BILAN du TD sur les « NUMERATIONS ANTIQUES ».

I. La NUMERATION EGYPTIENNE :

Il s'agit d'un système de numération de base 10 ou système décimal, de type additif, sans zéro. En effet :

✧ Il y a sept symboles qui représentent l'unité (*une barre verticale*), la dizaine (*une anse de panier*), la centaine (*une corde enroulée*), le millier (*une fleur de lotus*), la dizaine de mille (*un doigt dressé*), la centaine de mille (*un têtard*) et le million (*une divinité levant les bras au ciel*).

✧ La position ou la place des symboles n'a pas d'importance. (*Pas de « sens de lecture » imposé*).

✧ Les unités de chaque ordre sont indiquées par répétition du symbole.

✧ Ce système permet de représenter tous les nombres de 1 à 999×10^6. Cependant, il est nécessaire d'employer de très nombreux signes pour écrire un « grand » nombre.

Pour aller plus loin : **on « invente » ou on « fabrique » des nombres pour (*nécessairement*) « FAIRE des OPERATIONS » avec ! Se pose donc le problème des Techniques Opératoires**.

(i) Pas de problème particulier pour une addition (ou une soustraction) : c'est un système additif, par définition, on « écrit » autant de symboles qu'il faut sans se préoccuper « d'organiser » cette écriture, avec une « règle » dont on se sert encore aujourd'hui à l'école ! Laquelle, au fait ?

(ii) L'affaire se complique pour une multiplication ! Les Egyptiens utilisaient, *en acte*, une propriété mathématique fondamentale.

ENONCE : ***tout nombre entier s'écrit comme somme de puissances de deux***.

Quelle utilisation de ce théorème ? *Exemple* : soit à effectuer la multiplication de 24 par 13 ; *vocabulaire* : on dit aussi qu'on cherche à calculer le produit 24×13.

On construit la table de multiplication de 24 par les puissances successives de deux (= *duplication*) : ~~*24 × 0 = 0. On ne s'en sert pas : n'existe pas !*~~ $24 \times 1 = 24$. $24 \times 2 = 48$. $24 \times 4 = 96$. $24 \times 8 = 192$. $24 \times 16 = 384$. Et ainsi de suite. (On double le « *multiplicateur* » à chaque fois, ce qui a pour effet de doubler le produit : on dit qu'on a ***dupliqué*** le « *multiplicateur* »).	$24 \times 13 = ?$ On utilise les calculs de la colonne précédente et le théorème ci-dessus. On a : $13 = 8 + 4 + 1$. D'où, $24 \times 13 = 24 \times (8 + 4 + 1)$. $24 \times 13 = 24 \times 8 + 24 \times 4 + 24 \times 1$. $24 \times 13 = 192 + 96 + 24 = 312$. Et voilà ! Quelle ***propriété mathématique*** (*fondamentale*) permet de transformer le *produit* des deux facteurs 24 et $(8 + 4 + 1)$ en la *somme* des trois termes 24×8, 24×4 et 24×1 ?

(iii) On continue : comment « faire » pour effectuer une division ou pour calculer un quotient ? Les Egyptiens utilisent le même procédé que pour la multiplication : la ***duplication*** du diviseur.
Etude d'un exemple : effectuer la division de 381 par 17.

Duplication du diviseur 17 : $17 \times 1 = 17$; $17 \times 2 = 34$, $17 \times 4 = 68$; $17 \times 8 = 136$; $17 \times 16 = 272$; $17 \times 32 = 544$; …	On a alors : $381 = 272 + 68 + 34 + 7$ On utilise les calculs de la colonne précédente : D'où : $381 = 17 \times (16 + 4 + 2) + 7$. $381 = 17 \times 22 + 7$. Le quotient $381 \div 17$ est donc compris entre 22 et 23.

EXERCICES : pour bien comprendre ces algorithmes, effectuer, les calculs suivants :

568×49 ; 1257×452 ; $987 \div 31$ et $2008 \div 54$.

(iv) Autre apport des égyptiens au « calcul » : ***le calcul fractionnaire***. En effet, <u>*le « partage » de l'unité*</u> a permis de développer ce type de calcul. Les « *fractions égyptiennes* » ont pour numérateur 1. (Quelques autres fractions « simples » comme $\frac{2}{3}$ ou $\frac{3}{4}$ étaient aussi utilisées).

A partir de l'égalité : $\frac{19}{8} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ (*ah bon, voir ci-dessous*), voilà comment les scribes, ayant rédigé le papyrus Rhind, ont calculé $11 \times \frac{19}{8}$. Encore et toujours la ***duplication*** !

Duplication du multiplicateur $\frac{19}{8}$: $2 \times \frac{19}{8} = 4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. $4 \times \frac{19}{8} = 8 + 1 + \frac{1}{2}$. $8 \times \frac{19}{8} = 16 + 2 + 1$ (= 19, ouf !).	$11 = 1 + 2 + 8$, donc $11 \times \frac{19}{8} = (1 + 2 + 8) \times \frac{19}{8}$. Càd : $11 \times \frac{19}{8} = 1 \times \frac{19}{8} + 2 \times \frac{19}{8} + 8 \times \frac{19}{8}$. D'où : $11 \times \frac{19}{8} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + 4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 16 + 2 + 1$ $= 26 + \frac{1}{8}$. (*Calculatrice ?…*).

<u>Compléments[1].</u>

- Les égyptiens, au cours de leur longue histoire (*antique !*), ont utilisé trois types d'écriture :
  1. Une écriture dite <u>***hiéroglyphique***</u> qu'on voit (*presque*) partout sur les monuments et les fresques.
  2. Une écriture dite <u>***démotique***</u>, plus simplifiée et « populaire », utilisée par les corps de métier de cette époque : commerçants, architectes, scribes, …
  3. Une écriture dite <u>***hiératique***</u>, écriture cursive dérivée de l'écriture hiéroglyphique. On peut dire que cette écriture est une « simplification » des glyphes, en conservant la partie la plus signifiante à charge pour le lecteur de reconstituer le « sens ».

Par exemple, l'illustration ci-dessus, donne deux écritures (une *hiéroglyphique* et l'autre *hiératique*) du mot : « **MATHS** ».

- En haut de cette page, on travaille « tout de suite » avec l'égalité $\frac{19}{8} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. Oui, mais, ce genre d'égalité, est-ce si facile à établir[2] ? Par exemple, pour établir l'égalité suivante : $\frac{3}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{28}$, il faut faire quelques efforts (*Au fait, on peut <u>tester</u> cette égalité, à défaut de l'établir. Révision du bon vieux calcul fractionnaire !*). Quels étaient les règles du jeu ?
  1. Utiliser « *les fractions égyptiennes* », sans avoir le droit d'utiliser deux fois la même. (*La classe !*).
  2. Chercher plusieurs décompositions (*avec deux, ou trois ou plus « fractions égyptiennes »*). (*Sportif !*).

Le scribe AHMES a donné une table de décomposition des fractions de la forme $\frac{2}{\boldsymbol{n}}$. Il a probablement utilisé, <u>*en acte*</u>, quelques belles formules remarquables du genre : (avec « *les bonnes conditions* » sur ***n***, ***a*** et ***b*** !).
$\boxed{\frac{2}{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{\boldsymbol{n}} + \frac{1}{2\boldsymbol{n}} + \frac{1}{3\boldsymbol{n}} + \frac{1}{6\boldsymbol{n}}}$ ou $\boxed{\frac{2}{\boldsymbol{ab}} = \frac{1}{\boldsymbol{ka}} + \frac{1}{\boldsymbol{kb}}}$, avec $2\boldsymbol{k} = (\mathbf{a} + \mathbf{b})$ et ***a*** et ***b*** impairs ou … *On y reviendra*[3].

[1] Cette partie doit (*beaucoup*) au site « *Chronomaths* » de S. Mehl et à l'encyclopédie (*libre !*) Wikipédia.
[2] Derrière cette décomposition, il y a la division euclidienne, dont on parlera bientôt !
[3] Cette décomposition en somme de « *fractions égyptiennes* » a donné beaucoup de travail et donne encore autant de travail aux mathématiciens de nos jours. Entre nous, pourquoi ne pas vérifier que les formules sont correctes et proposer quelques décompositions ?

II. La NUMERATION SINO-JAPONAISE :

Il s'agit d'un système de numération de base 10 ou numération décimale, n'ayant pas de symbole pour zéro. C'est un système mixte ou hybride ; en effet, dans l'écriture de la décomposition du nombre, il y a à la fois des éléments additifs et des éléments multiplicatifs.

✧ Il y a treize symboles pour représenter les nombres de 1 à 99 999 : les unités fondamentales de 1 à 9 et les puissances de 10 suivantes : dizaine, centaine, millier et dizaine de mille.

✧ Les nombres s'écrivent « verticalement » et se lisent de « haut en bas », en commençant par les regroupements d'ordre les plus élevés. On observe que chaque symbole d'une puissance de dix est précédé d'un symbole-unité.

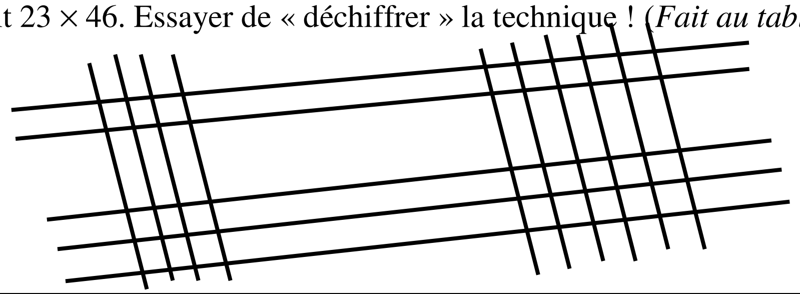
✧ C'est ***un système de position*** : la valeur d'un symbole dépend de la place relative qu'il occupe par rapport aux autres. Une modification de l'ordre des symboles entraîne généralement une modification de la « quantité » représentée.

Comme dans le paragraphe précédent, on va s'intéresser aux opérations.

(i) Pas de problème particulier pour l'addition et la soustraction. Voir paragraphe précédent.

(ii) Une disposition originale et astucieuse pour la multiplication. On la trouve parfois dans quelques manuels de la classe de sixième sous la dénomination : « *la multiplication chinoise* ».

Calculer le produit 23×46. Essayer de « déchiffrer » la technique ! (*Fait au tableau en **TD***).



(iii) Pas de document relatif à la division, ni à des travaux avec des nombres plus petits que l'unité.

III. La NUMERATION BABYLONIENNE (ou numération cunéiforme) :

Il s'agit d'un système de numération de bases mixtes (*dix* et *soixante*), ne possédant pas de signe pour le « *chiffre-nombre* » zéro (*bien que le « problème » du zéro ait été partiellement ou localement résolu pour des calculs avec les fractions sexagésimales, voir ci-après*).
En effet :

✧ Il n'y a que deux signes de bases pour cette numération. Un symbole, pour le zéro, apparaîtra plus tardivement pour le calcul fractionnaire ; *voir ci-après*. Les deux signes de base sont :

le **clou** () pour l'unité et le **chevron** () pour la dizaine.

✧ C'est un système additif à l'intérieur de chaque nombre d'unités.
De 1 à 9 : autant de clous que nécessaires.
De 10 à 59 : système additif de base dix.
Dès qu'on dépasse 60, c'est un système de position. *Astucieux* !

✧ En plus du problème du zéro, on peut noter une ambiguïté d'écriture. Suivant le contexte, le clou peut désigner 1 ou 60 ou 3600 ou 216 000 ou ... . L'espace ou les espaces figurant dans les écritures permettent de « décider » ! Ce n'est pas facile d'utilisation et cela complique les algorithmes des opérations. Pour indiquer la présence du zéro, on utilisait le clou qu'on dessinait « penché » ! Pas bête !

En ce qui concerne les opérations, on va s'intéresser au calcul fractionnaire, puisque les fractions sexagésimales sont encore utilisées de nos jours dans nos systèmes de calcul : la mesure du temps (*les conversions en heures, en minutes et en secondes*) et les calculs d'arcs et d'angles.

Voir les exemples donnés en ***TD*** : (*en fonction du temps restant !*).

Un calcul d'un carré.

Quelques informations sur les fractions sexagésimales (*écritures et calculs*). *Pas le temps* !

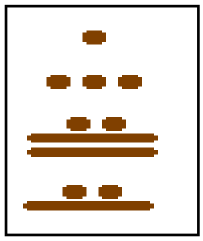
IV. La NUMERATION MAYA.

Pour ce système de numération, l'affaire se complique, juste un peu. On dit qu'il est ***vigésimal*** (base vingt), oui, mais pas tout à fait ! Il y a un symbole pour marquer le zéro (la **coquille** ou le **couteau** ou l'**œil**). Ce système est positionnel, le nombre est lu comme chez les sino-japonais : de haut en bas.

Correction des conversions demandées.

Tableau « normal » de numération de la base vingt : les unités, puis les « vingtaines » (*comme pour les dizaines*), puis les « quatrecentaines » (*comme pour les centaines*), puis les « huitmilliers » (*comme pour les milliers*), puis … and so on.

…	$20^4 = 20 \times 20 \times 20 \times 20 = 160\,000$	$20^3 = 20 \times 20 \times 20 = 8\,000$	$20^2 = 20 \times 20 = 400$	$20^1 = 20$	$20^0 = 1$: les unités de 1 à 19.



On applique ce système au nombre écrit en chiffres mayas ci-contre :

- Il y a sept unités (*le chiffre du bas : un tirait surmonté de deux points*).
- Il y a douze « vingtaines » (*deux tirait surmontés de deux points*).
- Il y a trois « quatrecentaines » (*trois points*).
- Il y a un « huitmillier » (*le chiffre du haut : un point*). Il n'y a pas de zéro[4].

D'où la conversion : **7** + **12** × 20 + **3** × 400 + **1** × 8000 ou **1** × 8000 + **3** × 400 + **12** × 20 + **7**.

Calculs : 7 + 240 + 1200 + 8000 = 8000 + 1200 + 240 + 7 = 9447 ≠ 8527.

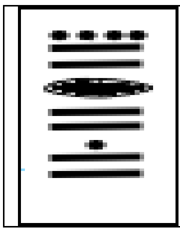
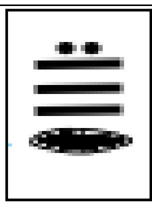
Aie, ça ne marche pas, pourtant ! Il y a une irrégularité volontaire dans ce système. Elle est due aux systèmes calendaires mis au point par cette civilisation.

Deux calendriers cohabitent : un calendrier *civil* solaire et un calendrier *sacré* « vénusien ». L'année civile comporte 365 jours *(= 20 jours × 18 + 5 jours, ces 5 jours correspondant à des « ajustements » astronomiques, avec des « jours maudits » ! calculés par les prêtres*) et l'année vénusienne en comporte 260 *(= 20 jours × 13 : qui correspond à la durée d'une révolution de la planète Vénus autour du Soleil*). Du coup, pour respecter et coller à la réalité calendaire, il a été décidé qu'à la place de la « quatrecentaine » (= $20^2 = 20 \times 20$), « l'unité » de la troisième colonne serait 20 × 18 = 360 (*comme pour le nombre de jours d'une année civile, à quelques jours près, c'est-à-dire, à quelque chose près*). D'où le nouveau tableau de numération :

(*On continue*) : …	(*On continue*) : $20^3 \times \boxed{18} = 8000 \times 18 = 144\,000$.	(*On continue*) : $20^2 \times \boxed{18} = 400 \times 18 = 7200$.	(*Pas de nom !*) : $\mathbf{20^1 \times \boxed{18}} = 20 \times 18 = 360$.	« Vingtaines » : $20^1 = 20$.	Unités : De 1 à 19.
0	**0**	**1**	**3**	**12**	**7**

En effet, 8527 = 7200 + 1327 = 7200 + 1080 + 247 = 7200 + 1080 + 240 + 7 = **1** × 7200 + **3** × 360 + **12** × 20 + **7**. Maintenant, ça marche ! A titre d'exercice, on peut se donner des nombres quelconques écrits « normalement » en base décimale bien de chez nous et chercher leur traduction en base vigésimale maya. L'inverse est aussi de mise ! Au travail.

On termine par les nombres avec coquille : ce symbole est de nature positionnelle. Il marque l'absence d'une « colonne » du tableau de numération et préfigure le zéro, qui mettra un certain, voire un temps certain à se faire la place qu'il mérite.

	Le nombre ainsi représenté est 101 011. Correction : **14** × 7200 + $\boxed{\mathbf{0}}$ × 360 + **10** × 20 + **11** = 100 800 + 200 + 11 = 101 011.		Le nombre ainsi représenté est 340. Correction : **17** × 20 + $\boxed{\mathbf{0}}$ = 340.

4 La décomposition proposée commence par le chiffre du bas, en commençant par celui du haut, on arrive à la même conversion. Propriétés de l'addition : lesquelles ? Heureusement !

V. <u>Quelques points de repères historiques : (*manuel de la classe de 6è, collection « Maths et Clic », chez Bordas*)</u>.

(… L'écriture, *au sens actuel du terme*, apparaît vers **– 3500 ans avant J.C.**).
… Le plus ancien document indien (*des Indes actuelles, pas des Apaches, ni des Sioux !*) connu attestant l'usage des neuf chiffres selon le système de position date de **595 après JC.**
… L'introduction de la numération positionnelle et du zéro en terre d'Islam date de la fin **du VIIIème siècle après JC.**
… Ce n'est que vers le **XIIème siècle ap. J.C.** que les chiffres « arabes » se stabilisent graphiquement et que le zéro est introduit en « Europe ». La généralisation et l'usage de ces chiffres datent du **XVème siècle après JC.**
… <u>*pour préparer la suite.*</u>

Le point décimal ou la virgule est utilisée à partir de 1520. (*Travaux de Simon STEVIN : voir le document « **La petite histoire de la virgule** », extrait d'un CD réalisé par **DP**, **SV** et **PW***).

<u>*Pour terminer : quelques grammes de « poésie » dans le monde des mathématiques*</u>.

« ***Il y a un vertige taxonomique. Je l'éprouve chaque fois que mes yeux tombent sur un indice de la Classification Décimale Universelle (CDU). Par quelles successions de miracles en est-on venu, pratiquement dans le monde entier, à convenir que :
668.184.2.099 désignerait la finition du savon de toilette et
629.1.018-465 les avertisseurs pour véhicules sanitaires, cependant que :
621.3.027.23 ; 621.436.382 ; 616.24-002.5-084 ; 796.54 ; 913.15 désignaient respectivement :
les tensions ne dépassant pas 50 volts, le commerce extérieur des moteurs Diesel, la prophylaxie de la tuberculose, le camping et la géographie ancienne de la Chine et du Japon !*** »

Georges PEREC, <u>Penser / Classer</u>, chez Hachette, collection : *Textes du XXème siècle*.

Pour terminer en beauté !

Un extrait d'une table hiéroglyphique du système de numération maya (<u>*Source*</u> *: encyclopédie Wikipédia*).

Chaque visage, vu de profil, désigne ou représente un chiffre de la base vigésimale. Je ne vous dis pas la taille des écritures des calculs si on ne les exécute pas avec les symboles « allégés », étudiés en **TD** (le **point**, le **trait** et la **coquille** !).

Fiche d'exercices sur NOMBRES ENTIERS et NUMERATION

EXERCICE 1 : *analyse de notre système de numération orale*

1) Pour chacun des noms de nombre de la liste ci-dessous, donner la décomposition opératoire « implicite » qu'on peut écrire en « disant » à voix haute chaque nombre.

Diction de : vingt-huit	
Diction de : soixante-douze	
Diction de : trente-neuf	
Diction de : quatre-vingt-trois	
Diction de : huit cent vingt-neuf	
Diction de : deux mille quarante-six	
Diction de : ~~trois millions deux cent soixante-dix mille cent trente cinq~~	
Diction de : quatre-vingt-douze	

2) Quels sont alors les groupements qui apparaissent au travers des noms de ces nombres ? Autrement dit, quelles sont les « traces » des différents groupements que notre système de numération orale a conservé ? (*Indication* : on peut mettre en évidence au moins cinq types de groupement).

EXERCICE 2 :

Combien utilise-t-on de signes distincts pour écrire, en chiffres, ***TOUS*** les nombres de 0 à 1 000 000 000 (ou 10^9) ?

Combien y a-t-il de mots dans la langue française permettant de nommer tous les nombres de zéro à un milliard ?

EXERCICE 3 Cinq « items » ***VRAI*** ou ***FAUX***. Justifier les réponses fournies.

Item 16. On écrit, à partir de 1 inclus, la suite des nombres entiers sans les séparer. Paul affirme alors que le chiffre « 7 » occupe le vingt-cinquième rang. Encore plus fort, c'est le chiffre « 4 » qui occupe le trois-cent-cinquantième rang.

Item 40. Soit ***a***, ***b***, ***c*** trois nombres entiers compris entre 0 et 9. On peut alors affirmer que les nombres qui s'écrivent ***abcabc*** ou $(\boldsymbol{abcabc})_{10}$ en base dix sont des multiples de 13.

Item 41. On additionne, selon la technique de calcul usuelle, deux nombres entiers. Le résultat est 2999. On peut alors affirmer qu'on ne peut pas savoir s'il y a des retenues dans cette addition.

Item 20. Dans une classe de collège, tous les élèves ont le même âge (*tous les âges sont des nombres entiers*) sauf sept qui ont un an de plus et deux qui ont un an de moins. Si on ajoute les âges de tous les élèves, on trouve 324. On peut alors affirmer que ces données suffisent pour déterminer le nombre exact d'enfants dans la classe.

Item 24. Le plus petit nombre entier naturel divisible par chacun des nombres de 1 à 10 est 2250.

La page suivante contient des exercices extraits de sujets du CRPE, usuels et classiques…
Etude en détails pendant les TD

EXERCICE 4. *D'après sujet CRPE*

Soit **N** = ***(mcdu)₁₀*** un nombre entier naturel écrit en base dix pour lequel on a : ***m*** > ***c*** > ***d*** > ***u*** > 0.

1. Quel est le plus petit nombre **N** possible ?
2. Quel est le plus grand nombre **N** possible ?
3. Dresser la liste des nombres **N** pour lesquels le chiffre des milliers est 6.

On appelle **M** le nombre entier obtenu à partir de **N** en permutant le chiffre des unités avec celui des unités de mille et le chiffre des centaines avec celui des dizaines.
On appelle **D** le nombre obtenu en calculant la différence **N** – **M**.

4. Exprimer **D** en fonction de ***m***, ***c***, ***d*** et ***u***.
5. Montrer que **D** est un multiple de 9.
6. Quelle est la valeur maximale de **D** ? Pour quelle(s) valeur(s) de **N**, **D** est-il maximum ?
7. Quelle est la valeur minimale de **D** ? Pour quelle(s) valeur(s) de **N**, **D** est-il minimum ?

EXERCICE 5. *D'après sujet CRPE.*

Le 7 avril 1795 (*le 18 Germinal An III*), le système métrique devient légal ; il remplace d'anciennes unités de mesure telles que la toise, le pied et le pouce.

1. *Quelques conversions*. Dans ces anciennes mesures, 3 toises et 2 pieds sont équivalents à 240 pouces ; 5 toises et 1 pied sont équivalents à 372 pouces.
Combien de pieds vaut une toise ? Justifier la réponse.

2. a) Sachant qu'un pouce correspond à 0,027m, calculer la longueur en mètres d'un pied.

b) Un soldat de l'an II mesure 1,70m ; donner sa taille en utilisant à la fois le pied et le pouce comme unités de mesure. *Préciser le choix des approximations.*

EXERCICE 6. *D'après sujet CRPE.*

Parmi les trois nombres suivants : 4316, 17034 et 68901 quels sont les multiples de 17 ?
Justifier en écrivant les calculs effectués et expliciter la démarche utilisée.

2. Une puce fait des sauts réguliers de 17 « pas » sur une piste numérotée qui peut être prolongée. *Par exemple*, si elle part de la case 8 et fait deux sauts à la suite, elle arrive alors sur la case 42 (*8 + 17 + 17 = 42*).

a) En partant de 23584 et en faisant des sauts de 17, la puce peut-elle atteindre la case 23692 ? Justifier la réponse.

b) En partant de 2688 et en faisant des sauts de 17, la puce peut-elle atteindre la case 40598 ? Justifier la réponse.

3. D'une façon générale, si ***a*** et ***b*** sont deux entiers naturels donnés (avec : ***a*** < ***b***), indiquer un procédé général permettant de prévoir s'il est possible d'atteindre ***b*** à partir de ***a*** en en faisant des sauts de 17.

4. a) Quel est le plus petit entier naturel à partir duquel, en faisant des sauts de 17, la puce peut atteindre 52200 ? Justifier la réponse.

b) Quelle est la case la plus proche de 5000 d'où la puce doit partir pour atteindre effectivement 32600 ? Justifier la réponse.

La page suivante contient des exercices, usuels et classiques, de changements de bases. Un PE doit maîtriser les techniques de base de ces « conversions », cela lui donne des outils d'analyses non anecdotiques d'erreurs de productions d'élèves, entre autres bienfaits…

Fiche d'exercices n°(2) sur la NUMERATION : des exercices extraits du CRPE

*Avertissement **PW**. FICHE à exploiter plus tard : on reviendra sur les « conversions » entre numérations de bases différentes. On peut donc « passer » cette fiche en première lecture*

EXERCICE n°(1) :

1. Obtenir l'écriture en base **dix** d'un nombre dont on connaît l'écriture en base **b**.

Soit (1302) l'écriture en base **cinq** d'un nombre donné. Donner son écriture en base **dix**.

(*Notation* : on dispose de plusieurs notations pour les écritures d'un nombre dans une base donnée, on peut adopter : $(1102)_{\mathbf{cinq}}$ ou $((1)(1)(0)(2))_{\mathbf{cinq}}$ ou $\underline{1102}_{\mathbf{cinq}}$ ou … pour ces écritures).

✧ $(6521)_{\mathbf{sept}}$ = ? en base **dix**. $(1100101)_{\mathbf{deux}}$ = ? en base **dix**.
✧ $(238)_{\mathbf{douze}}$ = ? en base **dix**. $((24)(8)(54)(1))_{\mathbf{soixante}}$ = ? en base **dix**.
✧ Choisir d'autres écritures et effectuer le changement de base.

2. Obtenir l'écriture en base **b** d'un nombre dont on connaît l'écriture en base **dix**.

✧ 119 = ? en base **trois**. 2013 = ? en base **deux**.
✧ 144 = ? en base **douze**. 144 = ? en base **onze**.

EXERCICE n°(2) : (Orléans-Tours 1993).

1. Ecrire en base **douze** le nombre qui s'écrit 144 en base **dix**. (*Cf. exercice précédent*).
2. Ecrire en base **dix** le nombre qui s'écrit 1000 en base **douze**.
3. On désigne par 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, **a**, **b** les douze chiffres utilisés en base **douze**. Ecrire en base **dix** :

Les trois nombres qui s'écrivent respectivement (**a**), (**b**), (**ab**) en base **douze**.
Le produit de a par b : **a** × **b** (noté **ab**, à ne pas confondre avec $(\mathbf{ab})_{\text{base } \mathbf{n}}$!).

EXERCICE n°(3) : (d'après CRPE, ***les questions sont indépendantes***).

1. Est-il possible de comparer les nombres :
   A = $(10234)_{\mathbf{cinq}}$ et **B** = $(231)_{\mathbf{douze}}$; sans convertir entièrement ces nombres en base **dix** ? (Justifier).
2. Déterminer la base **a**, si elle existe, telle que : $(113)_{\mathbf{a}} = (21)_{\mathbf{a}} + (32)_{\mathbf{a}}$. Déterminer la base **b**, si elle existe, telle que : $(26)_{\mathbf{b}} + (12)_{\mathbf{b}} = (43)_{\mathbf{b}}$.
3. Déterminer la base **w** de numération de position dans laquelle on a l'égalité : $(82)_{\mathbf{w}} = 3 \times (28)_{\mathbf{w}}$.

EXERCICE n°(4) : (*d'après sujet CRPE*).

On désigne par la lettre **W** un nombre écrit en base **dix**. On sait que dans cette base, il est, à la fois, multiple de 9 et de 5. On donne ensuite les informations suivantes :

- La somme des chiffres de son écriture, en base **cinq**, s'écrit $(11)_{\mathbf{cinq}}$.
- En convertissant le nombre **W** en base **quatre**, il s'écrit avec cinq chiffres.
- En convertissant le nombre **W** en base **sept**, il s'écrit alors avec trois chiffres.

Donner alors la valeur de **W**, en précisant et en détaillant les démarches utilisées.

Un sujet (*doublement*) d'actualité : un exercice complet (***Partie Mathématique*** et ***Questions Complémentaires***) « tombé » au CRPE en 2009. *Retour vers le futur : vers 2017– 2018* !!!

Partie Mathématique

Au cours de l'année civile 2009, de nouvelles plaques d'immatriculation des véhicules roulant (*voitures, cars, camions, motocyclettes,…*) vont être mises en circulation. Voici un extrait du principe qui régit le nouveau système.

Principe de base : chaque véhicule immatriculé possèdera désormais un numéro « *à vie* », avec possibilité de présence du logo de la région et du numéro du département, à droite de l'immatriculation.

Un exemple (sans logo) : **OM – 501 – OL**

Ce numéro est donc constitué de sept caractères, répartis en trois blocs :

Premier bloc : deux lettres ; *Deuxième bloc* : trois chiffres ; *Troisième bloc* : deux lettres.

La numérotation des véhicules se fera de manière chronologique et au niveau national (de **AA – 001 – AA** à **ZZ – 999 – ZZ**), les numéros se succédant de la manière suivante :

- de **AA – 001 – AA** à **AA – 999 – AA** ;
- puis de **AA – 001 – AB** à **AA – 999 – AB** et ainsi de suite jusqu'à **AA – 999 – AZ** ;
- puis de **AA – 001 – BA** à **AA – 999 – ZZ** ; puis de **AB – 001 – AA** à **AZ – 999 – ZZ** ; puis de **BA – 001 – AA** à **ZZ – 999 – ZZ**. Stop.

(On précise que les lettres utilisées sont simplement les vingt-six lettres de l'alphabet français).

1. Combien de véhicules devront être immatriculés pour atteindre le numéro **AA – 999 – AZ** ?
2. Montrer qu'il faut immatriculer 28 982 véhicules pour atteindre le numéro **AA – 011 – BD**.
3. Montrer que le nombre de véhicules immatriculés avant d'arriver au numéro **AB – 001 – AA** est de 675 324.
4. Au bout de combien d'années pourrait être épuisé ce système de numérotation si sept millions de véhicules sont immatriculés chaque année ?

Questions complémentaires , presque comme une troisième partie d'un sujet de 2014

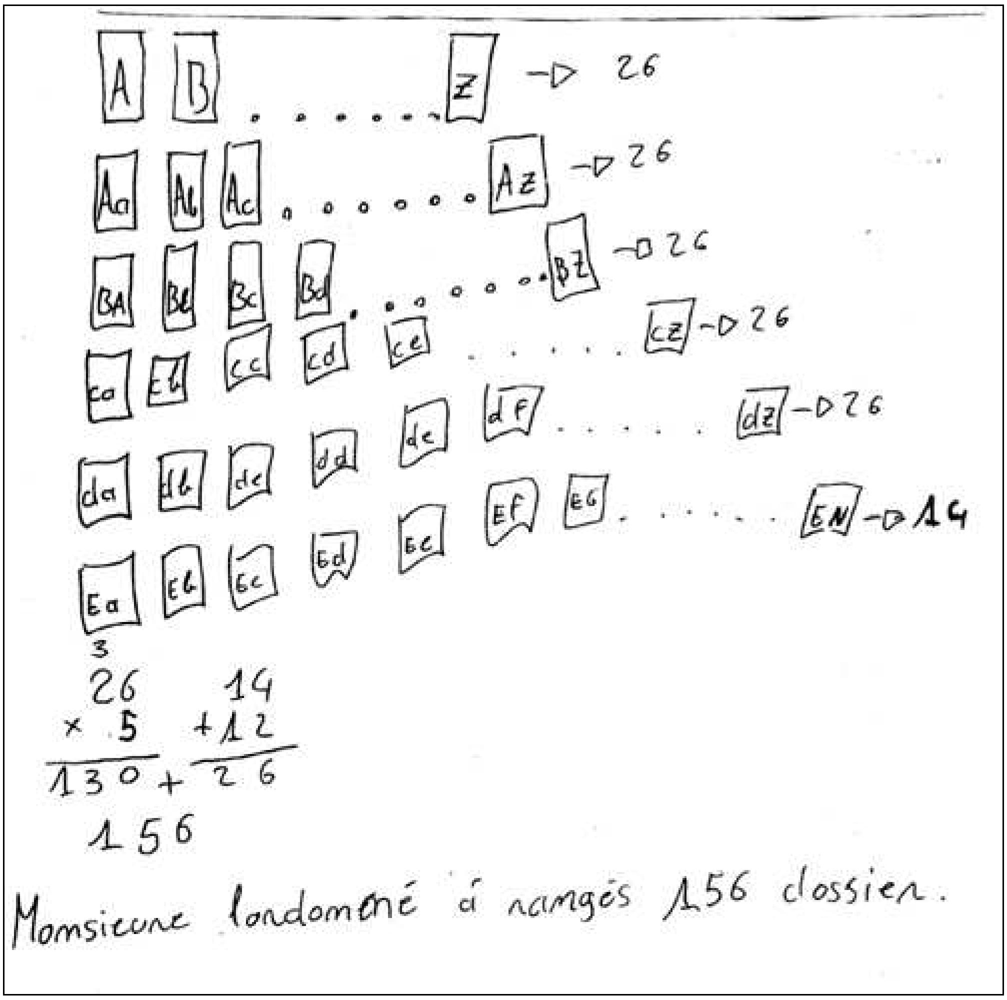
Voici un problème proposé à des élèves de cycle III dans le cadre d'un « *Atelier de Résolution de Problème* » (*Problème extrait du fichier Evariste APMEP d'après une épreuve du rallye mathématique de Maine et Loire en 1991) :*

Une idée pour ranger son bureau ...
Monsieur Lordonné a rangé tous ses dossiers.
Il a numéroté le premier ***A****, le deuxième* ***B****, le troisième C, etc ... jusqu'à* ***Z****.*
Ensuite il a numéroté ***AA****,* ***AB****,* ***AC****, etc ... jusqu'à* ***AZ ;*** *puis* ***BA****,* ***BB****,* ***BC****, etc ... jusqu'à* ***BZ ;*** *puis* ***CA****,* ***CB****, ... et ainsi de suite. Le dernier dossier est numéroté* ***EN****.*
Question : combien de dossiers Monsieur Lordonné a-t-il rangés ?

Les élèves sont invités à résoudre le problème par deux et sans aide. Quatre productions de groupes sont présentées en **Annexe**.

5. Décrire deux procédures permettant de résoudre ce problème.
6. Pour chacune des productions d'élèves, décrire les erreurs éventuelles et émettre des hypothèses sur leur origine (*Les réponses seront présentées dans un tableau*).
7. Le maître demande, dans un premier temps, à Lou et Charline de présenter leur production au groupe classe. Quel bénéfice l'ensemble des élèves peut-il en tirer ?
8. Le maître demande, dans un second temps, à Pauline et Elise de présenter leur production au groupe classe, avant de proposer le nouveau problème « Si le dernier dossier est numéroté **SV**, combien de dossiers Monsieur *Lordonné* a-t-il rangés ? ». Quel est l'impact escompté de cette façon de procéder ?

ANNEXE : les productions des binômes d'élèves



Maureen et **Justine**

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times \quad 5 \\ \hline 130 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 130 \\ + \quad 14 \\ \hline 144 \end{array}$$

Il a rangés 144 dossiers.

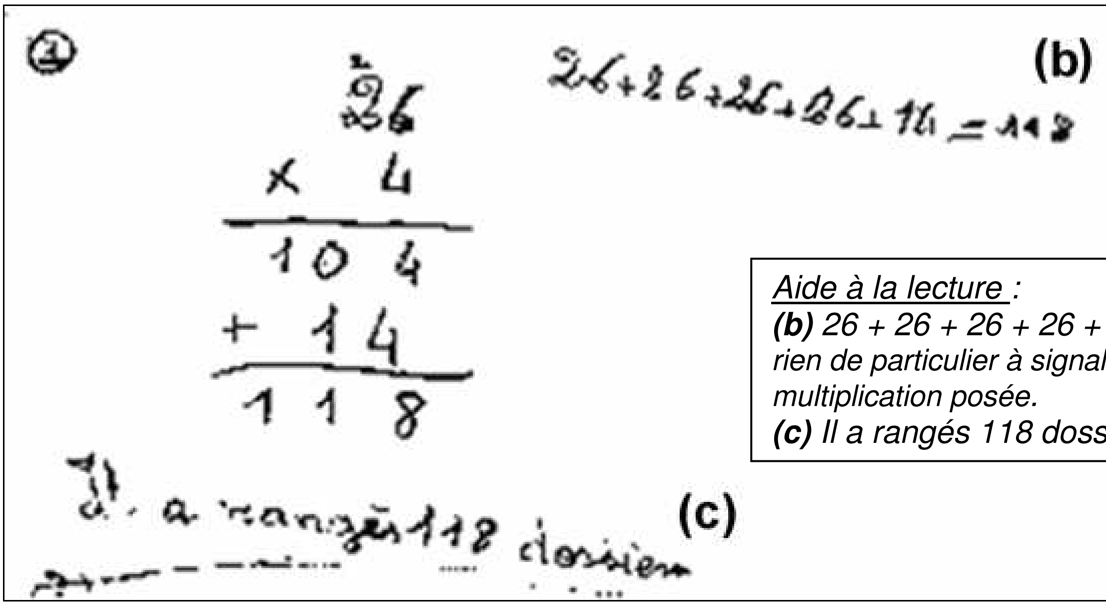
Pauline et **Elise**

(*Suite*)

<u>Aide à la lecture</u> :
(a) *1) Dans l'alphabet, il y a 26 lettres.*
A *à* ***Z*** *= 26*
AA *à* ***AZ*** *= 26 26*
BA *à* ***BZ*** *= 26 + 26*
CA *à* ***CZ*** *= 26 + 26*
DA *à* ***DZ*** *= 26 + 26*
EA *à* ***EZ*** *= 26 + 26*
FA *à* ***FZ*** *= 26 + 26*
GA *à* ***GN*** *= 14 +14*

170
Monsieur Lordonné a rangés 170 dossiers

Lou et **Charline**



<u>Aide à la lecture</u> :
(b) *26 + 26 + 26 + 26 + 14 = 118, rien de particulier à signaler pour la multiplication posée.*
(c) *Il a rangés 118 dossiers*

Alex et **François**