espe École supérieure du professorat et de l'éducation Académie d'Orléans-Tours

UNIVERSITE D'ORLEANS

~~GCD DE *MATHÉMATIQUES*~~
SECONDE SESSION
M2/PFE, MARS 2017

SITE DE BLOIS. *JBN* ET *PW*

Ce sujet, de la page 1 à la page 3, contient un énoncé de *PROBLEME*, un *VOLET Pédagogique et Professionnel* (deux parties distinctes ***A*** et ***B***) et un *exercice BONUS*. *Durée allouée* : deux heures.

L'utilisation du matériel « usuel » de géométrie plane (*compas, règle graduée, équerre, rapporteur, gabarits divers, …*) et des calculatrices dites de « poche », y compris les programmables, alphanumériques ou à écran graphique est autorisée. (*Il est rappelé que ces calculatrices doivent être autonomes, sans possibilité d'usage d'une imprimante, sans aide « extérieure »*).

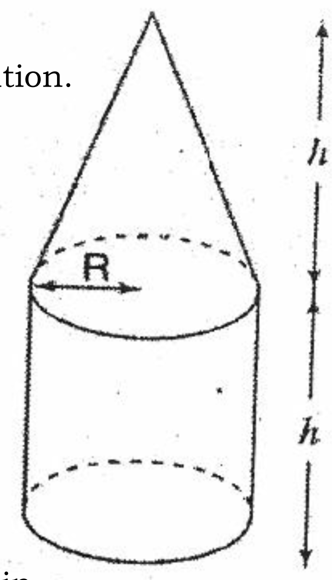
PROBLEME : le MOULIN à vent…

Un moulin à vent est formé de deux solides géométriques :

Un cylindre (*droit de révolution*) surmonté d'un cône de révolution.

Cf. figure ci-contre

Le cylindre et le cône ont la même hauteur $\boldsymbol{h}$ et une base commune de même rayon $\boldsymbol{R}$.



PARTIE 1

1. Montrer que le volume **V** de ce moulin est égal à :

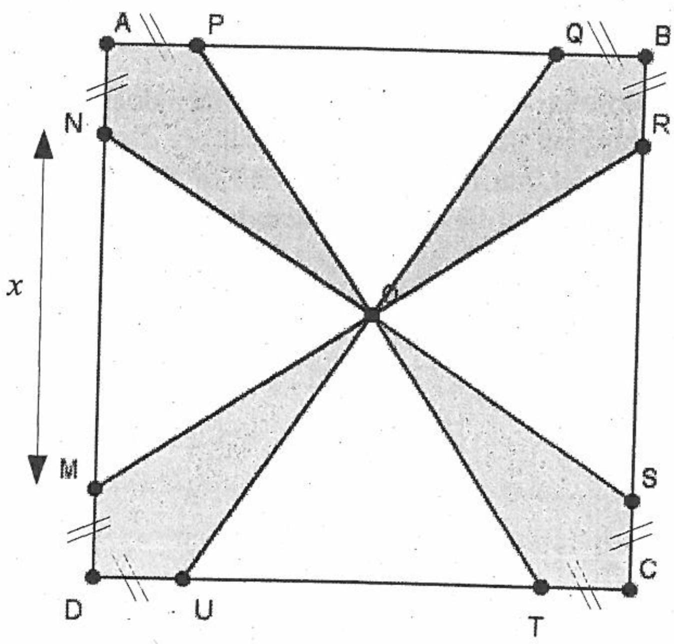
$$\mathbf{V} = \frac{4\, pi\, \boldsymbol{R}^2 \boldsymbol{h}}{3}$$

<u>*Rappel*</u> : volume (*cylindre*) = aire (*disque de base*) × hauteur et volume (*cône*) = 1/3 × aire (*disque de base*) × hauteur.

2. Application numérique : on pose $\boldsymbol{h}$ = 6m et $\boldsymbol{R}$ = 3m. Calculer alors la valeur arrondie au m³ du volume de ce moulin.

PARTIE 2

Les ailes du moulin sont les parties grisées, découpées dans une plaque carrée représentée ci-contre.



<u>*Description de la figure*</u>. **ABCD** est un carré de centre **O**, de côté 12m. Les triangles **(OMN)**, **(OPQ)**, **(ORS)** et **(OUT)** sont superposables et isocèles en **O**.
On pose **MN** = $\boldsymbol{x}$ et on appelle **H** le milieu de **[MN]**.

3. Exprimer, en fonction de $\boldsymbol{x}$, l'aire du triangle **OMN**. En déduire alors que l'aire totale des quatre ailes du moulin est égale à 144 – 12$\boldsymbol{x}$.

4. Construire dans un repère la représentation graphique de la fonction $\boldsymbol{f}$ qui à tout $\boldsymbol{x}$ compris entre 0 et 12, associe l'aire totale $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ des quatre ailes du moulin. Préciser les choix des graduations.

6. a) Déterminer graphiquement une valeur approchée de ***x***, lorsque l'aire des ailes du moulin est égale à 20m². *Marquer les traces des « pointages » sur la représentation graphique*.

5. b) Calculer la valeur exacte de ***x***, lorsque l'aire des ailes du moulin est égale à 36m².

VOLET PEDAGOGIQUE et PROFESSIONNEL, *d'après Examens Partiels*

A. Etude d'une technique opératoire de la soustraction

1. Colétin est élève en CM1.
Il a posé « à la main » la soustraction suivante : 2 405 – 817 (*Cf. ci-dessous*).

a) Expliquer brièvement *le modèle mathématique* sur lequel repose la technique de la retenue utilisée par Colétin.

b) Analyser les erreurs éventuelles commises par Colétin dans l'effectuation de cette soustraction posée.

c) Rédiger trois problèmes simples, *de même contexte sémantique*, s'appuyant sur *trois significations différentes* de la soustraction dont la solution experte est la différence « 2 405 – 817 ».

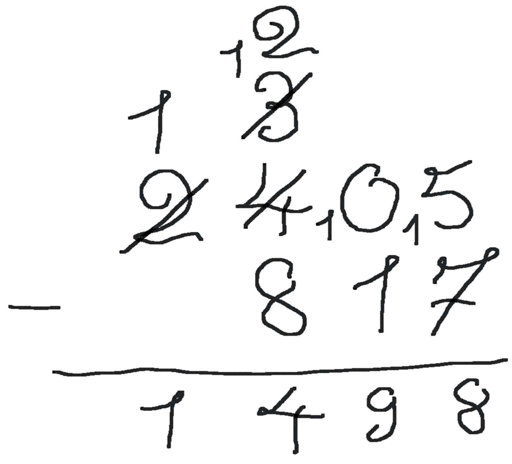
2. Soit le problème suivant : « Je suis parti à 7h40 et je suis arrivé à 11h35. Quelle a été la durée de mon trajet ? ».

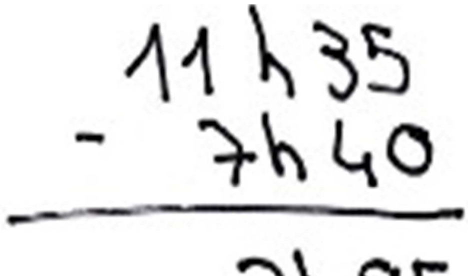
a) Identifier trois variables didactiques *numériques* du problème posé.

b) Décrire trois procédures correctes différentes qui peuvent être utilisées en *calcul réfléchi* ou *calcul raisonné.*

c) Donner deux points forts du *calcul réfléchi* ou *calcul raisonné* (calcul non posé mais qui n'exclut pas d'écrits intermédiaires) par rapport au calcul posé.

d) Colétin a posé à la main la soustraction pour résoudre le problème (*Cf. ci-dessous*). Analyser ses erreurs et proposer une aide.





B. Résolution de problèmes

Voici un problème proposé à une classe de CM2.

« Il faut exactement 72 litres d'essence à Rosario pour remplir complètement 9 bidons. Combien de litres d'essence doit-on avoir pour remplir trois de ces bidons ? ».

1. La réponse à la question posée au problème est-elle 24 litres ? Argumenter…

2. Pour la suite, on suppose que toutes les conditions sont réunies et complétées pour résoudre le problème posé.

a) Quelles sont les grandeurs en jeu dans cet exercice ?

b) Donner trois variables didactiques, de nature différente, *non numériques* liées à cet exercice.

c) Proposer et décrire deux procédures, distinctes, qui peuvent être attendues et produites par un élève de CM2, en explicitant les raisonnements sous-jacents.

Facultatif. Donner deux arguments qui montrent que la connaissance par un PE de la « *Théorie des Champs Conceptuels* » de Gérard VERGNAUD, et notamment, de la typologie des problèmes additifs peut être une aide pour son enseignement.

Exercice Bonus, facultatif : *la division euclidienne*

1. Le problème suivant est proposé en classe de CE1 :

« Les élèves d'une classe de CE1 veulent montrer 115 doigts en montrant des mains (*les cinq doigts de chaque main sont montrés à toute la classe*). Combien doivent-ils montrer de mains ? ».

a) Donner deux variables didactiques *numériques* liées à cette situation.

b) Proposer un problème dont la solution experte est également le quotient euclidien de 115 par 5 et qui s'appuie sur une autre signification de la division que le problème posé ci-dessus.

2. Pour poser la division euclidienne de 10 900 par 27, un enseignant de CM2 propose à ses élèves d'effectuer d'abord mentalement ou par écrit, les opérations suivantes : 27 × 10 ; 27 × 100 et 27 × 1 000.

Donner les réponses à ces trois opérations.

Quelle information ces calculs fournissent-ils aux élèves sur le *quotient euclidien* de 10 900 par 27 ?

Pistes de **CORRECTION** et **Commentaires *JBN* et *PW***

PROBLEME : le MOULIN à vent… ; on l'a déjà fait, hihihi…

PARTIE 1

1. On pose : **V** = volume **V1** du cylindre + volume **V2** du cône.
On a donc : **V1** = pi × ***R*** × ***R*** × ***h*** et **V2** = 1/3 × pi × ***R*** × ***R*** × ***h***
d'où **V** = pi × ***R*** × ***R*** × ***h*** + 1/3 × pi × ***R*** × ***R*** × ***h*** = (pi + 1/3 × pi) × ***R*** × ***R*** × ***h***
= 4/3 × pi × ***R*** × ***R*** × ***h*** = $\boxed{4/3 \times \text{pi} \times R^2 \times h}$.

Commentaires : question doublement « gratuite » ! En effet, on donne les formules à utiliser et la formule à trouver !!! Oui, mais, comment le (pi + 1/3 × pi) devient 4/3 × pi.

Bon d'accord, technique un peu « brute épaisse » : pi + 1/3 × pi = pi × (1 + 1/3) (*factorisation*) = pi × (3/3 + 1/3) = pi × 4/3 = 4/3 × pi !

2. Application numérique : on remplace h par 6m et R par 3m dans la formule ci-dessus. Valeur exacte du volume : **V** = 4/3 × pi × 3 (m) × 3 (m) × 6 (m) = 4/3 × pi × 54 (m^3) = 4 × pi × 18 (m^3) = $\boxed{72 \times \text{pi } (m^3) \approx 226 \ (m^3)}$.

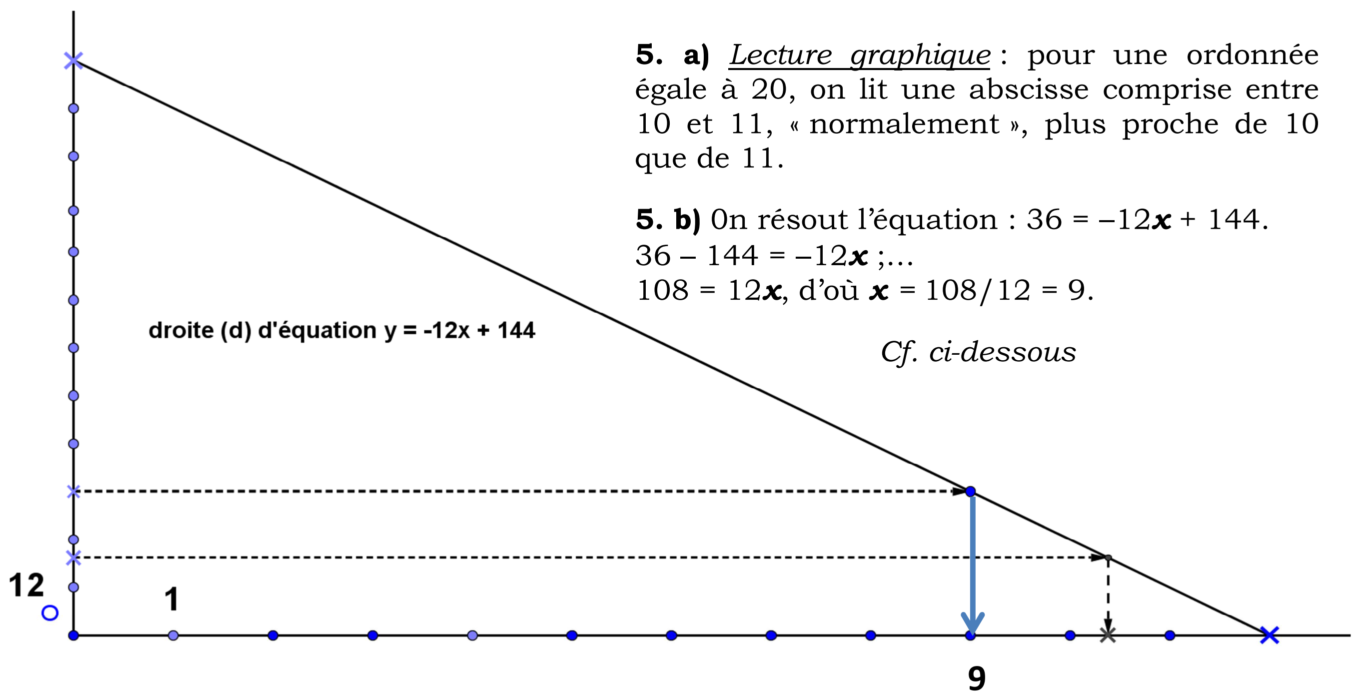
Commentaires : on arrondit « à la fin » et dans ce cas, la seule valeur qui répond à la question est 226m^3.

PARTIE 2

3. (**OMN**) isocèle en **O** et **H** milieu de **[MN]**, on a donc : **ON** = **OM**, avec **MN** = x et **OH** = demi-médiane dans ce triangle = 6m.

On a : aire(**OMN**) = (**MN** × **OH**)/2 = x × 6 (m)/2 = 3x (m^2). Dans cette figure, il y a quatre triangles superposables à (**OMN**), donc l'aire totale de ces quatre triangles est égale à : 4 × 3x (m^2) = 12x (m^2). De plus, l'aire du carré est égale à 144 m^2 (*Est-il nécessaire d'écrire le calcul ?*).
En appelant **A**(x) l'aire totale des quatre ailes du moulin, on a : **A**(x) = 144 – 12x (m^2).

4. La fonction **A** qui à x associe l'aire **A**(x) est une fonction affine, définie sur l'intervalle [0 ; 12], de coefficient directeur –12 et d'ordonnée à l'origine 144.
Remarque : 144 – 12x = – 12x + 144.
Sa représentation graphique est une droite (***d***) d'équation y = – 12x + 144.



5. a) *Lecture graphique* : pour une ordonnée égale à 20, on lit une abscisse comprise entre 10 et 11, « normalement », plus proche de 10 que de 11.

5. b) On résout l'équation : 36 = –12x + 144.
36 – 144 = –12x ;…
108 = 12x, d'où x = 108/12 = 9.

Cf. ci-dessous

<u>*Commentaires ; idem le précédent commentaire*</u> : Exercice ~~un peu long, mais~~ facile, et même très facile : il n'y a aucun piège, ni aucune astuce de raisonnement, il suffit d'appliquer directement des résultats et propriétés classiques au programme du CRPE : applications de formules pour déterminer et calculer des volumes, application des théorèmes de Pythagore et de Thalès, construction de la représentation graphique d'une fonction affine, des lectures graphiques, une résolution d'une équation du premier degré, des calculs d'angles, sans et avec une ligne trigonométrique. On est en même temps dans les révisions et en « plein » dans un sujet de concours <u>le plus classique</u> et <u>le plus standard</u> qui soit, ce qui ne signifie pas que ce problème soit pertinent…

VOLET PEDAGOGIQUE et PROFESSIONNEL, *d'après Examens Partiels*

A. Etude d'une technique opératoire de la soustraction

La première soustraction de Colétin

1. a) <u>Technique de la soustraction : technique dite par « emprunt »</u>. On décompose un rang supérieur en affectant alors au rang immédiatement inférieur un paquet de 10 ou 100 ou 1000, … : on applique la règle d'échanges du « un contre dix ». Ce qui rend la soustraction possible, rang par rang, sans aucune retenue. On dit aussi : <u>technique par « cassage »</u> ou <u>technique « anglo-saxonne »</u>.

Une autre technique est aussi enseignée en France : la technique dite de la « conservation des écarts » ou technique par « compensation », qui utilise en acte les fameuses retenues… Autre paire de manches à retrousser ! ***PW*** suggère alors d'aller beaucoup, mucho plus loin et de se poser la question professionnelle suivante : <u>pourquoi enseigne-t-on « les compléments à »</u> ? Et ce dès la Maternelle. Très bonne question !

b) <u>Les erreurs</u>. Une erreur vient du « cassage » de la dizaine, pour effectuer 15 – 7 : on ne peut pas casser « zéro dizaine », il faut donc aller chercher un rang supérieur et casser une centaine en dix dizaines et ensuite casser une des dix dizaines ainsi obtenues, pour pouvoir casser une dizaine en dix unités, à ajouter à 5 pour effectuer alors 15 – 7 ! *Ouf* ! Pratiquement, « 405 » doit s'interpréter comme $39 \times 10 + 15$, au lieu de $40 \times 10 + 5$. L'erreur se prolonge…

<u>A noter</u> : pas de proposition de preuve. Pas de tentative, sur le document étudié, de contrôler la différence calculée par le calcul de la somme : 1498 + 817. Tant pis !

c) <u>Trois problèmes simples</u> : se reporter à la modélisation de Vergnaud pour l'étude des problèmes additifs.

Relation partie-partie/tout : une collection est partagée en deux parties. On a alors deux types de problèmes : (***i***) trouver le tout connaissant les deux parties et (***ii***) trouver une partie connaissant le tout et l'autre partie. <u>Exemple</u> (*pas terrible*) : *Pat possède 2405 billes, en verre ou en terre cuite. Il y en a 817 en terre cuite. Combien ai-je de billes en verre ?* (*A mieux formuler !*).

Relation entre états : état initial / transformation / état final : problème « dynamique ». Trois cas à expliciter. <u>Exemple</u> : *Je possède 2405 euros, j'achète un bien d'une valeur de 817 euros. How many séty ki m'en reste ?* (*A mieux formuler !*).

Problème de « comparaison » d'états : problème « statique ». Importance des locutions : « *de plus que* » et « *de moins que* ». <u>Exemple</u> : *Pat possède 2405 billes et JeanBer en possède 817. Combien de billes Pat possède-t-il de plus que JeanBer ?* (*A mieux formuler !*).

Le problème et la deuxième soustraction de Colétin

2. a) Encore des variables didactiques !!! Et oui.
(i) Les indications des heures : heures sans minute, heures avec des fractions d'heures standards, heures avec minutes, … ;
(ii) Conversions nécessaires ou pas ? ;
(iii) Calculs avec ou sans échanges du « un contre soixante » ou du « soixante contre un » ; calculs nécessitant ou pas des conversions, … ;
(iv) Changement ou pas d'une journée entre les informations horaires ;
(v) Dans le cadre de la résolution de problèmes statuts des informations numériques : états (*statiques et dynamiques*), transformations, … Cf. la modélisation de Vergnaud.

2. b) Trois procédures.
(i) « *Aller de … à …* », avec un axe gradué support, en « montant » ou en « descendant » ;
(ii) Tout convertir en minutes, effectuer la soustraction et reconvertir en heures ;
(iii) Effectuer l'opération « en direct » avec les règles d'échange (relevant plutôt du *calcul automatisé*) ;
(iv) De 7h40 à 11h40, il y a une durée de 4h, donc, avec 5min de trop…

2. c) *Calcul Raisonné ou Calcul Réfléchi* vs *Calcul Automatisé* : il y a beaucoup à dire. Se reporter aux documents ***PW*** : conférences et animations pédagogiques, cours M2 et autres…

Le *Calcul Automatisé* met en œuvre des algorithmes pas toujours « simples » à enseigner, à comprendre et donc à utiliser ; mais ils donnent le résultat, pour peu qu'on applique cet algorithme comme il « faut ». C'est une sorte de calcul sur les ***chiffres*** : on délaisse l'intuition des nombres et on focalise sur les calculs « chiffre à chiffre ».

Le propre du *Calcul Raisonné*, c'est de travailler avec les ***nombres*** dans leur globalité, et de contrôler le déroulement du calcul. Tout *Calcul Raisonné* met en œuvre des propriétés des nombres et des propriétés mathématiques.

2. d) *Erreurs et aides*. Calcul en base soixante ≠ calcul en base dix. A développer…

C. Résolution de problèmes.

1. Comme souvent dans ce genre de situation, il y a des implicites qui rendent le problème « faisable » : il faut les identifier. *Lesquels* : (***i***) les bidons sont identiques et (***ii***) lorsqu'on les remplit, on les remplit complètement.
Dans ce cas, il y a *PROPORTIONNALITE* et donc, on trouve : 72/9 × 3 = 24 (L).

2. a. Grandeurs en jeu. (i) une grandeur mesurable : contenance ou capacité (ou volume), exprimée en litres et (ii) le nombre de bidons, en faisant l'hypothèse du **1.**

2. b. Variables didactiques, *non numériques*. Rappel. *Variable didactique : « élément » de la situation-problème, qui, modifié ou transformé, ne change pas la nature du problème, mais autorise et favorise d'autres techniques de résolution.*

Réponse classique : contexte sémantique, place de ou des questions, traitement hiérarchisé des informations, modalités de travail.

(*Non demandé*). Variables didactiques *numériques* cette fois : les nombres en jeu et les relations arithmétiques entre ces nombres ; le nombre de bidons, …

2. c. Les procédures. On est dans une situation évoquée ; et donc, a priori, les élèves ne peuvent pas réaliser effectivement les remplissages, donc on va plutôt vers des procédures numériques et calculatoires, sans négliger un passage possible par un schéma ou par tout autre artefact.
(i) Cf. question **1.** Contenance d'un bidon, puis contenance de trois ;
(ii) Relation arithmétique entre « 9 » et « 3 », d'où relation entre « 72 » et la valeur cherchée ;
(iii) Procédure « schématisée » répétitive (?) ou autre…

Facultatif. Modélisation de Vergnaud. Au fait, s'agit-il d'un « problème additif » ?

Principe ou banalité didactique : Toute maîtrise conséquente d'un modèle ou d'une théorie consistante produit des effets strictement positifs sur « tout » enseignement.

Quelques pistes : « outil » pour la programmer l'enseignement, « outil » pour construire des progressions, « outil » pour analyser les manuels, « outil » de différenciation par la diversité de problèmes à faire résoudre et surtout « objet » de réflexion !

Autre point essentiel : cela permet aussi des analyses a priori et a posteriori sérieuses des productions d'un élève, dépassant les banalités confondantes du style : « *il ne sait pas lire* », « *il n'a pas compris la question* », « *il a choisi la mauvaise opération* », « *il a des problèmes de compréhension* », j'en passe et des meilleures…

Exercice Bonus : la division euclidienne, *reste < diviseur* !

1. a. Variables didactiques *numériques* : la « taille » ou la valeur des nombres en jeu et les relations arithmétiques pouvant exister entre ces nombres (*multiples ou pas, « presque » multiples, nombres premiers entre eux, …*).

b. Là encore, un grand classique : le problème proposé est un problème de partage (*équitable, ouf !*), dont on peut isoler deux « significations » distinctes : la « division-quotition » et la « division-partition ».

*Note de **PW*** : « liens » multiplication-division ; attention, on n'est pas obligé d'effectuer une division pour répondre à un problème de partage ! On peut chercher de différentes manières le nombre qui multiplié par le quotient donne le dividende ou s'en approche le plus…

(i) division-quotition ou division-groupement : on cherche le nombre de parts ou le nombre de paquets. C'est le cas ici : avec 115 doigts, combien de paquets de 5 doigts, ou combien de mains ? (*A mieux formuler !*).

(ii) division-partition ou division-partage : on cherche la valeur d'une part ou d'un paquet. *Exemple* : avec 115 billes à partager équitablement entre 5 élèves, donner le nombre de billes que possède chaque élève ? (*A mieux formuler !*).

2. Les trois réponses : un peu facile, mais ce n'est pas facile pour rien !

On a : $27 \times 10 = 270$; $27 \times 100 = 2700$ et $27 \times 1\,000 = 27\,000$. A quoi ça peut bien servir ?

Justement à ce qui suit !

On a : $2\,700 = 27 \times 100 \leq 10\,900$ (= $27 \times$ quotient) $< 27 \times 1\,000 = 27\,000$; ce qui signifie que la partie entière du quotient contient trois chiffres, puisque la première valeur possible du quotient peut être 100 et la dernière valeur possible du quotient 999.

Entre 100 et 999, il n'y a que des nombres à trois chiffres.

ELEMENTS de BAREME (*à titre indicatif*)

PROBLEME : noté sur ***10*** points

Partie 1	Partie 2
1. Volume (*valeur exacte*) : ***1,5*** ; 2. Application numérique : ***1,5.***	3. Aire des ailes : ***2*** ; 4. Repère + Construction de la RG : ***2*** ; 5. a. Lecture graphique : ***1*** ; 5. b. Equation : ***2***.

A. *ETUDE de la SOUSTRACTION* : noté sur ***12*** points

1. a) Modèle mathématique : ***1***
1. b) Erreurs : ***1***
1. c) Trois problèmes simples : ***3***

2. a) Trois variables didactiques : ***2***
2. b) Trois procédures : ***2***
2. c) Deux points-forts du calcul raisonné : ***2***
2. d) Erreurs et aides : ***1***

B. *RESOLUTION de PROBLEMES* : noté sur ***8*** points

1. Réponse au problème et argumentation : ***2***
2. a) Grandeurs en jeu : ***2***
2. b) Trois variables didactiques : ***2***
2. c) Deux procédures : ***2***

Facultatif : + un point.

BONUS : + deux points à la note obtenue pour la partie « obligatoire ».

1. a) Deux variables didactiques ; b) Autre énoncé de problème ; Réponses et nouvelle « information » :