

Numération Babylonienne et Questions Complémentaires.

(D'après Concours Blanc, académie de LYON).

Partie Mathématique : un « retour » sur la numération babylonienne.

Voici un système de numération qui est apparu il y a plus de 4 000 ans. Ce système ne comporte que deux symboles : le **clou** Υ et le **chevron** \leftarrow . (Cf. le fichier **BABYLONE**).

1) Pour travailler la mémoire des **TD** du début de l'année !

(i) A l'aide des correspondances établies en **TD**, convertir les nombres suivants dans notre système de numération.

$\Upsilon \Upsilon$	$\leftarrow \Upsilon$	$\leftarrow \leftarrow \leftarrow$	$\leftarrow \Upsilon \Upsilon \Upsilon \Upsilon$
	Υ	$\Upsilon \Upsilon \Upsilon$	$\leftarrow \leftarrow \leftarrow$
$\leftarrow \leftarrow \leftarrow$		$\leftarrow \Upsilon$	$\leftarrow \leftarrow \Upsilon \Upsilon \Upsilon$

(ii) Toujours à l'aide des correspondances établies en **TD**, convertir en numération babylonienne les nombres 425, 3 765 et 459 753.

2) Dégager les caractéristiques de ce système de numération ? Quels « avantages » et quels « inconvénients » possède-t-il par rapport au système décimal ?



Les questions qui suivent portent sur deux extraits du manuel *CAP MATHS CMI* (Editions HATIER).

Les deux pages sur lesquelles sont bâties les questions sont en **ANNEXE A**, page 8 du manuel de l'élève (page 2 sur 5 de ce document) et en **ANNEXE B**, page 11 du manuel de l'élève (page 3 sur 5 de ce document).

3) a) En se reportant à l'**ANNEXE A**, répondre à la question ②. Attention, il y a trois triangles blancs qui « touchent » (ou qui sont inclus dans) l'illustration.

b) En se reportant à l'**ANNEXE B**, répondre à la question ② de la partie **Recherche**.

Questions Complémentaires.

4) a) Quelle est l'intention de l'enseignant (*en fait, des auteurs du manuel*) qui propose(nt) la question ① de l'activité de **Recherche** de la page 8 (**ANNEXE A**) ?

b) Toujours pour la question ① de la page 8 du manuel, les auteurs préconisent la modalité de travail ou le scénario suivant :

- travail de groupe,
- recensement des valeurs trouvées pour chaque type de jetons (toutes les propositions sont écrites au tableau) puis échange à propos de la validité,
- quelques équipes expliquent comment elles ont trouvé les valeurs de chaque type de jetons.

Justifier ces choix de « gestion » de la classe.

c) Pour la question ② de l'activité de **Recherche** de la page 8 du manuel (**ANNEXE A**), donner deux procédures que les élèves peuvent utiliser pour répondre à la consigne.

d) Toujours pour la question ② de l'activité de **Recherche** de la page 8 du manuel, trouver trois variables didactiques ou variables de situation de ces « problèmes ».

e) Pour la question ② de l'activité de **Recherche** de la page 11 du manuel (**ANNEXE B**), donner deux procédures que les élèves peuvent mobiliser pour répondre à la consigne.

ANNEXE A

Recherche

Des jetons de valeurs différentes

Calculo et Géomette jouent avec des jetons de formes et de couleurs différentes.

Ils ont six sortes de jetons :      

et il y a beaucoup de jetons de chaque sorte.

1 Aide Calculo à trouver la valeur que Géomette a donné à chaque jeton.

J'ai réalisé des collections de jetons.
Je te donne la valeur totale de chacune.
Avec ces indications, trouve la valeur
de chaque sorte de jetons.



	20 013
--	--------

	1 204
--	-------

	4 030
--	-------

	400 010
--	---------

	302
--	-----

	1 000
--	-------

2 Calculo prépare, à son tour, une collection de jetons.
Les jetons sont de la même valeur que ceux de Géomette.

Il est possible de réaliser
une collection qui a la même valeur
que la mienne, mais en utilisant
beaucoup moins de jetons.
Peux-tu la trouver ?



A large collection of various geometric tokens (circles, triangles, squares) scattered on a surface.

Attention : tu dois utiliser le moins possible de jetons.

ANNEXE B

QUINZAINE 1
SEANCE 5

Comparaison de nombres

Recherche

Qui a le plus ? Qui a le moins ?

Calculo, Numérix et Géomette ont chacun une collection de jetons.
Leurs jetons ont les mêmes valeurs que ceux de la recherche précédente.

Calculo	
Numérix	
Géomette	

- 1 Qui a réalisé le plus grand nombre ? Qui a réalisé le plus petit nombre ?
- 2 Range les nombres par ordre croissant.

Exercices

- 1 Complète avec < ou >.

52 634 ... 56 430	4 987 ... 40 001	210 568 ... 108 650	78 689 ... 78 869
-------------------	------------------	---------------------	-------------------
- 2 Range les nombres suivants par ordre croissant :

40 760	7 640	604 007	400 670	40 706	46 607	4 670
--------	-------	---------	---------	--------	--------	-------
- 3 Voici 5 chiffres : 0 3 4 6 7

Avec ces 5 chiffres, écris tous les nombres compris entre 40 000 et 41 000 et range-les par ordre croissant. Pour écrire un nombre, tu ne dois pas utiliser plusieurs fois le même chiffre.

Pour savoir comment utiliser les signes < > et comprendre les termes *ordre croissant* et *ordre décroissant*.
— DICO-MATHS ► p. 4

ELEMENTS de CORRECTION

Partie Mathématique : « retour » sur la numération babylonienne.

Questions 1) et 2). Pas de corrigé détaillé, il suffit de se reporter aux TD sur les numérations antiques pour trouver les pistes de réponses à ces questions.

Rappel 1 : tableau de numération du système babylonien. (Système « mixte » additif – positionnel).

On continue les groupements...	Les groupements par $60 \times 60 \times 60$	Les groupements par 60×60	Les groupements par 60	Les « unités ».

Rappel 2 : quelques « inconvénients » de ce système.

- Certains « grands » nombres nécessitent peu de chiffres dans leur écriture et d'autres en nécessitent beaucoup. *Exemples* : le nombre 216 120 ne contient « que » trois chiffres ; par contre le nombre 3 599 en contient vingt-huit ! (A vérifier !).

- Un « espace » délimite les différentes « colonnes » (*principe positionnel*). Cependant, la question de l'interprétation du nombre écrit se pose donc : elle est liée au contexte d'utilisation du dit-nombre ! Est-ce que le dernier chiffre de « droite » est toujours dans la « colonne » des unités ? ...

- L'absence du zéro est aussi préjudiciable à la lecture du nombre, même si un symbole a été proposé pour marquer cette absence (un clou penché !). Même si les babyloniens ont effectivement problématisé l'existence du « zéro »...

Question 3).

3) a). Avant de répondre à cette question, il semble pertinent de trouver la valeur des différents jetons.

Pour ce faire, on étudie l'item ① de la page 8 ! On applique donc la règle d'échanges « du n contre 1 ».

Il y a 31 jetons dans l'item ② : 2 ■, 2 □, 10 △, 17 ○. Quelle règle d'échanges ?

20 013	2 ■ 1 □ 3 △	Valeurs attribuées à chaque « style » de jeton : $\triangle = 1$; $\circ = 100$; $\square = 10$; $\blacksquare = 10\,000$; $\bullet = 100\,000$ et $\blacktriangle = 1\,000$. D'où la « règle d'échanges » : $10 \triangle$ contre $1 \square$; $10 \square$ contre $1 \circ$; ... (à terminer !).
1 204	1 ▲ 4 △ 2 ○	
4 030	4 ▲ 3 □	
400 010	4 ● 1 □	
1 000	10 ○	
302	3 ○ 2 △	

En appliquant la règle mise en évidence dans le tableau, la collection peut être remplacée par la « somme » : 2 ■, 1 ▲, 7 ○, 3 □, ce qui fait donc utiliser **13 jetons**.

3) b). Une piste de solution : se ramener à la base dix. Il y a d'autres techniques.

Calculo possède ainsi 1 304 « unités », Numérix en possède 40 000 et Géomette en possède 1 520. On a : $1\,304 < 1\,520 < 40\,000$, d'où le rangement : 1) Calculo, 2) Géomette et 3) Numérix.

Questions Complémentaires.

4) a). Il s'agit de revenir sur la compréhension globale et fine de notre système de numération décimal ; en particulier d'insister sur les notions d'échanges et de groupements à partir d'un matériel (*plutôt ludique*) et sur la signification d'un chiffre en fonction de sa position dans l'écriture usuelle d'un nombre. Il s'agit aussi de montrer qu'un même nombre peut s'écrire de façons différentes à l'aide des nombres 10, 100, 1 000, ...

4) b). Le travail en groupes permet de diminuer les risques de blocage en facilitant la confrontation des idées et offre une plus grande possibilité de validation des conjectures (*Hypothèse* : on a plus de « facilité » pour valider ou invalider la production d'un camarade que sa propre production).

La mise en commun des valeurs trouvées pour chaque type de jeton entraîne une confrontation des valeurs trouvées et permet d'engager un débat dans la classe. Cette mise en commun permet aussi de finaliser le travail de groupe.

On peut ajouter que l'explicitation des méthodes de recherche permet de faire le lien entre notre système de numération et en particulier ici le sens de la position des chiffres dans un nombre et la valeur des jetons. Certains groupes qui n'ont pas trouvé n'auront peut être pas perçu ce lien. Ce moment est bien sûr essentiel pour l'objectif visé.

Commentaire. Le dispositif de travail en classe est, par définition, au service du savoir, c'est-à-dire des compétences et des connaissances visées et non pas le contraire ! On ne fait pas du travail en groupes parce qu'il faut en faire. Pas de position idéologique sur ce point. De fait, le PE doit ainsi soigner ce qu'on appelle « l'analyse a priori » de la situation « d'enseignement-apprentissage » à présenter. Se pose donc le problème de la culture disciplinaire, didactique et pédagogique du PE.

4) c). Par procédure, on entend « technique », « démarche », « savoir-faire », ... non nécessairement expertes, mais (*suffisamment*) explicites, permettant de répondre à la consigne.

- Procédure 1. Les élèves peuvent revenir au nombre d'unités représenté par la collection de jetons en base 10, puis transformer ce nombre en jetons en jouant sur la position des chiffres dans le nombre ainsi obtenu.

- Procédure 2. En partant des jetons unités, puis en continuant par les jetons dizaines, centaines, ... effectuer des regroupements et des échanges avec des jetons d'unités supérieures, si la quantité ou le nombre dépasse 10.

4) d). Un point de vocabulaire : notion de **variable didactique**. Se reporter au **CM de DV**.

- Variable 1. *Le nombre de jetons représentés.* Plus ce nombre est important, plus les élèves ont des chances de faire des erreurs de dénombrement, quelle que soit la procédure utilisée.

- Variable 2. *Le nombre de catégories de jetons.* Plus ce nombre est important, plus il y a risque d'erreurs de toute sorte.

- Variable 3. *La disposition des jetons.* Si ces jetons sont regroupés par catégorie, la mise en œuvre des procédures 1. et 2. (Voir 4) c)) sont facilitées. Si les jetons sont disposés aléatoirement (*comme c'est le cas ici*) la tâche est plus complexe pour l'élève dans la mesure où il risque plus de faire une erreur de dénombrement.

- Variable 4. *Le nombre de catégories de jetons pour lesquels il y a plus de 10 unités.* On suppose bien sur ici qu'il y a au moins une catégorie de jetons pour lesquels leur nombre dépasse 10 sinon la question n'a pas de sens. De fait, chaque fois qu'il y a des échanges à effectuer cela « complexifie » la tâche de l'élève, mais c'est le but du jeu !

4) e). Procédure 1. Pour chaque enfant (Calculo, Numérix et Géomette), passer par un retour au nombre d'unités en base 10 et comparer deux à deux ces nombres, puis les ranger.

- Procédure 2. Effectuer les groupements et échanges pour chaque unité puis effectuer la comparaison deux à deux en commençant par les jetons de plus grande valeur. Ne pas oublier de ranger !

*On n'a pas complètement exploité le document figurant en ANNEXE B. La partie **Exercices** mérite qu'on s'y attarde. Quelques exemples de questions à prendre en charge.*

- *Comment justifier que les comparaisons sont correctes ou pas pour l'item ①. Rôle et décisions du PE en cas d'erreurs significatives ? ... Mêmes types de questions pour l'item ②. Que fait écrire le PE sur le cahier ou sur le Mémo pour décrire une ou des techniques de comparaison, de rangement. ...*

- *Concernant l'item ③, comment être certain qu'on a obtenu TOUS les nombres répondant à la question ? Quels contrôles ou vérifications peut-on faire ? ... **Au travail !***

CONCLUSION. Pour « faire le tour » des **QC** relatives au domaine **NUMERATION**, il convient maintenant de travailler des exercices où l'interrogation porte plus précisément sur **des analyses de productions d'élèves**. On peut utilement se référer à des annales (*plutôt récentes !*), avec une préférence marquée pour les Annales de la COPIRELEM.