutifs, ce qui donne six solutions : **N** = 9876 ou **N** = 8765 ou **N** = 7654 ou **N** = 6543 ou **N** = 5432 ou **N** = 4321.

EXERCICE 5

Note de *PW* : exercice qui peut aussi avoir sa place dans le domaine des grandeurs et des conversions…

Valeur d'une toise ***T*** en pieds ***P***. Soient ***T***, ***P***, ***Po*** les longueurs respectives de la toise, du pied et du pouce. On a donc les égalités de longueurs suivantes : (*a*) 3***T*** + 2***P*** = 240 ***Po*** et (*b*) 5***T*** + 1***P*** = 372 ***Po***. On dispose ainsi de *deux* équations avec *trois* inconnues, zut ! On va quand même essayer de s'en sortir.

- *Méthode 1* : Résolution algébrique, comme dans le temps…

Par combinaison linéaire en éliminant les ***Po*** :
On cherche le PPCM de 240 et de 372.
$240 = 2^4 \times 3 \times 5$ et $372 = 2^2 \times 3 \times 31$. D'où : PPCM (240, 372) = $2^4 \times 3 \times 5 \times 31 = 7440$
En multipliant l'équation (*a*) par 31 et l'équation (*b*) par 20, on obtient :
93***T*** + 62***P*** = 7440***Po*** et 100***T*** + 20***P*** = 7440***Po***
D'où 93***T*** + 62***P*** = 100***T*** + 20***P***, ce qui donne : 7***T*** = 42***P*** c'est-à-dire : ***T*** = 6***P***.
Finir le raisonnement et les calculs, au cas où !

- *Méthode 2* : Résolution arithmétique, solution préférée par ***PW*** !

On a : 10 toises et 2 pieds valent 744 pouces ; 3 toises et 2 pieds valent 240 pouces, donc 7 toises valent la différence entre 744 pouces et 240 pouces soit 504 pouces.

Ainsi une toise vaut 72 pouces.

Comme 10 toises et 2 pieds valent 744 pouces, alors 5 toises et 1 pied valent 372 pouces et un pied vaut la différence entre 372 pouces et 5 toises soit la différence entre 372 pouces et 5 fois 72 pouces.

Un pied vaut donc 12 pouces.

Une toise vaut donc en pieds 12 fois moins de pieds que de pouces soit 6 pieds.

2. a) Longueur en mètres d'un pied

On a la conversion : 1***Po*** = 0,027m
Recherchons tout d'abord la relation entre pouces et pieds

- *Méthode 1* : méthode dite par combinaison linéaire, ça rappelle le bon temps du collège !

Par combinaison linéaire en faisant disparaître les toises.
3***T*** + 2***P*** = 240***Po*** ; soit 15***T*** + 10***P*** = 1200***Po***
5***T*** + 1***P*** = 372***Po*** ; soit 15***T*** + 3***P*** = 1116***Po***. D'où 7***P*** = 84***Po*** et donc : ***P*** = 12***Po***.

- *Méthode 2* : utilisation de la question précédente

La relation entre pied et pouce a pu être obtenue directement (*bien que non demandée*) à la question précédente (*Cf. méthode 2*). ***P*** = 12***Po***
Ainsi ***P*** = 12 × 0,027m = 0,324m. Un pied vaut donc 0,324 mètre.

2. b) Taille du soldat. Deux méthodes, à étudier…

- *Méthode 1*. Un pied vaut 0,324 mètre. Donc 1,7 mètre contient 5 pieds (car 5 × 0,324 m = 1,62 m) et il reste 0,08 mètre, à convertir dans l'unité « en dessous ».

Comme 0,027 m = 1***Po***, on a alors : 0,08 m = (0,08/0,027)***Po***, soit environ 3 pouces.
La taille du soldat est donc, par excès au pouce près, de 5 pieds et 3 pouces.

- *Méthode 2*. On a : 0,027m = 1***Po***. Un pouce vaut donc 27 millièmes de mètres soit 27 millimètres. La taille du soldat est en millimètres de 1700 mm.

On a l'égalité : 1700 mm = (62 × 27 mm) + 3 mm
Donc une longueur de 1,7 mètre(s) équivaut à 62 pouces et 26/27 pouces.
Comme un pied vaut 12 pouces et que 62 = (12 × 5) + 2 sa taille est donc de 5 pieds 2 pouces et 26/27 pouces. (*Il en manque un tout petit peu pour le troisième pouce !*).

Conclusion : la taille du soldat est, par excès au pouce près, de 5 pieds 3 pouces. Idem réponse de la *méthode 1*, heureusement !

EXERCICE 6

Multiples de 17 parmi les trois nombres : 4 316, 17 034 et 68 901. Il n'y a pas de critère *mnémotechniquement simple !* de divisibilité par 17. Mais il y en a et donc « attisation » de curiosité ?

• Pour 4 316, une piste : « poser à la main » la division euclidienne (*procédure dite de « partage des groupements de numération »*). A « faire », c'est-à-dire à poser !
On trouve : $4316 = (17 \times 253) + 15$, 4316 n'est donc pas divisible par 17, puisque le reste (15) de la division n'est pas égal à 0, avec $15 < 17$.

• Pour 17034, inutile de « poser » la division euclidienne, why ? En effet : 17000 est divisible par 17 et 34 également, donc 17034 est divisible par 17, comme somme de deux entiers divisibles par 17. On a : $17034 = (1000 \times 17) + (2 \times 17)$; $17034 = (1000 + 2) \times 17$; $17034 = 1002 \times 17$.

• Pour 68901, on peut de nouveau « poser » la division euclidienne (*procédure dite des « meilleurs multiples »*). A faire ! On a : $68901 = 17 \times 4053$.
68901 est donc divisible par 17, puisque le reste de la division est 0.
<u>*Autre méthode pour 68901*</u> : observer que $68 = 4 \times 17$ (<u>*Calcul mental !*</u> Donc $68000 = 4000 \times 17$), puis effectuer la division euclidienne de 901 par 17 : $901 = 53 \times 17$.

2. a) En partant de 23584 et en faisant des sauts de 17, la puce peut-elle atteindre la case 23692 ?
Si la puce peut atteindre le nombre 23692, c'est que la différence entre ce nombre et le nombre de départ est un multiple de 17. Est-ce le cas ?
$23692 - 23584 = 108$ et $108 = (6 \times 17) + 6$. 108 n'est donc pas un multiple de 17.
Ceci peut être obtenu :

- par un calcul mental $17 \times 2 = 34$; $17 \times 4 = 68$; $17 \times 6 = 102$,
- ou bien en « posant » la division euclidienne de 108 par 17,
- ou par tout autre calcul du type « enlever des multiples de 17 à 108 »...

<u>*Conclusion*</u>. En partant de 23584 et en faisant des sauts de 17, la puce n'atteindra pas 23692.

<u>*Autre méthode*</u>. Les deux nombres étant proches, il est possible d'écrire la suite des cases atteintes par la puce en partant de 23584 :

23601 ; 23618 ; 23635 ; 23652 ; 23669 ; 23686 ; 23703.

Or $23686 < 23692 < 23703$, d'où la conclusion : la puce n'atteindra pas 23692.

2. b) En partant de 2688 et en faisant des sauts de 17, la puce peut-elle atteindre la case 40598 ? Si la puce peut atteindre le nombre 40598, c'est que la différence entre ce nombre et le nombre de départ est un multiple de 17. Est-ce le cas ? On a : $40598 - 2688 = 37910$ et $37910 = 2230 \times 17$.
Ceci peut être obtenu en « posant » la division euclidienne de 37910 par 17.
Donc en partant de 2688 et en faisant des sauts de 17, la puce atteindra 40598.

Procédé général permettant de prévoir s'il est possible d'atteindre $\boldsymbol{b}$ à partir de $\boldsymbol{a}$, en faisant des sauts de 17. Pour prévoir de façon générale si la puce peut atteindre $\boldsymbol{b}$ en partant de $\boldsymbol{a}$ et en faisant des sauts de 17, il suffit de vérifier si $(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$ est ou non divisible par 17.

Si le reste de la division euclidienne de $(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$ par 17 est 0, c'est-à-dire si $(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$ est divisible par 17, la puce peut atteindre b en partant de a.
Si le reste de cette division est différent de 0, c'est-à-dire si $(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$ n'est pas divisible par 17, la puce ne peut pas atteindre $\boldsymbol{b}$ en partant de $\boldsymbol{a}$.

Montrons que ce procédé général est vrai :

➢ <u>*Premier cas*</u> : $(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$ multiple de 17, il existe donc $\boldsymbol{k}$ entier naturel tel que $(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = 17 \times \boldsymbol{k}$. C'est-à-dire : $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (17 \times \boldsymbol{k})$.
En partant de $\boldsymbol{a}$, le nombre $\boldsymbol{b}$ est donc atteint par la puce en $\boldsymbol{k}$ sauts.

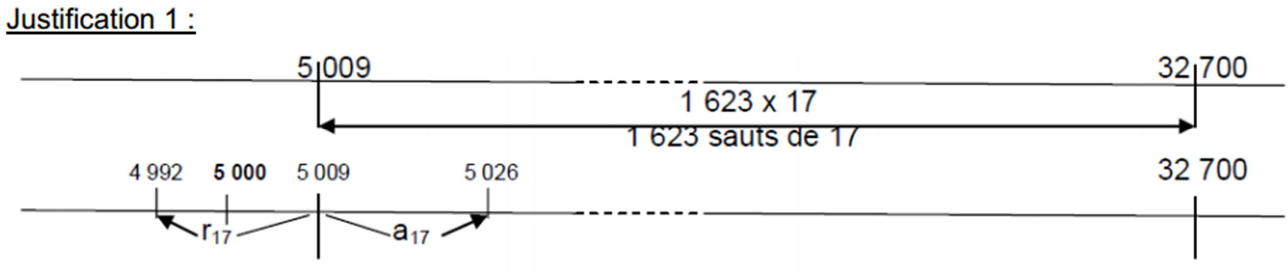
➢ <u>*Deuxième cas*</u> : $(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$ n'est pas multiple de 17, il existe $\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{r}$ entiers naturels, avec $\boldsymbol{r} \neq 0$ et $\boldsymbol{r} < 17$ tels que : $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = (17 \times \boldsymbol{k}) + \boldsymbol{r}$, c'est-à-dire : $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (17 \times \boldsymbol{k}) + \boldsymbol{r}$.
En partant de $\boldsymbol{a}$, la puce atteint en $\boldsymbol{k}$ sauts le nombre $\boldsymbol{a} + (17 \times \boldsymbol{k})$ qui précède le nombre $\boldsymbol{b}$, puis, au saut suivant, le nombre $\boldsymbol{a} + (17 \times \boldsymbol{k}) + 17$ qui suit le nombre $\boldsymbol{b}$ car $\boldsymbol{r} < 17$. Elle n'atteindra donc jamais le nombre $\boldsymbol{b}$.

4. a) Plus petit entier naturel à partir duquel, en faisant des sauts de 17, la puce peut atteindre 52200. En « posant à la main» la division euclidienne ou en effectuant tout autre calcul correct, on a : $52200 = (3070 \times 17) + 10$.

Comme $10 < 17$, le plus petit entier naturel point de départ possible de la puce est donc 10 pour atteindre 52200.

4. b) Case la plus « proche » de 5000 d'où la puce doit partir pour atteindre effectivement 32600.

➢ <u>*Méthode 1*</u> : division euclidienne de $(32600 - 5000)$ par 17. On a : $32600 - 5000 = 27600$ et $27600 = (1623 \times 17) + 9$. D'où $32600 - 5000 = (1623 \times 17) + 9$ et $32600 - (1623 \times 17) = 5009$.



Les nombres 4992 et 5009 sont donc des « points de passage » de la puce.
Le nombre 4992 est à une « distance » 8 de 5000. Le nombre 5009 est à une « distance » 9 de 5000. La case la plus proche de 5000 est donc 4992.

Justification 2 :

Entre deux multiples successifs, il y a un écart de 17, or le reste est 9 et 17 = 9 + 8 et 8 < 9. On a : 17 × 1623 n'est donc pas le multiple de 17 le plus proche de 27600. La case demandée porte donc le numéro 32600 – (17 × 1624) soit 4992.

Méthode 2 : division euclidienne de 32600 par 17. On effectue la division euclidienne de 32600 par 17, son reste est 11 : 32600 = (1917 × 17) + 11. Tous les nombres de la forme (17 × ***k***) + 11 sont atteints par la puce. On cherche donc le nombre de la forme (17 × ***k***) + 11, le plus proche de 5000, en effectuant la division euclidienne de 5000 par 17 : 5000 = (294 × 17) + 2, donc 5009 = (294 × 17) + 11 et 4 992 = (293 × 17) + 11. *Ouf ! Quel exercice !*

Deuxième fiche d'exercices

FICHE n° 2. EXERCICE 1 : un grand classique du CRPE !

1) Obtenir l'écriture en base **dix** d'un nombre dont on connaît l'écriture en base **b.**

✓ $(\mathbf{6521})_{\mathrm{SEPT}} = \mathbf{6} \times 7^3 + \mathbf{5} \times 7^2 + \mathbf{2} \times 7^1 + \mathbf{1} \times 7^0 = \ldots = 2058 + 245 + 14 + 1 = \mathbf{2318}$.

✓ $(\mathbf{1100101})_{\mathrm{DEUX}} = \mathbf{1} \times 2^6 + \mathbf{1} \times 2^5 + \mathbf{0} \times 2^4 + \mathbf{0} \times 2^3 + \mathbf{1} \times 2^2 + \mathbf{0} \times 2^1 + \mathbf{1} \times 2^0 = \ldots = 64 + 32 + 4 + 1 = \mathbf{101}$.

✓ $(\mathbf{231})_{\mathrm{DOUZE}} = \mathbf{2} \times 12^2 + \mathbf{3} \times 12^1 + \mathbf{1} \times 12^0 = \ldots = 288 + 36 + 1 = \mathbf{325}$.

✓ $((\mathbf{24})(\mathbf{8})(\mathbf{54})(\mathbf{1}))_{\mathrm{SOIXANTE}} = \mathbf{24} \times 60^3 + \mathbf{8} \times 60^2 + \mathbf{54} \times 60^1 + \mathbf{1} \times 60^0 = \ldots = \mathbf{5\,216\,041}$. (*A contrôler !*).

2) Obtenir l'écriture en base **b** d'un nombre dont on connaît l'écriture en base **dix.**

✓ 119 = ? en base **trois**. On écrit les puissances successives de trois : 1, 3, 9, 27, 81, 243, … On décompose 119 comme combinaison additive de puissances de trois : 119 = 81 + 27 + 9 + 2, c'est à dire : $119 = \mathbf{1} \times 3^4 + \mathbf{1} \times 3^3 + \mathbf{1} \times 3^2 + \mathbf{0} \times 3^1 + \mathbf{2} \times 3^0 = (\mathbf{11102})_{\mathrm{TROIS}}$. *Remarque : on a proposé une autre technique en **CM**, à revoir.*

✓ 2001 = ? en base **deux**. (*Ca va faire long !*) Même technique que ci-dessus : on écrit les puissances successives de deux : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, … On décompose 2001 comme combinaison additive de puissances de deux, en utilisant par exemple des soustractions successives. 2001 – 1024 = 977, 977 – 512 = 465, 465 – 256 = 209, 209 – 128 = 81, 81 – 64 = 17, 17 – 16 = 1. *Stop*. On a donc 2001 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 16 + 1, c'est à dire $2001 = \mathbf{1} \times 2^{10} + \mathbf{1} \times 2^9 + \mathbf{1} \times 2^8 + \mathbf{1} \times 2^7 + \mathbf{1} \times 2^6 + \mathbf{0} \times 2^5 + \mathbf{1} \times 2^4 + \mathbf{0} \times 2^3 + \mathbf{0} \times 2^2 + \mathbf{0} \times 2^1 + \mathbf{1} \times 2^0$. D'où la réponse : $2001 = (\mathbf{11111010001})_{\mathrm{DEUX}}$. A contrôler, des fois où il y aurait trop de zéros et pas assez de uns ou … !

✓ (*Pas de calcul pour les deux items suivants, à faire*) $144 = (\mathbf{100})_{\mathrm{DOUZE}}$ et $144 = (\mathbf{121})_{\mathrm{ONZE}}$

EXERCICE 2.

1) 144 s'écrit **(100)** en base **douze** (voir item précédent).

2) $(\mathbf{1000})_{\mathbf{DOUZE}} = \mathbf{1} \times 12^3 + \mathbf{0} \times 12^2 + \mathbf{0} \times 12^1 + \mathbf{0} \times 12^0 = 1728 + 0 + 0 + 0 = \mathbf{1728}$.

3) $(\mathbf{a})_{\mathbf{DOUZE}} = (10)_{\mathbf{DIX}}$, $(\mathbf{b})_{\mathbf{DOUZE}} = (11)_{\mathbf{DIX}}$ et $(\mathbf{ab})_{\mathbf{DOUZE}} = 10 \times 12^1 + 11 \times 12^0 = 120 + 11 = 131$. Attention donc à ne pas confondre $(\mathbf{ab})_{\mathbf{DOUZE}}$ avec le produit de $(\mathrm{a})_{\mathbf{DOUZE}}$ par $(\mathrm{b})_{\mathbf{DOUZE}}$. Justement : $(\mathbf{a})_{\mathbf{DOUZE}} \times (\mathbf{b})_{\mathbf{DOUZE}} = 10 \times 11 = 110$.

EXERCICE 3.

1) Comparer, sans « convertir », $\mathbf{A} = (\mathbf{10234})_{\mathbf{CINQ}}$ et $\mathbf{B} = (\mathbf{231})_{\mathbf{DOUZE}}$. Il suffit de comparer : 1×5^4 et 2×12^2. Or $1 \times 5^4 = 625$ et $2 \times 12^2 = 288$, $288 < 625$, c'est à dire : $\boxed{\mathbf{B < A}}$. Attention, on a $\mathbf{B} < 3 \times 12^2 = 423$ ((2×12^2 + n'importe quelle combinaison avec des 12^1 et des $12^0 < 3 \times 12^2$), car **B** « commence » par 2, on a mieux en terme d'approximation entière !

2) Pour répondre à cette question, on peut poser et effectuer l'opération en colonnes, comme pour une addition ordinaire ; on peut aussi utiliser une modélisation algébrique de la situation. On décompose et on résout une équation !

$1 \times a^2 + 1 \times a^1 + 3 \times a^0 = (2 \times a^1 + 1 \times a^0) + (3 \times a^1 + 2 \times a^0)$. Ce qui donne : $\mathbf{a^2 + a + 3 = 5a + 3}$; $a^2 - 4a = 0$; $\mathbf{a \times (a - 4) = 0}$, les deux solutions de cette équation sont 0 et 4 ; on ne garde que la solution $\boxed{\mathbf{a = 4}}$, car une base ne peut être nulle.

3) Même technique pour l'existence ou non de la base **b** de cette question. On peut toujours poser et effectuer l'opération comme d'habitude. … On aboutit à l'équation : $3b + 8 = 4b + 3$ dont la solution est $\mathbf{b = 5}$. Solution à rejeter, car en base 5, le « chiffre » 6 n'existe pas. Donc, **il n'y a pas de solution**.

4) Même technique …

$8 \times w^1 + 2 \times w^0 = 3 \times (2 \times w^1 + 8 \times w^0)$. Ce qui donne : $\mathbf{8w + 2 = 6w + 24}$; $2w = 22$; $\boxed{\mathbf{w = 11}}$.

Vérification[1] : $(82)_{\mathrm{ONZE}} = 8 \times 11^1 + 2 \times 11^0 = 88 + 2 = 90$.

$3 \times (28)_{\mathrm{ONZE}} = 3 \times (2 \times 11^1 + 8 \times 11^0) = 3 \times (22 + 8) = 3 \times 30 = 90$.

EXERCICE 4.

Exploitation des informations, *step by step*.

(i) Comme **W** est à la fois multiple de 9 et de 5 dans la base **dix**, il est donc multiple de $9 \times 5 = 45$, puisque les nombres 9 et 5 sont premiers entre eux. Le nombre **W** est donc dans la table de multiplication de 45 (0, 45, 90, 135, 180, 225, 270, 315, 360, 405, 450, 495, …).

(ii) On sait aussi que $W_{\mathbf{quatre}}$ s'écrit avec cinq chiffres, donc on a la double inégalité : $(10000)_{\mathbf{quatre}} < W_{\mathbf{quatre}} < (33333)_{\mathbf{quatre}}$. En effet, $(10000)_{\mathbf{quatre}}$ est le plus petit nombre à cinq chiffres en base **quatre** et $(33333)_{\mathbf{quatre}}$ est le plus grand nombre à cinq chiffres en base **quatre**.

Ce qui donne en convertissant en base **dix** :

$\mathbf{1} \times 4^4 + \mathbf{0} \times 4^3 + \mathbf{0} \times 4^2 + 0 \times 4^1 + \mathbf{0} \times 4^0 < \mathbf{W} < 3 \times 4^4 + 3 \times 4^3 + 3 \times 4^2 + 3 \times 4^1 + 3 \times 4^0$. Après calculs, on obtient l'encadrement suivant : $\boxed{256 < \mathbf{W} < 1023}$. (♥)

(iii) On sait aussi que $\mathbf{W}_{\mathbf{sept}}$ s'écrit avec trois chiffres, donc on a la double inégalité : $(100)_{\mathbf{sept}} < \mathbf{W}_{\mathbf{sept}} < (666)_{\mathbf{sept}}$. Pour les mêmes raisons que ci-dessus : on s'intéresse au plus petit nombre et au plus grand nombre possédant trois chiffres dans la base **sept**. Ce qui donne en convertissant en base **dix** :

$\mathbf{1} \times 7^2 + \mathbf{0} \times 7^1 + \mathbf{0} \times 7^0 < \mathbf{W} < \mathbf{6} \times 7^2 + \mathbf{6} \times 7^1 + \mathbf{6} \times 7^0$. Après calculs, on obtient : $\boxed{49 < \mathbf{W} < 342}$. (♠)

On a bien avancé. De (♥) et de (♠), on peut restreindre le domaine des nombres pouvant répondre à la question. On a : $256 < \mathbf{W} < 342$. En se reportant à la liste fournie à l'item (i), deux nombres conviennent : **270** (= 6 × 45) et **315** (= 7 × 45).

(iv) Pour conclure, on exploite la dernière information : la somme des chiffres est égale à (11) en base **cinq**. D'où une piste de solution : on convertit les nombres 270 et 315 en base **cinq**. On obtient, par toute bonne méthode de conversion (« suite » de divisions, décompositions suivants les puissances de cinq ou autre …) : $270 = 2 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 0 \times 5^0 = (2040)_{\mathbf{cinq}}$ et $315 = 2 \times 5^3 + 2 \times 5^2 + 3 \times 5^1 + 0 \times 5^0 = (2230)_{\mathbf{cinq}}$. Calculs de la somme des chiffres en base **cinq** : $2 + 0 + 4 + 0 = 6 = 5 + 1 = (11)_{\mathbf{cinq}}$ et $2 + 2 + 3 + 0 = 7 = 5 + 2 = (12)_{\mathbf{cinq}}$. D'où la solution : $\boxed{\mathbf{W} = 270}$.

*Il reste de la place sur cette page, **PW** en profite pour proposer un autre exercice !*

<u>Enoncé</u>. En base **quinze**, on utilise les quinze chiffres suivants : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, **a**, **b**, **c**, **d** et **e**.
Sans utiliser, ni passer par la base **dix**, dire si les affirmations suivantes sont correctes ou pas.

1. Le nombre suivant de $(9\mathbf{dee})_{\mathbf{quinze}}$ est $(\mathbf{ae}00)_{\mathbf{quinze}}$.
2. Une addition : $(\mathbf{ddd})_{\mathbf{quinze}} + (111)_{\mathbf{quinze}} = (\mathbf{eee})_{\mathbf{quinze}}$.
3. Une autre addition : $(1\mathbf{bde})_{\mathbf{quinze}} + (9521)_{\mathbf{quinze}} = (10110)_{\mathbf{quinze}}$.

<u>Pistes de solution</u>.

1. En base **quinze**, la suite des nombres s'écrit : 0 ; 1; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; **a** ; **b** ; **c** ; **d** ; **e** ; (10) ; (11) ; (12) ; (13) ; (14) ; (15) ; (16) ; (17) ; (18) ; (19) ; (1**a**) ; (1**b**) ; (1**c**) ; (1**d**) ; (1**e**) ; (20) ; (21) ; etc. Pour ceux qui veulent s'amuser, ils peuvent continuer cette comptine !

Ainsi le suivant de $(9\mathbf{dee})_{\mathbf{quinze}}$ est $(9\mathbf{e}00)_{\mathbf{quinze}}$. Opération posée comme d'habitude, même en calculant en base **quinze** !

		1 (*retenue*)	1 (*retenue*)	
	9	**d**	**e**	**e**
+				1
=	9	**e**	0	0

Donc, l'affirmation 1. est fausse. L'erreur vient du fait qu'on a ajouté 1 au chiffre du quatrième rang, or il n'y a pas de retenue pour ce rang.

2. Addition « juste ». Soit on pose l'opération comme ci-dessus ; soit plus rapidement, on sait que $\mathbf{d}_{\mathbf{quinze}} + 1_{\mathbf{quinze}} = \mathbf{e}_{\mathbf{quinze}}$, et on applique trois fois cette égalité.
3. Addition « fausse ». Le résultat est : $(\mathbf{b}210)_{\mathbf{quinze}}$.

	1 (*retenue*)	1 (*retenue*)	1 (*retenue*)	
	1	**b**	**d**	**e**
+	9	5	2	1
=	**b**	2	1	0

*Pour **<u>contrôler</u>** ces réponses, rien n'empêche de repasser par la base **dix**, même si l'énoncé l'interdit : on vérifie les calculs !*

Les numéros des plaques d'immatriculation

Partie Mathématique.

1. Du premier numéro **AA – 001 – AA** au numéro **AA – 999 – AA**, il y a 999 véhicules immatriculés. Donc du numéro **AA – 001 – AA** au numéro **AA – 999 – AZ**, on immatricule 26 « paquets » de 999 véhicules (*il y a 26 lettres de l'alphabet*). On a : $26 \times 999 = 25\,974$, pour qu'une plaque porte le numéro **AA – 999 – AZ**, on doit immatriculer **25 974 véhicules**.

2. On poursuit le décompte, le numéro qui suit **AA – 999 – AZ** est **AA – 001 – BA**. Avec le couple de droite (« couple » **BA**), on immatricule encore 999 véhicules. Puis encore 999 avec le couple **BB**, puis 999 avec le couple **BC**. A ce moment, on en est à : $25\,974 + 3 \times 999 = 28\,971$ immatriculations. On ajoute ensuite les 11 immatriculations qui vont du numéro **AA** – **001** – **BD** à **AA** – **011** – **BD**.
<u>*Conclusion*</u> : 28 971 + 11 **= 28 982**. Ca marche ou CQFD comme on écrivait dans le temps !

3. Même principe de décompte, cette fois-ci avec les 26 paquets à chaque fois. En effet, de **AA – … – BA** à **AA – … – BZ**, il y a 26×999 immatriculations ; de **AA – … – BA** à **AA – … – ZZ**, il y a 25 séries de 26 paquets de 999 immatriculations. Ensuite, il n'y a plus de numéro commençant par **AA**, le véhicule suivant est alors immatriculé comme suit : **AB** – **001** – **AA**.
Il n'y a plus qu'à faire le total : $25\,974 + 25 \times 26 \times 999 = 26 \times 999 + 25 \times 26 \times 999 = 26 \times 26 \times 999 = \mathbf{675\,324}$.

4. *Là, on va jongler avec des millions, si ça pouvait être des euros* !!! On utilise les résultats calculés les questions précédentes.
Du numéro **AA – 001 – AA** au numéro **AB – 001 – AA**, il y a 675 324 véhicules immatriculés. On continue.
Du numéro **AB – 001 – AA** au numéro **AC – 001 – AA**, il y a encore 675 324 véhicules immatriculés.
Du numéro **AZ – 001 – AA** au numéro **BA – 001 – AA**, on immatricule encore et toujours 675 324 véhicules. Ce qui nous fait un total de $26 \times (26)^2 \times 999 =$ **17 558 424**.
On termine le décompte : de **BA – 001 – AA** à **ZZ – 999 – ZZ**, on multiplie par 26 le total précédent, on obtient alors le nombre impressionnant de : **456 519 024**. En immatriculant 7 millions de véhicules par an, on divise 456 519 024 par 7 pour trouver la durée avant épuisement du système. On a : $\mathbf{456 \div 7 \approx 65}$. On possède une bonne approximation de la durée d'épuisement du nouveau système : un peu plus de **65** ans (*en faisant l'hypothèse que le parc des véhicules ne se renouvelle pas, hypothèse peu crédible !*).

Questions complémentaires.

5. Un principe : on demande deux procédures ou méthodes de résolution de la tâche, donc on en donne deux, distinctes, même si elles peuvent avoir des points communs (*et heureusement, puisqu'elles répondent au même problème !*).

- *Une première procédure*. Ecrire, puis dénombrer les cas possibles, en les passant en revue dans l'ordre. Il y a 26 dossiers numérotés de **A** à **Z**, de même, il y a 26 dossiers numérotés de **AA** à **AZ**, on continue, 26 dossiers de **BA** à **BZ**, idem de **CA** à **CZ**, idem de **DA** à **DZ** et enfin 14 dossiers de **EA** à **EN** (*N étant la quatorzième lettre de l'alphabet*).
On calcule alors la somme $26 + 26 + 26 + 26 + 26 + 14 = 144$.
- *Une deuxième procédure*. On modélise et on « optimise ». Chaque paquet de dossiers en contient 26, il y a 5 paquets complets, il y a donc $5 \times 26 = 130$ dossiers. On s'intéresse maintenant aux dossiers commençant par la lettre **E** : de **EA** à **EN**, il y en a 14. Conclusion : $5 \times 26 + 14 = 130 + 14 = 144$.

Commentaires. Résoudre le problème en tant que PE, avant de s'intéresser aux productions des élèves dans ce type de ***Questions Complémentaires****, est essentiel. On se l'approprie, on cherche plusieurs pistes et on se prépare efficacement à analyser les productions des élèves.*

6. De façon pratique, on peut présenter les réponses à cette question dans un tableau synthétique. Cela facilite en même temps la lecture et la correction de la production. C'est apprécié des correcteurs ! Allons-y pour un tableau.

Binômes d'élèves	Explicitation des procédures	Hypothèses sur les erreurs et interprétation
Maureen et **Justine**	• Choix d'une représentation figurée et schématique. • Dénombrement de chaque paquet de dossiers et de chaque nombre de dossiers par paquet. • Calculs : trois opérations posées, mais réponse fausse. • Une phrase de conclusion, avec faute d'ortograf !	• Schématisation, dénombrements et calculs corrects. • L'opération 14 + 12 induit les élèves en erreur. *Hypothèse* : « contrôle » ou vérification du fait qu'il y a bien 26 dossiers dans ce paquet, 14 jusqu'à **EN** et donc 12 pour aller à **EZ** • *Hypothèse* : Perte de l'information ou du sens du problème ? …

Pauline et **Elise**	• Pas de dessin ou de schématisation. • Procédure « minimaliste » : présence de deux opérations et d'une phrase de conclusion, avec la même faute d'ortograf !	• Pas d'erreur. … *Attention à ne pas se laisser « emballer ».*
Lou et **Charline**	• Représentation schématique et ordonnée, sans « dessin » pour un dénombrement par paquets de dossiers. • Additions(s) posée(s) en colonnes. • Phrase de conclusion, avec la même faute d'ortograf !	• Dénombrement poussé trop « loin » : jusqu'aux lettres F et G. • Comment interpréter chaque « 26 + 26 » ? • On a : $170 = 6 \times 26 + 14 \neq 12 \times 26 + 2 \times 14$; comment lire ce calcul ? …
Alex et **François**	• Présence de plusieurs calculs (justes), sous différentes dispositions. • Pas d'explicitation de ces calculs.	• Oubli d'un paquet de 26 dossiers. … *Attention à ne pas se laisser « emballer ».*

7. Quelques hypothèses sur un probable bénéfice pour les élèves. Acte volontaire du maître : il va utiliser les productions des élèves pour exploiter positivement ce qui est correct et montrer en même temps des limites à certaines productions : le choix de **Lou** et **Charline** est ici pertinent.

✧ On a une procédure qu'on qualifie parfois de procédure « mixte » : elle peut s'interpréter en disant qu'elle est à mi-chemin entre une procédure plutôt de nature figurative (**Maureen** et **Justine**) et des procédures plus nettement calculatoires (**Pauline** et **Elise**, **Alex** et **François**). Hypothèse sur le bénéfice : explicitations du ou des raisonnements conduisant aux calculs, plus économiques, mais pas toujours immédiats.
✧ Autre hypothèse : erreur(s) plus facile(s) à pointer et à analyser pour les élèves.

8. Mise en évidence et mise à l'épreuve d'une procédure « experte ». En effet, le nouveau problème se résout de la même façon que le précédent. Par contre, si on veut représenter les paquets, là, on risque d'être rapidement dépassé par la quantité de « dessins » à produire, sans augurer des erreurs liées aux différents dénombrements. De plus, si on se restreint uniquement à n'effectuer que des additions, on doit calculer une somme de 18 termes, ce qui est aussi source d'erreurs.

Conclusion. On a ici un exemple d'effet produit par une modification d'une **variable** dite **didactique** du problème.
✧ Le nouveau problème modifie la connaissance mathématique : passage « nécessaire » d'une addition répétée à la multiplication.
✧ Le nouveau problème modifie la « quantité » de travail (*calculs plus difficiles*).
✧ En modifiant cette « quantité » de travail, le nouveau problème n'est cependant pas plus difficile que le premier. C'est au niveau du traitement des informations qu'un effort de nature cognitive est demandé.

Encore un peu de place sur cette page, bon, alors un petit dernier pour la route !

ENONCE. Quel(s) nombre(s) se cache(nt) derrière cette « information » ? Un nombre entier naturel **W** est composé de trois chiffres dont le produit est 120 et la somme 16.

QUESTIONS.
1) Montrer que **W** ne contient ni 0, ni 1 et ni 2. *Piste de solution*. On note **W** = (**abc**) = **abc** avec les doubles inégalités suivantes : $0 < \mathbf{a} \leq 9$; $0 \leq \mathbf{b} \leq 9$ et $0 \leq \mathbf{c} \leq 9$ et les conditions suivantes : $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c} = 120$ (♥) et $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 16$ (♠).
D'après (♥), **W** ne contient pas de 0, sinon, le produit est nul (≠ 120 !). Si un des trois chiffres vaut 1, alors le produit des deux autres « chiffres » ne peut pas être égal à 120. Enfin, si un des trois chiffres vaut 2, alors le produit des deux autres vaut 60. Or on ne peut pas obtenir 60 comme produit de deux nombres à un chiffre.
2) Le nombre **W** peut-il contenir les chiffres 7 et 9 ? Impossible, sinon, il faudrait que le « 7 » ou le « 9 » soit un diviseur de 120. Au fait, quels sont les diviseurs de 120 ? A chercher.
3) Donner un exemple de nombre **W** qui répond à l'information. Peut-on alors en déduire d'autres solutions ? *Piste de solution*. On exploite les questions précédentes : pas de chiffre 0, 1, 2, 7 et 9 dans **W**. On commence donc, par exemple, avec **a** = 3. Dans ce cas, le produit des deux autres chiffres vaut 40 (120 ÷ 3). Un peu de traitement mental « offre » les chiffres 5 et 8 comme solution ($5 \times 8 = 40$). Ne pas oublier de contrôler que $3 + 5 + 8 = 16$. Donc W = 358 convient. Du coup toutes les permutations des chiffres 3, 5 et 8 conviennent aussi. On vient alors d'exhiber cinq nouvelles solutions : 385, 538, 583, 835 et 853.

Pour aller plus loin. Montrer qu'il n'y a pas d'autres solutions. *Une piste* : attribuer au « chiffre » **a** les autres valeurs possibles (4 ou 5 ou 6 ou 8) et tester les cas possibles pour les deux autres « chiffres » **b** et **c**.