GCD de Mathématiques

Examen avril 2015

UE 21 EC 1

Le sujet est composé de six exercices répartis en trois parties. Il comporte cinq pages (quatre pages et une page d'annexe) et doit être traité en quatre heures.

Il sera tenu compte de la qualité des raisonnements produits tout autant que du soin apporté à la rédaction des réponses, sans oublier l'orthographe. Il est rappelé que tout résultat produit devra être justifié.

L'utilisation du matériel dit « usuel » de géométrie plane (compas, règle graduée, équerre, rapporteur, gabarits divers, ...) et des calculatrices dites « de poche », y compris les programmables, alphanumériques ou à écran graphique est autorisée. (Il est rappelé que ces calculatrices, strictement personnelles, doivent être autonomes, sans possibilité d'usage d'une imprimante).

Partie 1 (13 points).

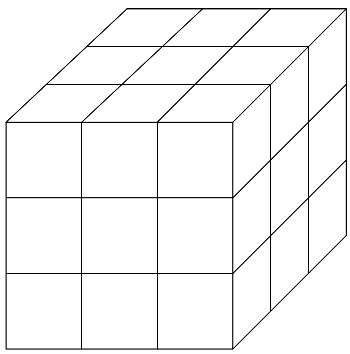
Exercice 1 Dans un sac, on a placé trois jetons numérotés 3 ; 4 et 5. On choisit au hasard, successivement et sans les remettre dans le sac tous les jetons du sac. On écrit le nombre qui a comme chiffre des centaines celui inscrit sur le premier jeton tiré, comme chiffre des dizaines celui inscrit sur le deuxième jeton tiré et comme chiffre des unités celui inscrit sur le troisième.

1) Écrire tous les résultats possibles.

2) Calculer la probabilité de chacun des événements ci-dessous :

A : « le nombre est divisible par 5 » ;
B : « le nombre est divisible par 3 » ;
C : « le nombre est divisible par 6 ».

Exercice 2 – Le cube. Toutes les faces d'un cube ont été peintes de la même couleur puis le cube a été découpé de la façon suivante (chaque arête est découpée en trois) :



Les petits cubes sont placés dans un sac et on tire au hasard un petit cube dans le sac.

1) a) Quelles sont les valeurs possibles pour le nombre de faces coloriées d'un petit cube ?

b) Pour chacune des valeurs obtenues à la question **1a**, déterminer la probabilité d'obtenir cette valeur en tirant un cube au hasard dans le sac.

2) Plutôt que de découper le cube peint comme précédemment, on découpe maintenant les arêtes en n parties égales pour obtenir des petits cubes tous de même taille.

a) Dans le cas $n = 4$, quelles sont les valeurs possibles pour le nombre de faces coloriées d'un petit cube ? Pour chacune de ces valeurs, déterminer la probabilité d'obtenir cette valeur en tirant un cube au hasard dans le sac.

b) Dans le cas général, montrer que

$$P(0) = \frac{(n-2)^3}{n^3}, \quad P(1) = \frac{6(n-2)^2}{n^3}, \quad P(2) = \frac{12(n-2)}{n^3}, \quad P(3) = \frac{8}{n^3}$$

et retrouver alors les résultats de la question **1**.

c) En développant, montrer que $(n-2)^3 = n^3 - 6n^2 + 12n - 8$ pour tout entier naturel n.

d) Vérifier que la probabilité totale est bien égale à 1.

Exercice 3 Les mesures de longueur sont données en cm. Soit un triangle isocèle ABD de sommet principal A tel que AB = 8.

1) Construire à la règle et au compas le symétrique C de A par rapport à la droite (BD) et M le milieu de [BD]. On explicitera la procédure de construction et on laissera apparents les traits de construction.

2) Démontrer que ABCD est un losange.

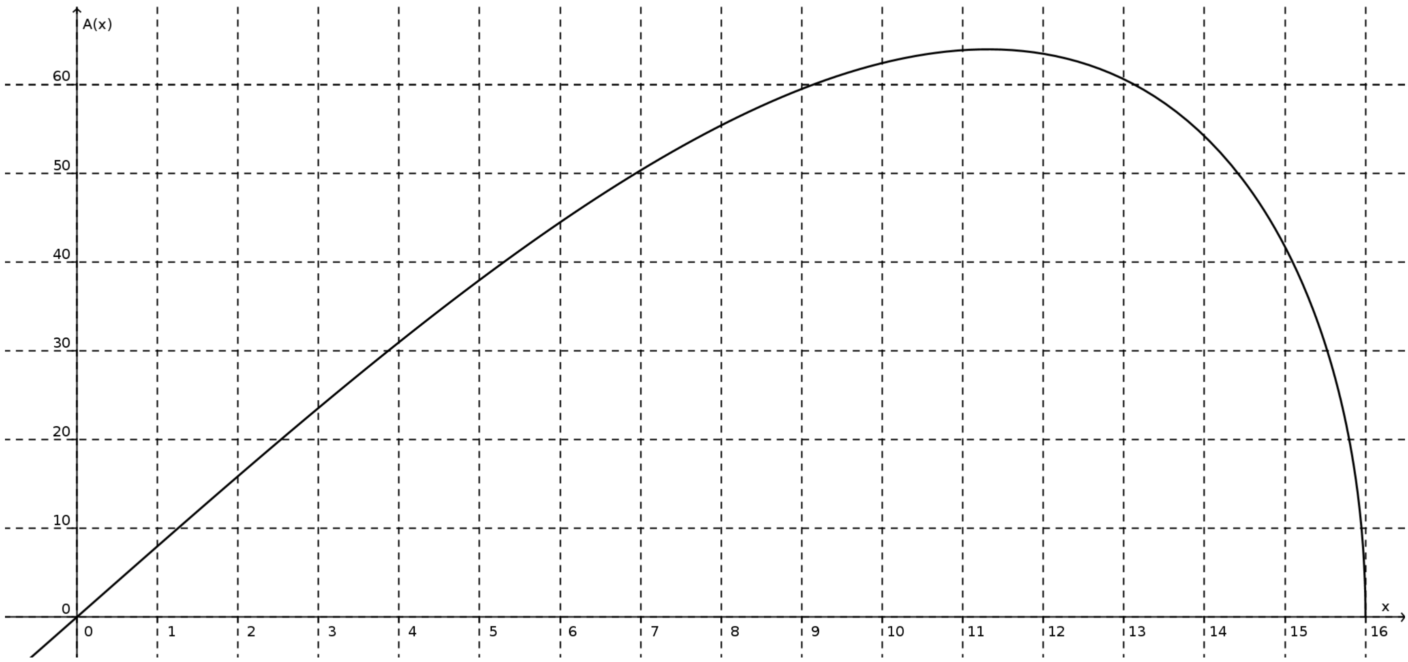
3) Démontrer que AMD est rectangle en M.

4) On désigne par x la mesure en cm de BD. Préciser l'intervalle des valeurs prises par x.

5) Démontrer que

$$AM = \sqrt{64 - \frac{x^2}{4}}.$$

6) On désigne par $A(x)$ la mesure en cm^2 de l'aire du losange ABCD. On a tracé dans un repère orthogonal la courbe représentative de A. Par lecture graphique, déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire du losange est maximale et construire le losange ainsi obtenu. Quelle observation pouvez-vous faire ?



Partie 2 (13 points).

Exercice 4

1) Convertir les durées suivantes en secondes

a) deux tiers d'heure

b) 1,2 heure

2) Convertir les durées suivantes en heures, minutes et secondes

a) 5 532 secondes

b) 1,87 heure

3) Un guépard s'est approché à 50 m d'une jeune antilope. Il s'élance sur sa proie en courant à 100 km/h. Au même instant, l'antilope s'enfuit à 75 km/h.

a) Au bout de quelle distance le guépard rattrape-t-il sa proie ?

b) Combien de temps dure la poursuite ?

Exercice 5 Soit ABCD un quadrilatère dont les diagonales [AC] et [BD] se coupent en O. Soit I le milieu de [AB], J le milieu de [BC], K le milieu de [CD] et L le milieu de [DA].

Étude du quadrilatère IJKL.

1) a) Démontrer que la droite (IJ) est parallèle à la droite (AC).

b) Démontrer que le quadrilatère IJKL est un parallélogramme.

2) Dans chaque cas, une ou plusieurs affirmations proposées sont exactes. Le candidat indiquera sur sa copie la référence de la question et la (ou les) lettre(s) correspondant à l'(ou aux) affirmation(s) qu'il estime exacte(s). Aucune justification n'est demandée.

a) Si ABCD est un losange alors IJKL est nécessairement

A : un parallélogramme   B : un losange   C : un rectangle   D : un carré

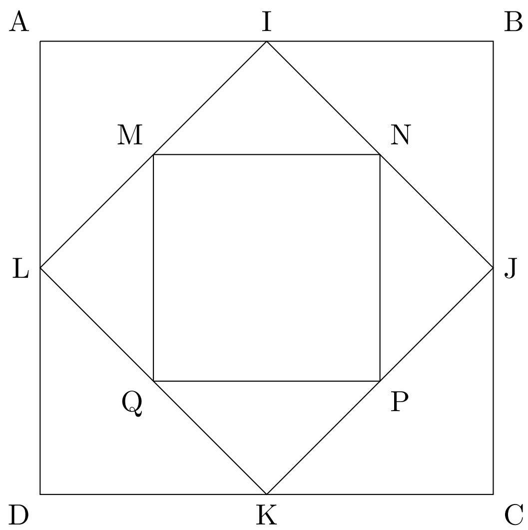
b) Si ABCD est un carré alors IJKL est nécessairement

A : un parallélogramme   B : un losange   C : un rectangle   D : un carré

3) Démontrer que si ABCD est un rectangle alors IJKL est un losange.

Calcul d'aire.

On suppose désormais que le quadrilatère ABCD est un carré. Soit N le milieu de [IJ], P le milieu de [JK], Q le milieu de [KL], et M le milieu de [LI]. Soit a l'aire du carré ABCD.



4) Démontrer que l'aire du carré IJKL est $a/2$.

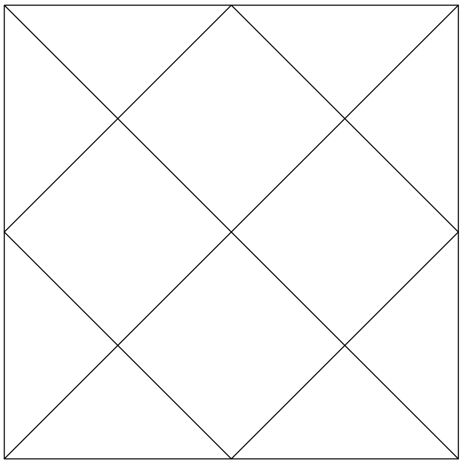
5) Exprimer l'aire du quadrilatère MNPQ en fonction de a.

Partie 3 (14 points).

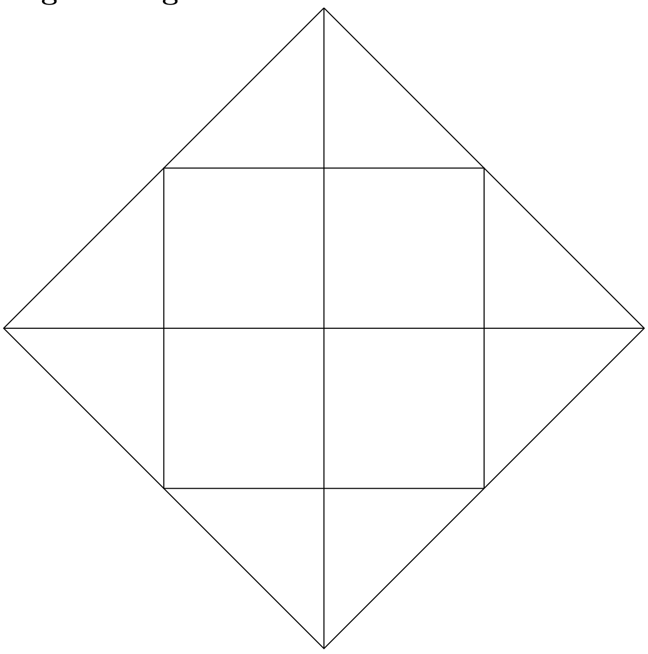
Exercice 6

Le document ci-dessous est extrait d'un manuel de CM1 (collection Cap Maths, Éditions Hatier 2004) ; il comporte deux pages qui ont été réduites :

Page 1 : Figure A



Page 2 : Figure B



1) a) Citer trois types de difficultés que peuvent rencontrer les élèves pour reproduire la figure A à l'identique sur un papier uni à l'aide des instruments usuels de géométrie (règle graduée, compas, équerre).

b) Peut-on reproduire cette figure sans utiliser les graduations de ces instruments ?

2) Pour chacune des deux figures A et B, décrire la chronologie des principales étapes de sa construction qui pourrait être induite par la position de la figure sur sa page.

3) Lors de la correction, un enseignant dit : « Vous voyez, la figure B, c'est un carré dans un losange. » Donner un argument en faveur de ce propos et un argument contre.

4) Donner deux variables didactiques de la situation.

5) Le guide du maître du manuel Cap Maths (collection Cap Maths, pages 46 à 48, Éditions Hatier, 2004) propose le déroulement suivant :

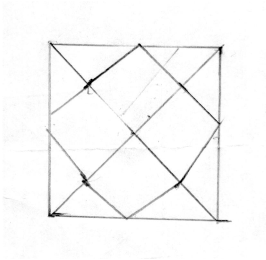
- la moitié de la classe reçoit la figure A, l'autre moitié la figure B ;
- la consigne est : « Vous devez reproduire sur papier uni avec vos instruments de géométrie la figure que je vous ai distribuée. La figure reproduite doit être identique au modèle. »
- Les élèves sont invités à réaliser la tâche prescrite.

Le maître dispose de calques de la figure A et de la figure B. Proposer deux utilisations différentes par le maître de ces calques.

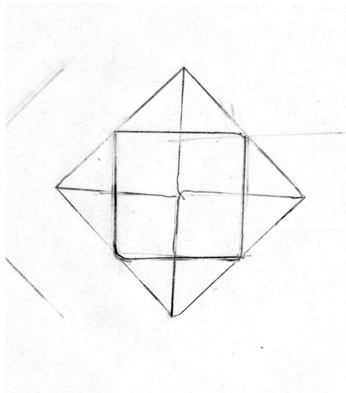
6) Pour les quatre productions de l'annexe, décrire les procédures des élèves en explicitant les difficultés éventuelles des élèves.

7) Dans les quatre productions de l'annexe, une des propriétés nécessaires à la reproduction correcte de la figure n'est pas perçue par les élèves, laquelle ?

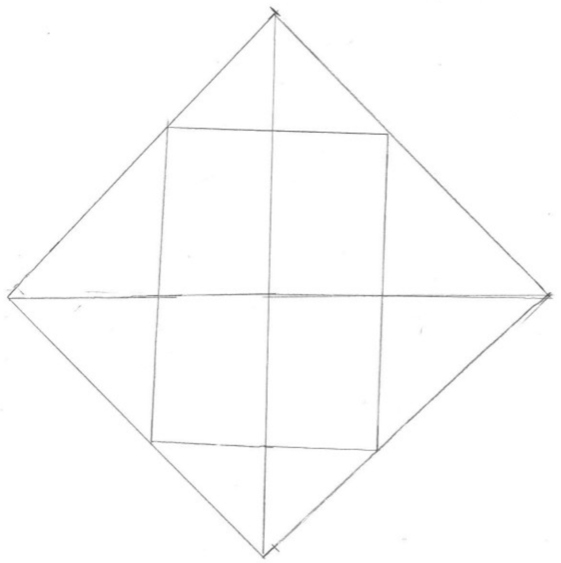
Annexe.



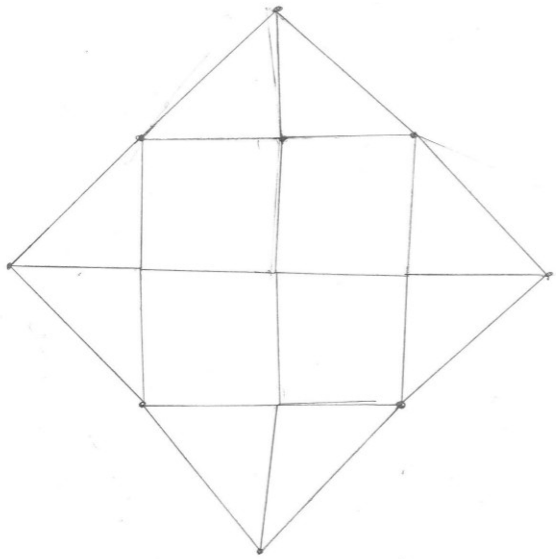
Production 1 : modèle figure A



Production 2 : modèle figure B



Production 3 : modèle figure B



Production 4 : modèle figure B