NOMBRES ENTIERS et NUMERATION

(*Source* : annales CRPE 2014 – 2016)

EXERCICE 1. Affirmation : Vrai ou Faux ; Pourquoi ?

1) Les lettres $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ désignent trois *chiffres* (ou trois nombres entiers compris entre 0 et 9).
On note $\mathbf{N} = (\boldsymbol{abcabc})_{10} = \overline{\boldsymbol{abcabc}}$. *Affirmation* : **N** est un multiple de 13.

2) On considère le nombre entier $\mathbf{W} = 10^9 - 9$. *Affirmation* : la somme des chiffres composant l'écriture usuelle de **W** est égale à 73.

3) On note **C** la somme de cinq nombres entiers consécutifs. *Affirmation* : le nombre **C** est un multiple de cinq.

4) Shéhérazade commence à lire un conte un lundi soir. Elle lit alors 1001 nuits consécutives. *Affirmation* : Shéhérazade terminera sa lecture un dimanche soir. *Comme ça, son auditeur personnel et privé pourra assister à un big match de futchbol sur une célèbre chaîne cryptée !*

5) La lettre $\boldsymbol{n}$ désigne un nombre entier naturel.
Affirmation : le nombre $\mathbf{M} = (\boldsymbol{n} + 1)^2 - (\boldsymbol{n} - 1)^2$ est un multiple de quatre.

EXERCICE 2. D'après CRPE. La multiplication égyptienne, bis…

Pour effectuer la multiplication de deux nombres entiers naturels, les égyptiens utilisaient un algorithme, dit « *algorithme des duplications successives* ». Les deux exemples ci-dessous proposent un développement de cet algorithme :

Exemples : pour effectuer les produits 35×47 et 89×25 (avec nos symboles de numération)

$\boxed{1}$	47
$\boxed{2}$	94
4	~~188~~
8	~~376~~
16	~~752~~
$\boxed{32}$	1504
35	1645

donc $35 \times 47 = 1645$

$\boxed{1}$	25
2	~~50~~
4	~~100~~
$\boxed{8}$	200
$\boxed{16}$	400
32	~~800~~
$\boxed{64}$	1600
89	2225

donc $89 \times 25 = 2225$

(i) Calculer, de deux façons différentes, le produit 53×71, en appliquant l'algorithme des duplications successives, une fois à 53 et l'autre à 71.

(ii) Justifier que l'algorithme « percole », c'est-à-dire que les produits calculés sont « justes ». Quelles propriétés mathématiques sont mises en jeu dans l'application de cet algorithme ?

(iii) (*Facultatif*) Calculer les deux produits suivants, en appliquant l'algorithme ci-dessus. **P1** = 28 × 34 et **P2** = 421 × 124.

(iv) On veut calculer le produit d'un nombre entier à cinq chiffres par un nombre entier à quatre chiffres. Quel nombre minimal de lignes de calcul contient l'opération. Expliquer, ou mieux, justifier.

EXERCICE 3. D'après CRPE. Encore un algorithme…

On considère l'algorithme (*ou plutôt le « programme de calcul »*) suivant :

Début.

- *Étape 1* : choisir un nombre entier naturel **N** dont le chiffre des unités est 5 ;
- *Étape 2* : déterminer ***d***, le nombre des dizaines de **N** ;
- *Étape 3* : effectuer le produit ***d*** × (***d*** + 1);
- *Étape 4* : écrire le nombre entier qui se termine par 25 et dont le nombre des centaines est le produit obtenu à *l'étape 3*.

Fin.

1) Appliquer cet algorithme aux trois nombres entiers : 15 ; 5 ; 145.
2) Un élève affirme que cet algorithme permet de calculer le carré d'un nombre entier naturel dont le chiffre des unités est 5. Prouver qu'il a raison (*Indication* : on pourra développer $(10\boldsymbol{d} + 5)^2$)).

EXERCICE 4. D'après CRPE…

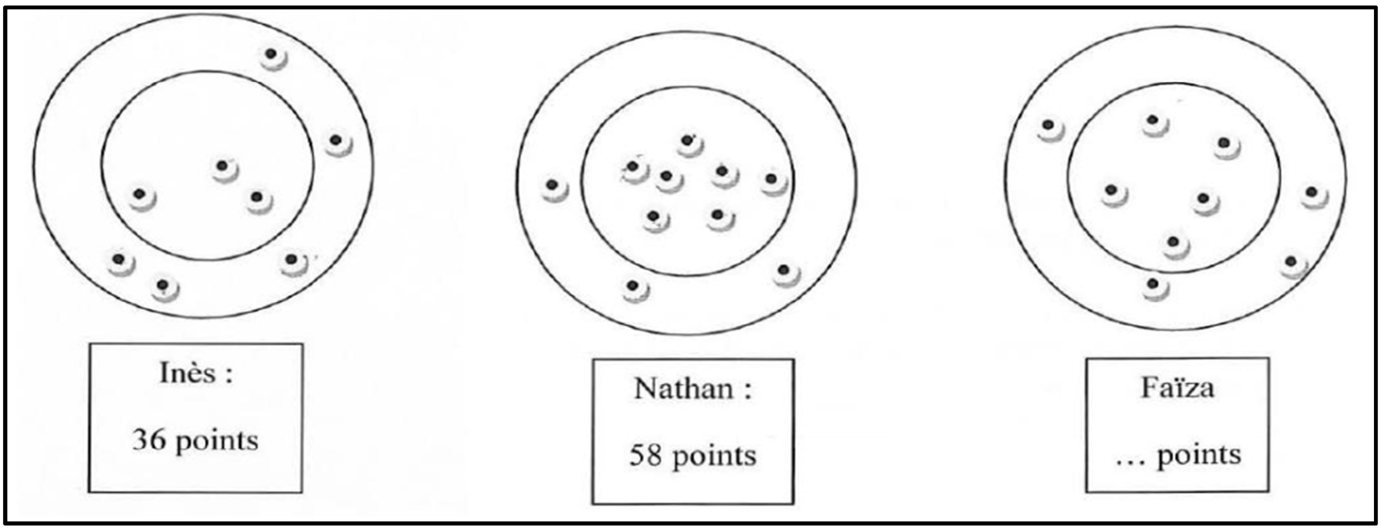
Les lettres **A** et **B** désignent deux nombres entiers naturels tels que :

- 111 est un multiple du nombre entier naturel **A** ;
- **A – B** est un nombre entier naturel ou nul divisible par 10 ;
- **B** est le cube d'un nombre entier naturel.

Trouver toutes les valeurs possibles pour **A** et **B**. Justifier…

EXERCICE 5. D'après CRPE, concours exceptionnel CRETEIL 2016

Trois enfants jouent, *en toute sécurité* !, aux fléchettes. Les fléchettes situées dans une même zone circulaire rapportent le même nombre de points. Donner le score de Faïza, après avoir étudié ceux de Inès et de Nathan. Justifier…



NOMBRES ENTIERS et NUMERATION : Eléments de correction

EXERCICE 1. Affirmation : Vrai ou Faux ; Pourquoi ?

Il y a deux étapes pour ce genre d'item : (***i***) on choisit la réponse, qui est de nature dichotomique, et (***ii***) *plus délicat*, on cherche à expliquer, à justifier, voire, à démontrer que le choix est le « bon » ! Pas toujours facile ! *Il est fort probable qu'une réponse juste, sans « preuve » ne rapporte pas les 0,25pt ou 0,5pt alloués à chaque item !* Zut…

1) Affirmation *VRAIE*. Décomposition canonique du nombre N.

On a : $\mathbf{N} = (\boldsymbol{abcabc})_{10} = \overline{\boldsymbol{abcabc}} = \boldsymbol{a} \times 100\,000 + \boldsymbol{b} \times 10\,000 + \boldsymbol{c} \times 1\,000 + \boldsymbol{a} \times 100 + \boldsymbol{b} \times 10 + \boldsymbol{c} \times 1 = 100\,000\boldsymbol{a} + 10\,000\boldsymbol{b} + 1\,000\boldsymbol{c} + 100\boldsymbol{a} + 10\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = 100\,100\boldsymbol{a} + 10\,010\boldsymbol{b} + 1\,001\boldsymbol{c} = 1\,001 \times 100\boldsymbol{a} + 1\,001 \times 10\boldsymbol{b} + 1\,001 \times \boldsymbol{c} = 1\,001 \times (100\boldsymbol{a} + 10\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = 1\,001 \times (\boldsymbol{abc})_{10} = 1\,001 \times \overline{\boldsymbol{abc}}$. Et le « 13 », il est où ? Facile : 1 001 = 13 × 77 (Ah !!!).

D'où $\mathbf{N} = 1\,001 \times (\boldsymbol{abc})_{10} = 1\,001 \times \overline{\boldsymbol{abc}} = 13 \times 77 \times (\boldsymbol{abc})_{10} = 13 \times 77 \times \overline{\boldsymbol{abc}} = 13 \times (77 \times (\boldsymbol{abc})_{10})$; ce qui signifie que **N** est dans la table de 13, car il s'écrit comme le produit de 13 par un nombre entier.

2) Affirmation *VRAIE*. *Solution « brutosss »*. On a : **W** = 1 000 000 000 - 1 = 999 999 991. Il y a huit « 9 » et un « 1 » ; la somme des chiffres est donc égale à 8 × 9 + 1 = 72 + 1 = 73.

3) Affirmation *VRAIE*. Il y a plusieurs façons d'écrire cette somme. <u>*Ce qu'il faut savoir*</u> : si $\boldsymbol{n}$ désigne un nombre entier, $(\boldsymbol{n} - 1)$ désigne son prédécesseur et $(\boldsymbol{n} + 1)$ désigne son successeur. Car ? Les TROIS nombres $(\boldsymbol{n} - 1)$, $\boldsymbol{n}$ et $(\boldsymbol{n} + 1)$ sont dits consécutifs. Pour cet item, il y en a cinq, il suffit donc de s'intéresser au prédécesseur de $(\boldsymbol{n} - 1)$, qui est $(\boldsymbol{n} - 2)$ et au successeur de $(\boldsymbol{n} + 1)$, qui est $(\boldsymbol{n} + 2)$. Ce qui donne la somme : $(\boldsymbol{n} - 2) + (\boldsymbol{n} - 1) + \boldsymbol{n} + (\boldsymbol{n} + 1) + (\boldsymbol{n} + 2) = 5\boldsymbol{n} - 3 + 3 = 5\boldsymbol{n}$. Par définition, cette somme est donc un multiple de cinq !

4) Ah, Schéhérazade, quelle lectrice ! Affirmation *VRAIE*.

Il va falloir compter combien de semaines il y a dans 1 001 nuits.

Division euclidienne de 1001 par 7 ; on a : 1001 = 143 × 7 + 0. Reste nul. Il y a donc 143 semaines complètes. La première lecture se fait le lundi (*soir*), donc la septième lecture se fera un dimanche (*soir*). D'où la réponse… *Cool, ya machte le soir* !

5) Affirmation *VRAIE*.

On a : $\mathbf{M} = (\boldsymbol{n} + 1)^2 - (\boldsymbol{n} - 1)^2 =$ (*différence de deux carrés*) $= (\boldsymbol{n}^2 + 2\boldsymbol{n} + 1) - (\boldsymbol{n}^2 - 2\boldsymbol{n} + 1) =$ (*suppression des parenthèses*) $= \boldsymbol{n}^2 + 2\boldsymbol{n} + 1 - \boldsymbol{n}^2 - 2\boldsymbol{n} + 1 = 2\boldsymbol{n} + 2\boldsymbol{n} = 4\boldsymbol{n}$: Ce qui signifie que, par définition, le nombre **W** est multiple de 4.

<u>Bizarre</u> : les cinq affirmations sont vraies. Est-ce fait exprès ?

EXERCICE 2. D'après CRPE. La multiplication égyptienne, bis…

1) Application de l'algorithme. <u>Note de ***PW***</u> : l'algorithme ne sera pas « dessiné » tel qu'il est représenté sur le sujet : à reproduire sur la copie.

(i) On garde 71 et on duplique à partir de 1 jusqu'à 32 : pourquoi ? Le nombre qui « suit » 32 dans la duplication est 64, or, 53 < 64. Il reste à trouver la bonne décomposition de 53 comme somme de puissances de 2 : 53 = 32 + 16 + 4 + 1 ; d'où (*présentation et écriture des calculs en ligne*) 71 × 53 = 71 × (32 + 16 + 4 + 1) = 71 × 32 + 71 × 16 + 71 × 4 + 71 × 1 = calculs à terminer = … = 3763. Cet algorithme contient donc six lignes.

(ii) On garde 53 et on duplique à partir de 1 jusqu'à 64 : pourquoi ? Cf. ci-dessus : le nombre qui « suit » 64 dans la duplication est 128, or, 71 < 128. Décomposition de 71, comme somme de puissances de 2 : 71 = 64 + 4 + 2 + 1 ; d'où 53 × 71= 53 × (64 + 4 + 2 + 1) = 53 × 64 + 53 × 4 + 53 × 2 + 53 × 1 = calculs à terminer = … = 3763. Cet algorithme contient donc sept lignes.

2) Une justification élémentaire des résultats obtenus consiste à effectuer le calcul à la main ou à la « caltoss » : c'est demandé, donc, il faut le faire !

Les propriétés : il y en a deux.

P1 : *tout nombre entier naturel admet une et une seule décomposition comme somme de puissances de deux.*
Propriété essentielle en arithmétique élémentaire, « intuitionnée » par les Egyptiens et démontrée bien plus tard.

P2 : *la multiplication est une opération distributive par rapport à l'addition (et par rapport à la soustraction).*
Autre propriété fondamentale en algèbre.

On peut aussi proposer la propriété de commutativité de la multiplication, exemple : $71 \times 53 = 53 \times 71$. Propriété souvent utilisée implicitement dans les calculs, qui a une légitimité forte en algèbre. Toutes les opérations ne sont pas commutatives, exemple : $71 - 53 \neq 53 - 71$, idem pour la division.

Explicitation de l'algorithme :

- Dans la colonne de gauche, on écrit ligne par ligne la liste des puissances de deux, à partir de $2^0 = 1$;
- Dans la colonne de droite, on écrit la valeur du produit du multiplicande par la puissance de deux qui lui correspond. (O*n fait du copier-coller, comme en TD !*) ;
- On entoure les « bonnes » valeurs des puissances de deux dont la somme vaut le multiplicateur.
- On ajoute alors les « bons » produits : ceux qui correspondent aux puissances de deux encadrées.

3) Facile : calculs à effectuer, toujours en appliquant l'algorithme !
On a : $28 \times 34 = 952$ et $421 \times 124 = 52204$.

4) On considère que le multiplicateur est le nombre à quatre chiffres : c'est celui dont on va chercher la décomposition en somme de puissances de 2.
On établit la liste des puissances successives de 2 : 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64 ; 128 ; 256 ; 512 ; 1 024 ; 2 048 ; 4 096 ; 8 192 ; 16 384 ; ...
Il y a donc plusieurs cas à étudier : combien ? Il y a cinq cas.

- Le multiplicateur est strictement inférieur à 1 024 : il y a donc 10 lignes, car, il y a dix puissances de 2 avant 1 024.

Multiplicateur = somme de puissances de deux inférieures à 1 024, ce qui justifie le nombre de lignes.

- 1 024 ≤ multiplicateur < 2 048 : il y a 11 lignes dans le calcul.
- 2 048 ≤ multiplicateur < 4 096 : il y a 12 lignes dans le calcul.
- 4 096 ≤ multiplicateur < 8 192 : il y 13 lignes dans le calcul.
- 8 192 ≤ multiplicateur < 10 000 < 16 384 : il y a 14 lignes. Question délicate, mais intéressante : on n'a rien sans rien !

Raisonnement idem ci-dessus, si le multiplicateur est le nombre à cinq chiffres : à rédiger.

EXERCICE 3. D'après CRPE. Encore un algorithme…

Résultats présentés dans le tableau ci-dessous.

Etape 1	$\mathbf{N} = 15$	$\mathbf{N} = 5$	$\mathbf{N} = 145$
Etape 2	$\boldsymbol{d} = 1$	$\boldsymbol{d} = 0$	$\boldsymbol{d} = 14$
Etape 3	$\boldsymbol{d} \times (\boldsymbol{d} + 1) = 1 \times 2 = 2$	$\boldsymbol{d} \times (\boldsymbol{d} + 1) = 0 \times 1 = 0$	$\boldsymbol{d} \times (\boldsymbol{d} + 1) = 14 \times 15 = 210$
Etape 4	$\mathbf{N'} = 25 + 2 \times 100$	$\mathbf{N'} = 25 + 0 \times 100$	$\mathbf{N'} = 25 + 210 \times 100$
Solution	$15^2 = 225$	$5^2 = 25$	$145^2 = 21\ 025$

Cet algorithme <u>semble</u> donc proposer une technique de calcul du carré d'un entier naturel dont le « dernier » chiffre ou chiffre des unités est égal à 5 : ***conjecture*** à démontrer !

Quelle est l'écriture standard d'un nombre **N** se terminant par 5 lorsque qu'on s'intéresse à son chiffre des dizaines ***d*** ? On a : **N** = 10***d*** + 5.

<u>Quelques exemples</u> : 2015 = 201 × 10 + 5 (nombre de dizaines = 201 et chiffre des unités = 5) ; 12345 = 1234 × 10 + 5 (nombre de dizaines = 1234 et chiffre des unités = 5), …

<u>Autre point</u> : développement de ***d*** × (***d*** + 1) = ***d***² + ***d***.

<u>Application de l'algorithme</u> :

Etape 1	**N** = 10***d*** + 5
Etape 2	***d*** = 1
Etape 3	***d*** × (***d*** + 1) = ***d***² + ***d***
Etape 4	**N'** = 25 + (***d***² + ***d***) × 100 = 25 + 100 × ***d*** + 100 × ***d***²
Solution	**N'** = 100 × ***d***² + 100 × ***d*** + 25 = (10***d*** + 5)² = **N**². *<u>Conclusion</u>* : l'élève a raison !

EXERCICE 4. D'après CRPE…

Exercice tout à fait classique au CRPE ! *<u>Une piste</u>* : exploitation de chacune des puces…

- « 111 est un multiple du nombre entier naturel **A** ». Traduire cette affirmation par une écriture symbolique, et même mieux, une égalité. *<u>Définition</u>* (*rappel*) : 111 est un multiple de **A**, s'il existe un entier (naturel ~~ou relatif~~) ***k*** tel que : 111 = ***k*** × **A**. (On dit aussi que 111 est divisible par **A**). On peut déjà chercher quelques ou toutes les valeurs de ***k***. En effet, on peut « de tête » chercher tous les couples de nombres entiers naturels dont le produit vaut 111.
On a : 111 = 1 × 111 = 3 × 37. Stop ! Il y a donc deux couples : (1 ; 111) et (3 ; 37). Le nombre **A** peut valoir soit 1, soit 3, soit 37, soit 111.

- « **A – B** est un nombre entier naturel ou nul divisible par 10 ». Quelle traduction ? Le dernier chiffre de la différence **A – B** est égal à 0, avec **A** ≥ **B**. C'est-à-dire **A – B** = 0, pas intéressant ; **A – B** = 10 ; 20 ; 30 ;…jusqu'à 100 ; stop, pourquoi ?

- « **B** est le cube d'un nombre entier naturel ». On va écrire la liste des premiers cubes, ceux dont la valeur ne dépasse pas 111. Why not et why ?… (On omet la valeur 0, car $0^3 = 0$, pas intéressant pour l'exercice).

Entier ***n***	1	2	3	4	5	6	…
Cube de ***n*** = ***n*** × ***n*** × ***n*** = ***n***³	$1^3 = 1$	$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$4^3 = 48$	$5^3 = 125$	$6^3 = 216$	…

Conclusion : Il y a deux couples-solutions : (37 ; 27) et (111 ; 1). Cf. tableau ci-dessous.

Valeur de **A**	**1**	3	**37**	**111**
Valeur de **B**	1	1	1 ou 8 ou **27**	**1** ou 8 ou 27 ou 48
	~~1 – 1 = 0~~	~~3 – 1 = 2~~	~~37 – 1 = 36~~ ; ~~37 – 8 = 29~~ ; 37 – 27 = 10	111 – 1 = 110, les autres différences ne donnent pas un multiple de dix

EXERCICE 5. D'après CRPE, concours exceptionnel CRETEIL 2016

Une modélisation algébrique. On désigne par ***x*** la valeur d'une fléchette dans la cible centrale et ***y*** celle d'une fléchette dans la couronne circulaire. On demande donc la valeur de 5***x*** + 4***y*** ; sachant que 3***x*** + 5***y*** = 36 et 7***x*** + 3***y*** = 58.

(i) On résout le système $\begin{cases} 3x + 5y = 36 \\ 7x + 3y = 58 \end{cases}$; on trouve les valeurs de ***x*** et de ***y***, d'où la valeur 5***x*** + 4***y***.

(ii) *<u>Autre piste de solution</u>* : « tests » de différentes valeurs ou « essais-erreurs-ajustements »… Quelques valeurs, ***<u>calculs à effectuer</u>*** : on va <u>facilement</u> trouver que ***x*** = 7 et ***y*** = 3 vérifient chacune des deux équations.

D'où le score de Faïza : 5 × 7 + 4 × 3 = 35 + 12 = **47**.