École supérieure du professorat et de l'éducation
Académie d'Orléans-Tours

UNIVERSITE D'ORLEANS

~~GCD DE *MATHÉMATIQUES*~~

CT/CC – M2_PFE
DECEMBRE 2016
SITE DE BLOIS. *JBN* ET *PW*

Ce sujet contient un énoncé de problème, un volet professionnel et une question de cours (*facultative, hors barème*). Il comprend trois pages et doit être traité en une heure et demie.

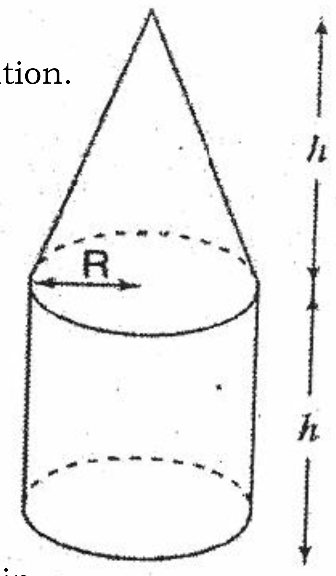
L'utilisation du matériel « usuel » de géométrie plane (*compas, règle graduée, équerre, rapporteur, gabarits divers, …*) et des calculatrices dites de « poche », y compris les programmables, alphanumériques ou à écran graphique est autorisée. (*Il est rappelé que ces calculatrices doivent être autonomes, sans possibilité d'usage d'une imprimante, sans aide « extérieure »*).

PROBLEME : le MOULIN à vent…

Un moulin à vent est formé de deux solides géométriques :

Un cylindre (*droit de révolution*) surmonté d'un cône de révolution.

Cf. figure ci-contre



Le cylindre et le cône ont la même hauteur $\boldsymbol{h}$ et une base commune de même rayon $\boldsymbol{R}$.

PARTIE 1

1. Montrer que le volume **V** de ce moulin est égal à :

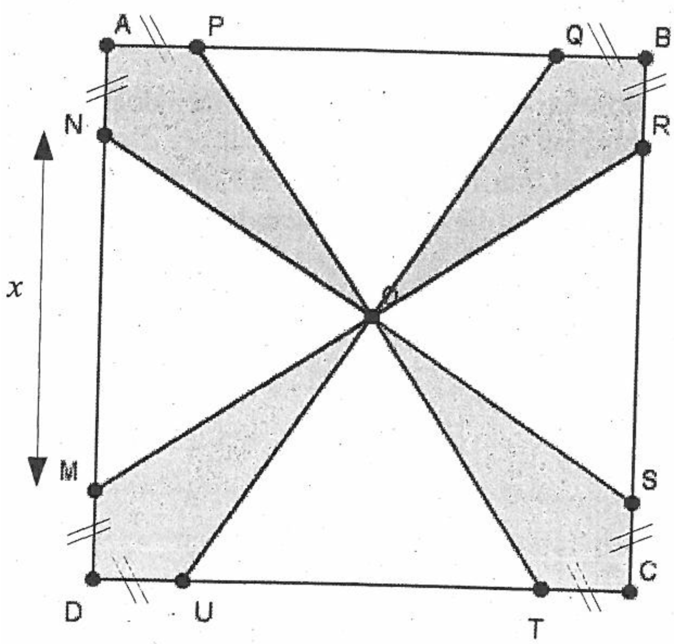
$$\mathbf{V} = \frac{4\,pi\,\boldsymbol{R}^2\boldsymbol{h}}{3}$$

<u>*Rappel*</u> : volume (*cylindre*) = aire (*disque de base*) × hauteur et volume (*cône*) = 1/3 × aire (*disque de base*) × hauteur.

2. Application numérique : on pose $\boldsymbol{h}$ = 6m et $\boldsymbol{R}$ = 3m. Calculer alors la valeur arrondie au m³ du volume de ce moulin.

PARTIE 2

Les ailes du moulin sont les parties grisées, découpées dans une plaque carrée représentée ci-contre.



<u>*Description de la figure*</u>. **ABCD** est un carré de centre **O**, de côté 12m. Les triangles **(OMN)**, **(OPQ)**, **(ORS)** et **(OUT)** sont superposables et isocèles en **O**.
On pose **MN** = $\boldsymbol{x}$ et on appelle **H** le milieu de **[MN]**.

3. Exprimer, en fonction de $\boldsymbol{x}$, l'aire du triangle **OMN**. En déduire alors que l'aire totale des quatre ailes du moulin est égale à 144 – 12$\boldsymbol{x}$.

4. Construire dans un repère la représentation graphique de la fonction $\boldsymbol{f}$ qui à tout $\boldsymbol{x}$ compris entre 0 et 12, associe l'aire totale $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ des quatre ailes du moulin.

5. a) Déterminer graphiquement une valeur approchée de $\boldsymbol{x}$, lorsque l'aire des ailes du moulin est égale à 20m². *Marquer les traces des « pointages » sur la représentation graphique.*

5. b) Calculer la valeur exacte de $\boldsymbol{x}$, lorsque l'aire des ailes du moulin est égale à 36m².

6. Dans cette question, on pose $\boldsymbol{x}$ = 9m. Calculer la valeur exacte de la longueur **OM** et montrer que le périmètre des ailes du moulin est égal à 72m.

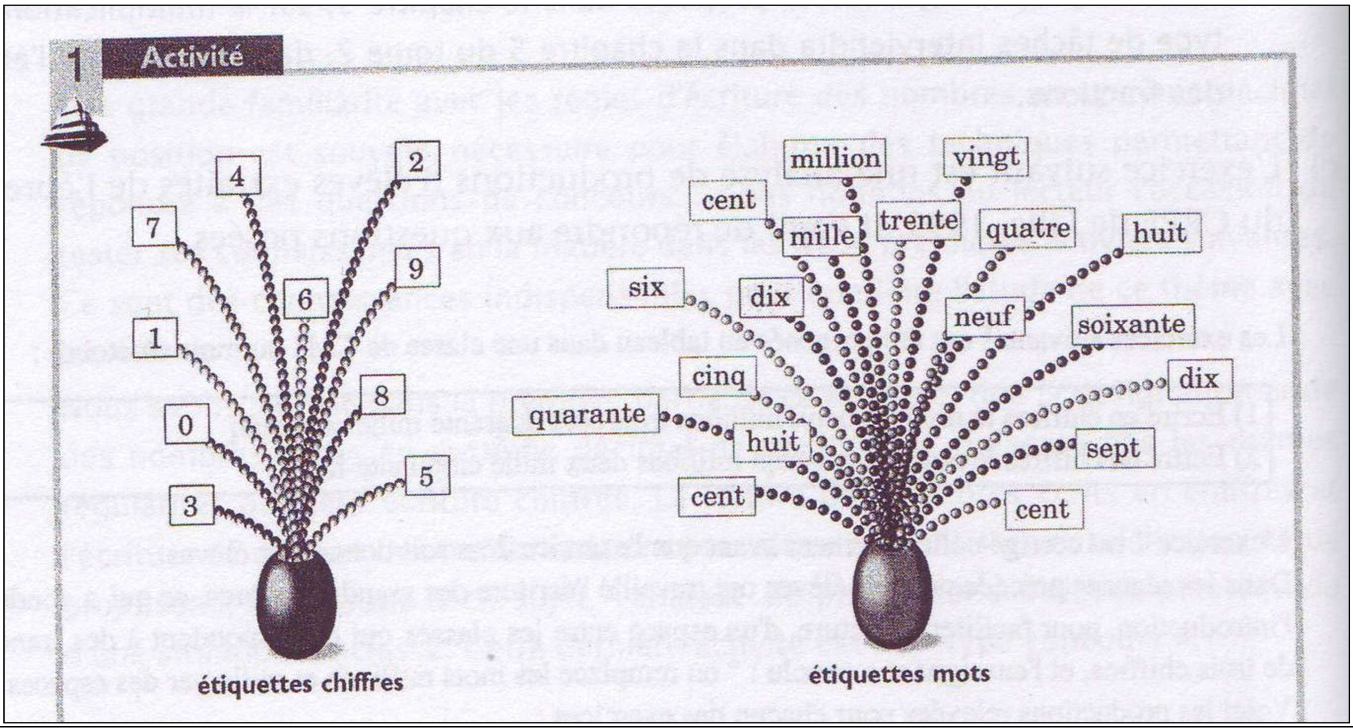
7. Déterminer, au degré près, la mesure de l'angle ∠**HOM**. En déduire une valeur, au degré près, de la mesure de l'angle ∠**MOU**.

8. Calculer la valeur arrondie, au centimètre, de la longueur **MU**.

9. On place sur l'aile **OMDU** une baguette de renfort **[JK]**, parallèle à **[MU]** ; avec **J** le point de **[OM]** situé à 3m de **O**, avec **K** sur **[OU]**. Calculer la valeur arrondie au centimètre de la longueur de la baguette de renfort **[JK]**.

VOLET PEDAGOGIQUE et PROFESSIONNEL, *d'après Partiel S1_M2_2015*

Voici ci-dessous un extrait d'un manuel (*collection Diagonale*) de l'élève de la classe de CM2, programmes 2002. (*Sujet proposé dans les années 2010*).



CONSIGNES aux élèves (*extraites du manuel*)

1. a. Prends au hasard cinq *étiquettes-chiffres* du bouquet de gauche.

Avec ces étiquettes, écris le nombre le plus grand possible et le nombre le plus petit possible.

Avec les *étiquettes-chiffres* du bouquet, écris le plus petit nombre et le plus grand nombre en prenant maintenant, toujours au hasard, sept étiquettes.

Ecris ces nombres en toutes lettres.

1. b. Maintenant, prends, au hasard, cinq *étiquettes-mots* et recommence la même activité (*tu as le droit d'ajouter des tirets* $\boxed{-}$*, le mot* $\boxed{\textit{et}}$ *et la lettre* $\boxed{\textit{s}}$ *autant de fois que tu veux*).

1. <u>A propos de l'activité **1. a.**</u>

a) Si on prend les étiquettes $\boxed{\mathbf{8}}$, $\boxed{\mathbf{4}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{0}}$ et $\boxed{\mathbf{9}}$, quelles réponses peut-on donner à la première consigne ?

b) A la fin de cette activité, le maître cherche à mettre en forme une règle concernant la comparaison de nombres en écriture chiffrée. Pourquoi passe-t-il de cinq à sept étiquettes ?

c) Ecrire une règle à destination des élèves.

2. <u>A propos de l'activité **1. b.**</u>

a) En cours d'activité, le maître relève quelques productions d'élèves concernant la tâche liée au « nombre le plus grand » obtenu avec des « étiquettes-mots ».
L'élève Anatole a écrit « *neuf millions sept cent six* » avec ses cinq étiquettes.
L'élève Basile a écrit « *sept mille six cent dix* » avec ses cinq étiquettes.

Avec les cinq étiquettes de chaque élève, quelle « meilleure » réponse peut-on proposer à la place de chacun d'eux ?

b) Formuler deux hypothèses expliquant les démarches mises en œuvre par les élèves pour donner leur nombre. Quelle aide peut proposer le maître à ces élèves ?

3. <u>A propos des deux activités</u>. Quel intérêt y a-t-il à proposer les deux activités **1. a.** et **1. b.** en même temps ? Argumenter de façon succincte.

On est en 2016-2017, on applique donc les nouveaux programmes. Cette double activité est-elle encore aujourd'hui d'actualité ? Justifier, de façon succincte, en termes de compétences et de connaissances.

QUESTION de COURS, FACULTATIVE ! Ouf !

1. A partir du cycle II, les élèves sont familiarisés avec la manipulation de la ***règle***, graduée ou non. Citer les trois principales fonctions de cet instrument. *Si possible ! Donner des exemples simples de tâches associées à chacune de ces fonctions.*

2. Même question que **1.**, mais avec l'instrument ***compas***. Citer les deux principales fonctions de cet instrument. *Si possible ! Donner des exemples simples de tâches associées à chacune de ces fonctions.*

Pistes de **CORRECTION** et **Commentaires *PW***

PROBLEME : le MOULIN à vent…

PARTIE 1

1. On pose : **V** = volume **V1** du cylindre + volume **V2** du cône.
On a donc : **V1** = pi × ***R*** × ***R*** × ***h*** et **V2** = 1/3 × pi × ***R*** × ***R*** × ***h***
d'où **V** = pi × ***R*** × ***R*** × ***h*** + 1/3 × pi × ***R*** × ***R*** × ***h*** = (pi + 1/3 × pi) × ***R*** × ***R*** × ***h***
= 4/3 × pi × ***R*** × ***R*** × ***h*** = $\boxed{4/3 \times \text{pi} \times R^2 \times h}$.

Commentaires : question doublement « gratuite » ! En effet, on donne les formules à utiliser et la formule à trouver !!! Oui, mais, comment le (pi + 1/3 × pi) devient 4/3 × pi.
Bon d'accord, technique un peu « brute épaisse » : pi + 1/3 × pi = pi × (1 + 1/3) (*factorisation*) = pi × (3/3 + 1/3) = pi × 4/3 = 4/3 × pi !

2. Application numérique : on remplace h par 6m et R par 3m dans la formule ci-dessus. Valeur exacte du volume : **V** = 4/3 × pi × 3 (m) × 3 (m) × 6 (m) = 4/3 × pi × 54 (m^3) = 4 × pi × 18 (m^3) = $\boxed{72 \times \text{pi}\ (m^3) \approx 226\ (m^3)}$.
Commentaires : on arrondit « à la fin » et dans ce cas, la seule valeur qui répond à la question est 226m^3.

PARTIE 2

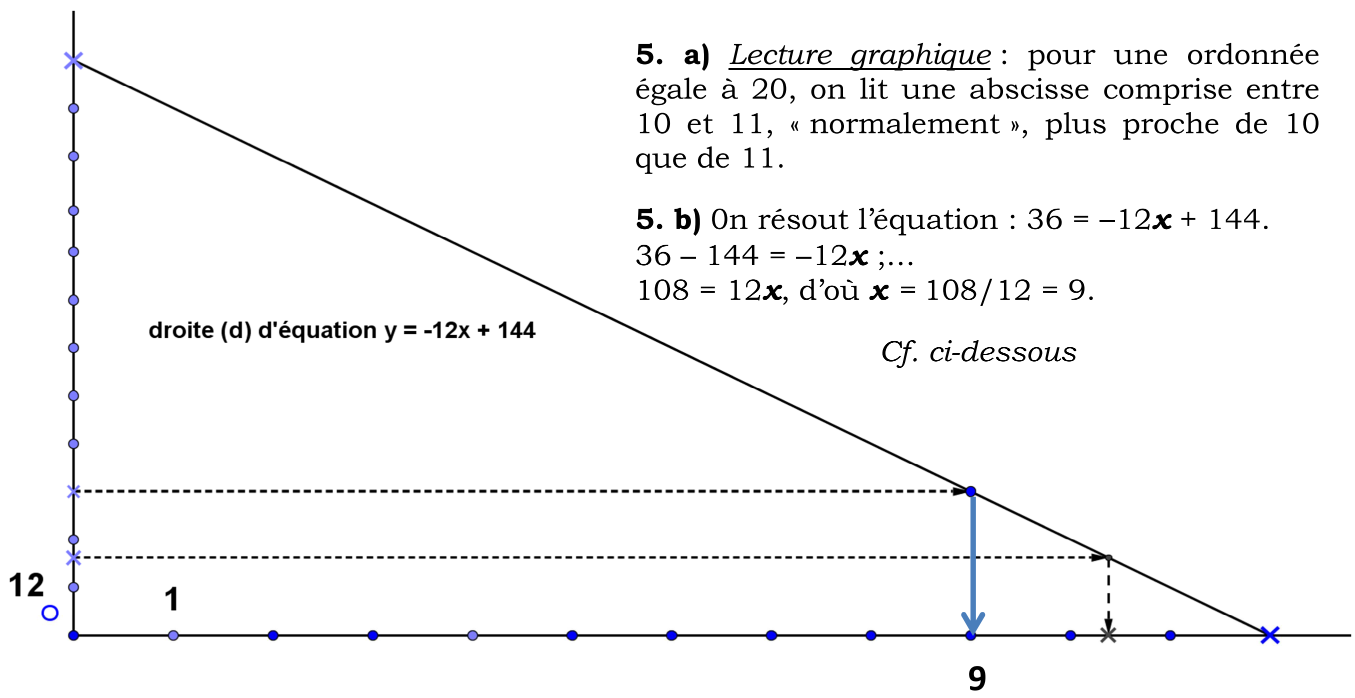
3. (**OMN**) isocèle en **O** et **H** milieu de **[MN]**, on a donc : **ON** = **OM**, avec **MN** = ***x*** et **OH** = demi-médiane dans ce triangle = 6m.
On a : aire(**OMN**) = (**MN** × **OH**)/2 = ***x*** × 6 (m)/2 = 3***x*** (m^2). Dans cette figure, il y a quatre triangles superposables à (**OMN**), donc l'aire totale de ces quatre triangles est égale à : 4 × 3***x*** (m^2) = 12***x*** (m^2). De plus, l'aire du carré est égale à 144 m^2 (*Est-il nécessaire d'écrire le calcul ?*).
En appelant **A**(***x***) l'aire totale des quatre ailes du moulin, on a : **A**(***x***) = 144 – 12***x*** (m^2).

4. La fonction **A** qui à ***x*** associe l'aire **A**(***x***) est une fonction affine, définie sur l'intervalle [0 ; 12], de coefficient directeur –12 et d'ordonnée à l'origine 144.
Remarque : 144 – 12***x*** = – 12***x*** + 144.
Sa représentation graphique est une droite (***d***) d'équation ***y*** = – 12***x*** + 144.

5. a) *Lecture graphique* : pour une ordonnée égale à 20, on lit une abscisse comprise entre 10 et 11, « normalement », plus proche de 10 que de 11.

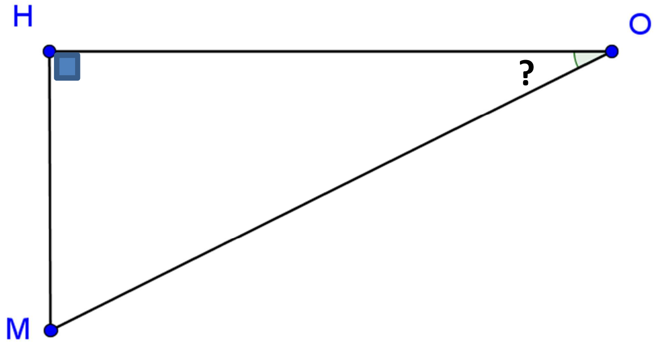
5. b) On résout l'équation : 36 = –12***x*** + 144.
36 – 144 = –12***x*** ;…
108 = 12***x***, d'où ***x*** = 108/12 = 9.

Cf. ci-dessous



6. Pour les questions suivantes, on pose $\boldsymbol{x}$ = 9m.
[OM] est un côté du triangle **OMN**, isocèle en **O**. Dans le triangle **HOM**, rectangle en **H**, on a : **OM² = OH² + HM²** (propriété de Pythagore appliqué à ce triangle) ;
c'est-à-dire : **OM²** = 6² + 4,5² = 56,25, d'où **OM** = $\sqrt{56,25}$ (m) = 7,5 (m).
D'où périmètre (ailes du moulin) = (3 + 2 × 7,5) × 4 = 18 × 4 = 72 (m).

7. Calcul de la valeur de l'angle $\widehat{\mathbf{HOM}}$. *Une petite figure, ça peut aider…*



(HOM) triangle rectangle en **H** : ça sent la TRIGO ! On a :
sin $\widehat{\mathbf{HOM}}$ = **HM/OM** = 4,5/7,5 = 0,6

D'où $\widehat{\mathbf{HOM}}$ ≈ 37(°) (à la caltosss !)

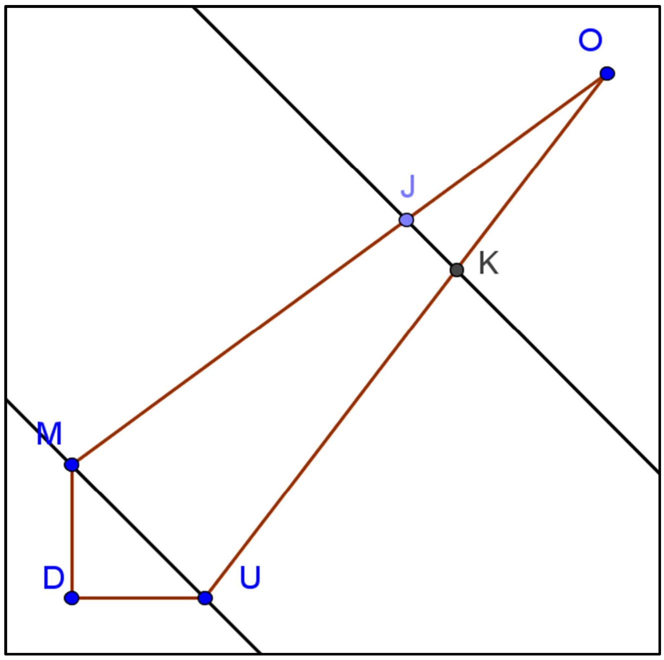
Valeur de $\widehat{\mathbf{MOU}}$. Il faut raisonner…

On a : $\widehat{\mathbf{HOD}}$ = 45° et $\widehat{\mathbf{HOM}}$ ≈ 37° ; d'où :
$\widehat{\mathbf{MOD}}$ ≈ 45° – 37° = 8° (différence d'angles adjacents).
Ce qui donne : $\widehat{\mathbf{MOU}}$ = 2 × $\widehat{\mathbf{MOD}}$ = 2 × 8(°) = 16(°).

8. Longueur de **MU**. On se place dans le triangle **DMU**, isocèle rectangle en **D** : on peut donc appliquer le théorème de Pythagore dans ce triangle.
On obtient : **MU² = MD² + DU²**, avec **MD** = **DU** = 1,5(m).
Calculs *(ils doivent apparaître sur la copie !)*… **MU²** = 4,5, d'où **MU** ≈ 2,12m.

9. *Là aussi, une petite figure, ça va aider…*

Figure non à l'échelle, qui ressemble quand même à une aile du moulin !



Cette figure met en évidence un triangle (*lequel ?*) avec des parallèles (*lesquelles ?*) : nous voilà donc en présence d'une configuration classique de Thalès…

Dans le triangle **OMU**, avec **(JK)//MU**, on a, par application du théorème de Thalès :

OJ/OM = **OK/OU** = **JK/MU** ;
C'est à dire :
3/7,5 = 3/7,5 ≈ **JK**/2,12 ; d'où :
JK ≈ (2,12 × 3)/7,5 ≈ 0,85(m)

Commentaires : Exercice un peu long, mais facile, et même très facile : aucun piège, ni aucune astuce de raisonnement, il suffit d'appliquer directement des résultats et propriétés classiques au programme du CRPE : applications de formules pour déterminer et calculer des volumes, application des théorèmes de Pythagore et de Thalès, construction de la représentation graphique d'une fonction affine, des lectures graphiques, une résolution d'une équation du premier degré, des calculs d'angles, sans et avec une ligne trigonométrique. On est en même temps dans les révisions et en « plein » dans un sujet de concours le plus classique et le plus standard qui soit, ce qui ne signifie pas que ce problème soit pertinent…

BAREME indicatif : PROBLEME noté sur **17 points**.

q1	q2	q3	q4	q5	q6	q7	q8	q9
1 pt	***1*** pt	***3*** pts	***2*** pts	***2*** pts	***2*** pts	***2*** pts	***2*** pts	***2*** pts

VOLET PEDAGOGIQUE et PROFESSIONNEL, *d'après Partiel S1_M2_2015*

1. **a)** Les nombres obtenus sont : **98420** pour le plus grand, **20489** ou **~~0~~2489** pour le plus petit, avec le souci du zéro significatif au chiffre des unités des dizaines de mille.

1. **b)** et **c)** *Deux pistes* : (***i***) on « monte » de deux rangs dans les unités, on dépasse le million pour, en particulier, utiliser les étiquettes-mots plutôt que les étiquettes-chiffres : on sort des « rangs »… et (***ii***) on prépare les règles ou techniques usuelles de comparaison des nombres entiers relativement à la quantité de chiffres composant un nombre.

Règles ou techniques. *Une observation* ou *un théorème pédagogique* : on doit chercher à contextualiser une définition, une propriété, une règle. « Contextualiser », cela signifie que la définition à proposer prend en compte l'activité qui a permis de la mettre en évidence. La dimension généralisatrice de cette définition, donc décontextualisée, repose sur une généralisation « en acte » de beaucoup d'énoncés rédigés au Primaire.

Ici, on « joue » avec des étiquettes, donc la règle doit aussi s'intéresser à la production des nombres par le choix des étiquettes. Ensuite, on peut légitimer les deux règles scolaires classiques à ce niveau : comparaison liée à la « quantité » de chiffres des nombres ou comparaison « rang par rang ». On doit garder à l'esprit que ces règles ont une durée de vie limitée : l'apparition des « nouveaux nombres », fractions et décimaux, nécessitent des techniques de comparaison plus élaborées.

2. **a)** Meilleure(s) réponse(s) : pour Anatole, on peut produire le nombre « *neuf cent sept millions six* » et pour Basile « *sept cent dix mille six* ».

2. **b)** *Item tout à fait intéressant.*

Hypothèse 1. Il semble que ces deux élèves jouent avec les « étiquettes-mots » comme ils le feraient avec les « étiquettes-chiffres » : ils associent le « chiffre » le plus grand avec « l'unité » la plus grande. En particulier, il n'est pas possible de dépasser « *dix* » au niveau d'un rang d'une unité : c'est le grand débat essentiel pour la compréhension de la numération : « *chiffre des ….* » versus « *nombre de…* ».

Hypothèse 2 : une disposition aléatoire des étiquettes, suivie d'un arrangement et d'un placement correct ou approximatif, par « *e-e-a* » donnant le plus grand nombre : il y a nécessité d'un débat.

Rappel ***PW***. « *essais-erreurs-ajustements* » = « *e-e-a* » remplace rigoureusement ce qu'on appelle le « *tâtonnement* » (mot fourre-tout), qui n'existe pas en Mathématiques… Et oui !

Aide(s) : dans tous les cas, garder les « étiquettes-mots », sans passer par les écritures chiffrées. L'idée qui doit sous-tendre les aides éventuelles consiste à différencier les tâches emblématiques : déterminer le « *chiffre des ….* » et le « *nombre de…* ». Techniques : décomposition canonique vs autres décompositions. Pourquoi ne pas réactiver « *Anatole et sa vieille guimbarde* » ?

3. Travail simultané des deux activités. (***i***) Reprise du paragraphe précédent, of course ! (***ii***) Mais aussi, donner et redonner du sens et du crédit à l'ECRIT : dire ou énoncer les nombres ne permet pas toujours de les comparer ou de répondre à d'autres tâches. C'est encore plus vrai lorsqu'on s'intéresse aux autres nouveaux nombres, Cf. 1. **b**). Argument d'actualité : c'est encore et toujours au programme 2016, heureusement !

Dernier point : tout le monde connaît la position, très personnelle, mais didactiquement conséquente !, de ***PW*** sur le tableau de numération « *c, d, u* » ! : « ABBA le tableau de numération » ! Euh, à bas, pas ABBA, vieille culture pop…
Cette double activité donne ici beaucoup de crédit à cette position ! Hihihi…

BAREME indicatif : VOLET PEDAGOGIQUE noté sur **13 points**

q1-a	q1-b, 1-c	q2-a	q2-b	q3
2 *pts*	***3*** *pts*	***2*** *pts*	***3*** *pts*	***3*** *pts*

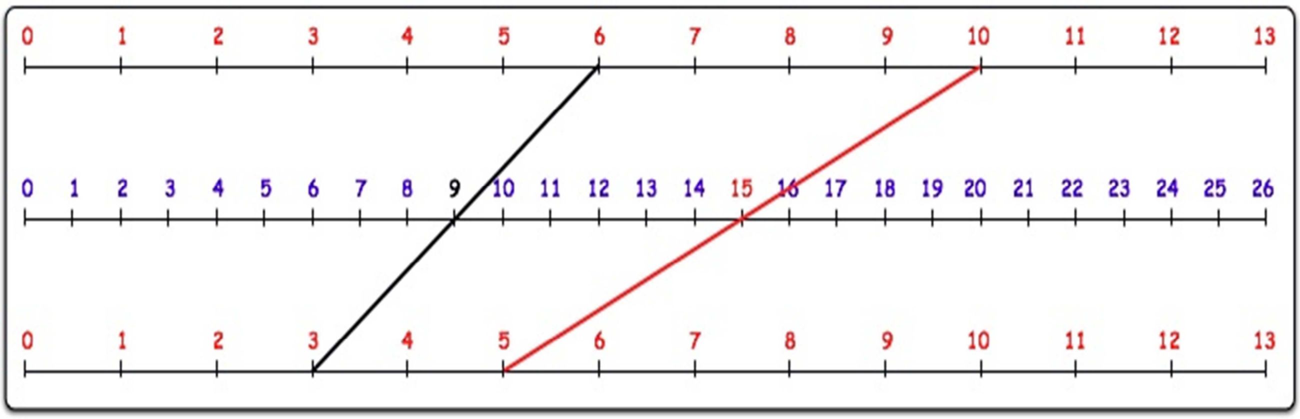
QUESTION de COURS, *FACULTATIVE* ! Ouf !

1. Deux types de règle : règle non graduée et règle graduée.

La règle non graduée.
Vérifier un *alignement*, « réaliser » un alignement ;
Tracer des traits droits, des droites, des segments de droite, des côtés de figures polygonales, … *Remarque*. La règle n'est pas le seul instrument pour travailler le concept d'alignement ; on pourra aussi utiliser la corde ou le ficelle tendue, la visée, le rayon laser, …

La règle graduée.
Idem ci-dessus « + » la fonction suivante. Instrument qui va être utilisé dans le cadre du mesurage de longueurs.
La longueur est la première grandeur rencontrée à l'école et il ne faut pas confondre travail sur les longueurs et mesure de longueurs. Avant d'arriver à l'utilisation de la règle graduée, d'autres travaux sur les longueurs sont à envisager : Comparaison directe puis indirecte d'objets du point de vue de leur longueur, sans recours à la mesure, qui est un NOMBRE.

Pour aller plus loin : la règle graduée va servir aussi pour effectuer des calculs, plus tard, mais on peut commencer tout de suite ! Source : site de JL SIGRIST (*IUFM Strasbourg*).



Une première REGLE à CALCULS. En joignant « correctement » deux nombres des graduations rouges, on peut ainsi lire les sommes correspondantes aux deux graduations avec les graduations bleues. On possède non seulement une règle à effectuer des additions, mais aussi une règle à effectuer des soustractions. TOP !

2. Donner deux fonctions de l'instrument compas.
Tracer ou construire une ligne géométrique particulière : le cercle, tracer des « morceaux » de cette ligne : l'arc de cercle ; reporter des longueurs, *indépendamment de la mesure* ; cas particulier : comparer des longueurs, vérifier l'égalité, ou pas, de longueurs, *indépendamment de la mesure*.

*Note **PW***. C'est essentiellement pour ces raisons que le compas est utilisé pour tracer des droites parallèles ou des droites perpendiculaires ou pour déterminer le milieu d'un segment.

Il manque les exemples : à chercher dans les BONS manuels…

Hors BAREME… Chaque item noté sur deux points.