UN B.A.-BA EN GEOMETRIE PLANE

Des mots à connaître et à savoir utiliser :

Dans un triangle : sommet, côté, médiane, médiatrice, hauteur, bissectrice, cercle circonscrit, cercle inscrit, centre de gravité, orthocentre, rectangle, isocèle, équilatéral, sommet principal, base, hypoténuse, opposé.

Dans un cercle : centre, diamètre, rayon, corde, points diamétralement opposés, tangente au cercle, angle au centre, angle inscrit, arc intercepté par un angle.

Avec des angles : aigu, obtus, plat, plein, droit, (~~*saillant*~~), (~~*rentrant*~~), inscrit dans un cercle, au centre, arc intercepté par un angle, alterne-interne, correspondant, opposé par le sommet, complémentaire, supplémentaire.

Avec des polygones : sommet, côté, diagonale, régulier, concave, convexe, rectangle, losange, carré, trapèze, parallélogramme, quadrilatère, « cerf-volant », pentagone, hexagone, octogone, décagone, dodécagone, …

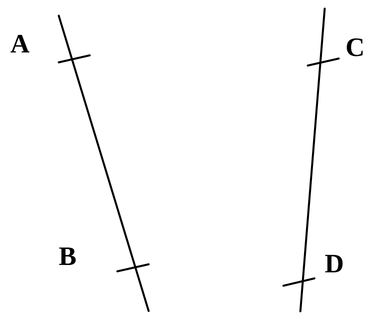
Des constructions à savoir faire :

(*Avec tout le matériel « usuel » utilisé en géométrie ou uniquement avec un compas et une règle non graduée*).

- La parallèle à une droite donnée passant par un point donné. (*Plusieurs techniques, en fonction des instruments autorisés*).
- La perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné. (*Idem ci-dessus*).
- La médiatrice d'un segment. *Application* : Le cercle circonscrit à un triangle. La bissectrice d'un angle. *Application* : Le cercle inscrit dans un triangle.
- Un triangle dont on connaît les longueurs des trois côtés. Un triangle dont on connaît les mesures des trois angles. *Observations et remarques* ???
- Un triangle dont on connaît les mesures de deux angles et la longueur d'un côté. Un triangle dont on connaît la mesure d'un angle et la longueur de deux côtés.
- Un angle de 30°, de 45°, de 60° ou de 90° (*Sans rapporteur ni équerre, zut !!!*).
- La tangente à un cercle passant par un point donné. Le centre d'un cercle donné. Le milieu d'un segment.
- Des quadrilatères particuliers à partir de leurs côté, leurs angles ou leurs diagonales. Des polygones réguliers.

Des questions, *pas toujours pertinentes, mais tant pis !****, auxquelles il faut savoir répondre :***

1. Si **I** est le milieu du segment **[AB]**, que peut-on dire des segments **[AI]** et **[IB]** ?
2. Combien peut-on tracer de droites passant par un point ? Et par deux points ?
3. Combien un segment contient-il de points ??? (*Zarrbi !*)
4. Que peut-on dire de deux droites qui ne sont pas sécantes ?
5. Que peut-on dire de deux droites qui ne sont pas parallèles ?
6. Que peut-on dire de deux droites qui ne sont pas perpendiculaires ?
7. Que peut-on dire des deux droites **(AB)** et **(CD)** ci-contre ?



8. Trois points **A**, **B** et **C** sont alignés sur une droite tracée sur une feuille. Quels noms peut-on donner à cette droite (*sans ajouter de notation*) ?

9. Un diamètre d'un cercle est-il une corde de ce cercle ?

10. Si **A** et **B** sont deux points distants de 5cm, combien existe-t-il de points **M** tels que **AM** = 3cm et **BM** = 4cm ? de points **N** tels que **AN** = **BN** = 2,5cm ? de points **P** tels que **AP** = **BP** ? Reprendre les questions précédentes avec **AB** = 2cm, puis avec **AB** = 8cm.

11. Combien peut-on tracer de droites parallèles à une droite donnée passant par un point donné ? Justifier…

12. Combien peut-on tracer de droites perpendiculaires à une droite donnée passant par un point donné ? Justifier…

13. Si **A** et **B** sont deux points distincts, combien peut-on tracer de cercles passant par **A** et **B** ? Justifier…

14. Si **A**, **B** et **C** sont trois points distincts, combien peut-on tracer de cercles passant par **A**, **B** et **C** ? Justifier…

15. Comment peut-on retrouver le milieu d'un segment donné uniquement avec un compas et une règle non graduée ? *Trop facile !*

16. Comment peut-on « retrouver » le centre d'un cercle donné uniquement avec un compas et une règle non graduée ? *Peut-être un peu moins facile !*

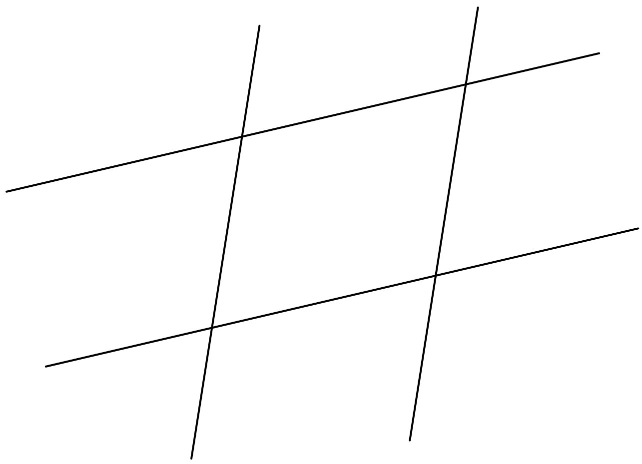
17. Si **A**, **B**, **C** et **D** sont quatre points d'un cercle de centre **O**, que peut-on dire des angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ADB}$? Et des angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{AOB}$?

18. La demi-droite **[Au)** est la bissectrice d'un angle $\widehat{xAy}$: que peut-on dire des angles $\widehat{xAu}$ et $\widehat{uAy}$?

19. Comment construit-on la bissectrice d'un angle uniquement avec un compas et une règle non graduée ? *Encore trop facile !*

20. **Vrai** ou **faux** ? : **(i)** dans un triangle rectangle, les deux angles qui ne sont pas droits sont complémentaires.

(ii) les trois angles d'un triangle sont « *toujours* » (*aïe !*) supplémentaires.



21. Sur la figure ci-contre, les droites **(xx')** et **(yy')** sont parallèles de même que les droites **(tt')** et **(zz')**. Les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier[1].

- les angles $\widehat{t'AB}$ et $\widehat{xAC}$ sont égaux,
- les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{BDy'}$ sont égaux,
- les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABD}$ sont égaux,
- les angles $\widehat{ACD}$ et $\widehat{BDy'}$ sont égaux,
- les angles $\widehat{xAt'}$ et $\widehat{t'Ax'}$ sont complémentaires,
- les angles $\widehat{ACD}$ et $\widehat{DBA}$ sont égaux,
- les angles $\widehat{xAt}$ et $\widehat{zDy'}$ sont supplémentaires. (***Figure ci-dessus à compléter avec les « bonnes » lettres aux « bons »endroits !***).

[1] Un bon exercice : les noms des « objets » de la figure n'y sont pas. Zut, mais quand même ! A vous de jouer, avec les informations du texte !

Quelques constructions (et justifications à produire) :

22. Placer deux points **A** et **B** tels que **AB** = 4cm. Hachurer l'ensemble des points situés à moins de 2cm de **A** et à plus de 3cm de **B**.

23. Placer deux points **C** et **D** tels que **CD** = 4cm. Hachurer l'ensemble des points situés à moins de 2cm de **C** et à moins de 3cm de **D**.

24. Placer deux points **A** et **B** distants de 4cm. Hachurer l'ensemble des points **M** tels que **AM** > **BM**.

25. Construire, sans rapporteur ni équerre, un angle de 90°, 60°, 45°, 30°.

26. Dans chacun des cas suivants ; construire, si c'est possible, un triangle **ABC** (*rapporteur autorisé*) :

- **AB** = 5cm, **BC** = 3cm, **AC** = 1cm,
- **AB** = 5cm, $\widehat{ABC}$ = 40° , $\widehat{BAC}$ = 60°,
- **AC** = 6cm, **BC** = 4cm, $\widehat{ACB}$ = 50°,
- **AC** = 5cm, $\widehat{ACB}$ = 40°,
- **AB** = 4cm, $\widehat{ABC}$ = 60°, $\widehat{ACB}$ = 30°, $\widehat{CAB}$ = 50°,
- **AB** = 5cm, $\widehat{ABC}$ = 40° et $\widehat{ACB}$ = 60°.

27. Construire uniquement avec le compas et une règle graduée un triangle **ABC** rectangle en **A** tel que : (*deux items*).
(i) AB = 2cm et **AC** = 3cm ; **(ii) AB** = 3cm et **BC** = 5cm.

28. Construire, avec un rapporteur, un dodécagone régulier.

29. Construire un hexagone régulier uniquement avec un compas et une règle non graduée. Justifier. *Trop facile !*

30. Dans un triangle **ABC**, placer le point **I** milieu du segment **[AC]**. Tracer la parallèle à **(BC)** passant par **I** : elle coupe **(AB)** en **K**. Tracer la parallèle à **(AC)** passant par **K** : elle coupe **(BC)** en **J**. Tracer la parallèle à **(AB)** passant par **J** : elle coupe **(AC)** en **L**. Que remarque-t-on ? Quelles propriétés permettent de prouver ce résultat ?

31. Tracer un triangle **ABC**. La perpendiculaire à **(AB)** passant par **C** coupe la perpendiculaire à **(AC)** passant par **B** en un point **H**. Soient **I** et **J** les milieux respectifs des segments **[AC]** et **[AB]**. Les segments **[BI]** et **[CJ]** se coupent en **G**. La perpendiculaire à **(AC)** passant par **I** coupe la perpendiculaire à **(AB)** passant par **J** en un point **O**. Tracer la droite **(OG)** : que peut-on remarquer ? Que représentent les points **O**, **G** et **H** pour le triangle **ABC** ?

32. Tracer un cercle de centre **K**. Placer sur ce cercle deux points **D** et **F** non diamétralement opposés. Placer **I** le milieu du segment **[DF]**. Tracer les tangentes au cercle en **D** et **F** : elles se coupent en **J**. Tracer **(KJ)**. Que remarque-t-on ? Comment pourrait-on le démontrer ?

33. Deux cercles (**C1**) et (**C2**) de centres **A** et **B** et de rayons distincts se coupent aux points **C** et **D**. Les tangentes à (**C1**) en **C** et **D** se coupent en **I** et coupent le cercle (**C2**) respectivement en **K** et **L**. Les tangentes à (**C2**) en **K** et **L** se coupent en **J**. Tracer la droite **(JI)**. Que remarque-t-on ? Comment pourrait-on le démontrer ?

34. **ABC** est un triangle rectangle en **B** et **M** un point de **[AB]**. La perpendiculaire à **(AC)** passant par **M** coupe la droite **(BC)** en **I**. Que peut-on dire des droites **(CM)** et **(AI)** ? Justifier…

Les réponses (*rapides !*) aux questions :

1. Les segments ont la même longueur (mais ne sont pas égaux !) : **AI** = **IB** mais **[AI]** ≠ **[IB]**.
2. Par un point il passe une infinité de droites, mais par deux points distincts il n'en passe qu'une et une seule (*dans la géométrie euclidienne !*)
3. Une infinité. *Signification et « sens » ?*
4. Elles sont parallèles.
5. Elles sont sécantes, en quel point ?
6. Rien de spécial !
7. Elles sont sécantes, en quel point ?
8. **(AB)**, ou **(AC)**, ou **(BC)**, ou **(BA)**, ou **(CA)**, ou **(CB)**.
9. Oui. *Rien de plus à dire ?*
10. Si **AB** = 5cm : deux points **M1** et **M2** (intersection de deux cercles), un seul point **N**, une infinité de points **P** (= TOUS les points de la médiatrice de **[AB]**)
Si **AB** = 2cm : deux points **M1** et **M2**, deux points **N1** et **N2**, une infinité de points **P**.
Si **AB** = 8cm : pas de point **M** ni de point **N**, une infinité de points **P**.
11. Une seule (*en géométrie euclidienne*).
12. Idem.
13. Une infinité : TOUS les centres sont sur la médiatrice de **[AB]**.
14. Si les trois points sont alignés : aucun. Sinon : un seul, le cercle circonscrit au triangle.
15. Il suffit de construire sa médiatrice comme ensemble des points équidistants des deux extrémités du segment.
16. Il suffit de construire les médiatrices de deux cordes du cercle (*en choisissant des cordes dont les médiatrices sont sécantes !*).
17. $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ADB}$ sont de même mesure ou supplémentaires. $\widehat{AOB}$ et 2$\widehat{ACB}$ sont de même mesure ou leur somme est égale à 360°.
18. Même mesure (et symétriques par rapport à **[Au)**).
19. On construit la médiatrice de deux points équidistants du sommet de l'angle et situés sur les côtés de l'angle.
20. **Vrai** car la somme des mesures des trois angles d'un triangle est égale à 180°.
Faux car on ne peut pas parler de *trois* angles supplémentaires.
21. **Vrai** : opposés par le sommet **Vrai** : alternes-internes
Faux ; Vrai : correspondants **Faux** : supplémentaires
Vrai : opposés dans un parallélogramme **Vrai** : $\widehat{zDy'}$ = $\widehat{tCy'}$ = $\widehat{tAx'}$ (deux à deux correspondants).

Quelques démonstrations :

30. On remarque que les points **I** et **L** sont confondus. *Propriété* que l'on peut utiliser : Dans un triangle, si une droite est parallèle à un côté et passe par le milieu d'un deuxième côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu. (*Conséquence de la réciproque du théorème de Thalès*).
Ici : La droite **(IK)** est parallèle au côté **[BC]** et passe par le milieu **I** du côté **[AC**], donc elle coupe le côté **[AB]** en son milieu : **K** est le milieu de **[AB]**. De même, on peut dire que **J** est le milieu de **[BC]**, puis que **L** est le milieu de **[AC]**. Or, le milieu de **[AC]** est le point **I**. Donc les points **I** et **L** sont confondus.

31. Les points **O**, **G** et **H** sont alignés. La démonstration de cette propriété est trop longue pour être demandée sans indications intermédiaires. On peut néanmoins remarquer que **O** est le centre du cercle circonscrit au triangle, **G** est son centre de gravité et **H** son orthocentre. (Cette droite s'appelle ***la droite d'Euler*** du triangle.)

32. On remarque que la droite **(KJ)** passe par le point **I** : c'est la médiatrice de **[DF]**, ou la bissectrice de $\widehat{DKF}$ et de $\widehat{DJF}$ ou un axe de symétrie de l'ensemble de la figure.
Une démonstration possible : on montre que les trois points **I**, **J** et **K** appartiennent à la médiatrice de **[DF]**. **D** et **F** sont sur un même cercle de centre **K**, donc **KD** = **KF** d'où **K** est sur la médiatrice de **[DF]**. **I** est le milieu de **[DF]** donc **I** est sur la médiatrice de **[DF]**.
La droite **(DJ)** est la tangente en **D** au cercle de centre **K** donc **(DJ)** est perpendiculaire à **(KD)**, donc le triangle **KDJ** est rectangle en **D**.
De même le triangle **KFJ** est rectangle en **K**. Ces deux triangles ont un côté commun **[KJ]**, deux côtés de même longueur **[KD]** et **[KF]** et deux angles de même mesure $\widehat{KDJ}$ et $\widehat{KFJ}$: ils sont donc isométriques (superposables) et leurs troisièmes côtés sont de même longueur. Donc **JD** = **JF** et on peut en déduire que **J** est sur la médiatrice de **[DF]**.
Les trois points **I**, **J** et **K** sont donc alignés (sur la médiatrice du segment **[DF]**).

33. On remarque que la droite **(JI)** passe par les points **A** et **B**.
On va montrer que cette droite est la médiatrice commune de **[CD]** et de **[KL]**.

- ♥ Les points **C** et **D** sont sur un même cercle de centre **A** donc **AC** = **AD** et **A** est sur la médiatrice de **[CD]**. De même, **B** est sur la médiatrice de **[CD]**. La droite **(AB)** est donc la médiatrice de **[CD]**.
- ♥ On pourrait montrer comme dans l'exercice 32 que **I** est sur la médiatrice de **[CD]** mais je vais utiliser ici une autre méthode : On considère la symétrie d'axe **(AB)** : Par cette symétrie, **C** a pour image **D** (la médiatrice d'un segment est un axe de symétrie de ce segment) et le point **A** a pour image lui-même (puisqu'il est sur **(AB)**). La droite **(CI)** est la perpendiculaire à **(AC)** passant par **C**, donc son symétrique est la perpendiculaire à **(AD)** passant par **D**, c'est-à-dire la droite **(DI)**. Or, le point **I** est le point d'intersection d'une droite et de son symétrique : il est donc sur l'axe de symétrie. On en déduit que **I** appartient à **(AB)**.
- ♥ On vient de voir que **(CI)** et **(DI)** sont symétriques par rapport à **(AB)**. De plus, le cercle (**C2**) est son propre symétrique (**(AB)** est un de ses diamètres, donc un de ses axes de symétrie). Or, le point **K** appartient simultanément à la droite **(CI)** et au cercle (**C2**) : son image est donc sur la droite **(DI)** et sur le cercle (**C2**). Le symétrique de **K** par rapport à la droite **(AB)** est donc le point **L** (ce qui permet de dire que la droite **(AB)** est aussi la médiatrice du segment **[KL]** !)
- ♥ De même que pour le point **I** : puisque le point **J** appartient à la perpendiculaire à **(BL)** passant par **L** et à la perpendiculaire à **(BK)** passant par **K** et que ces deux droites sont symétriques par rapport à **(AB)**, **J** est sur la droite **(AB)**.
- ♥ Les points **I** et **J** appartiennent à la droite **(AB)**, donc les quatre points **A**, **B**, **I** et **J** sont alignés. On peut conclure : la droite **(IJ)** passe par les deux centres **A** et **B**.

34. Les droites **(CM)** et **(AI)** sont perpendiculaires car **(CM)** est la hauteur issue de **C** dans le triangle **AIC**.
En effet :
♥ **(IM)** ⊥ **(AC)** par hypothèse, donc **(IM)** est une hauteur de **AIC**.
♥ De plus, **(AM)** ⊥ **(IC)** car **(AB)** ⊥ **(BC)** et **(AB) = (AM)** et **(BC) = (IC)**.
♥ Donc **(AM)** est une deuxième hauteur de **AIC**.
♥ Les deux hauteurs **(IM)** et **(AM)** se coupent en **M** donc **M** est l'orthocentre du triangle **AIC** et la troisième hauteur est la droite **(CM)** qui sera perpendiculaire à **(AI)**.

Voilà pour l'essentiel, à vous de « jouer »…