M1, Mathématiques. EXAMEN CT Avril 2014 – UE 2.1 – EC 1
Pistes de CORRECTION. ***PT et PW, GCD de Mathématiques***

Partie 1

Exercice 1

<u>Note des correcteurs</u> : tout « bon » raisonnement qui donne le « bon » nombre est accepté (pour cet exercice et pour les autres : principe de base) ! La solution proposée est la solution standard de ce type d'item : on utilise la décomposition canonique et on résout les équations ainsi obtenues.

Soit W = $\overline{abc}$ un nombre de trois chiffres. On a : W = $\overline{abc} = 100a + 10b + c$
Le nombre « retourné » de W est $\overline{cba} = 100c + 10b + a$. Leur différence s'écrit :
$\overline{abc} - \overline{cba} = 99a - 99c = 99(a - c)$. On en déduit $a - c = 3$.
La somme des chiffres est 11 donc $a + b + c = 11$.
La somme du triple du chiffre des centaines et du double du chiffre des dizaines est 22 donc $a + 2b = 22$.
On doit donc résoudre le système $\begin{cases} a - c = 3 \\ a + b + c = 11 \\ 3a + 2b = 22 \end{cases}$.

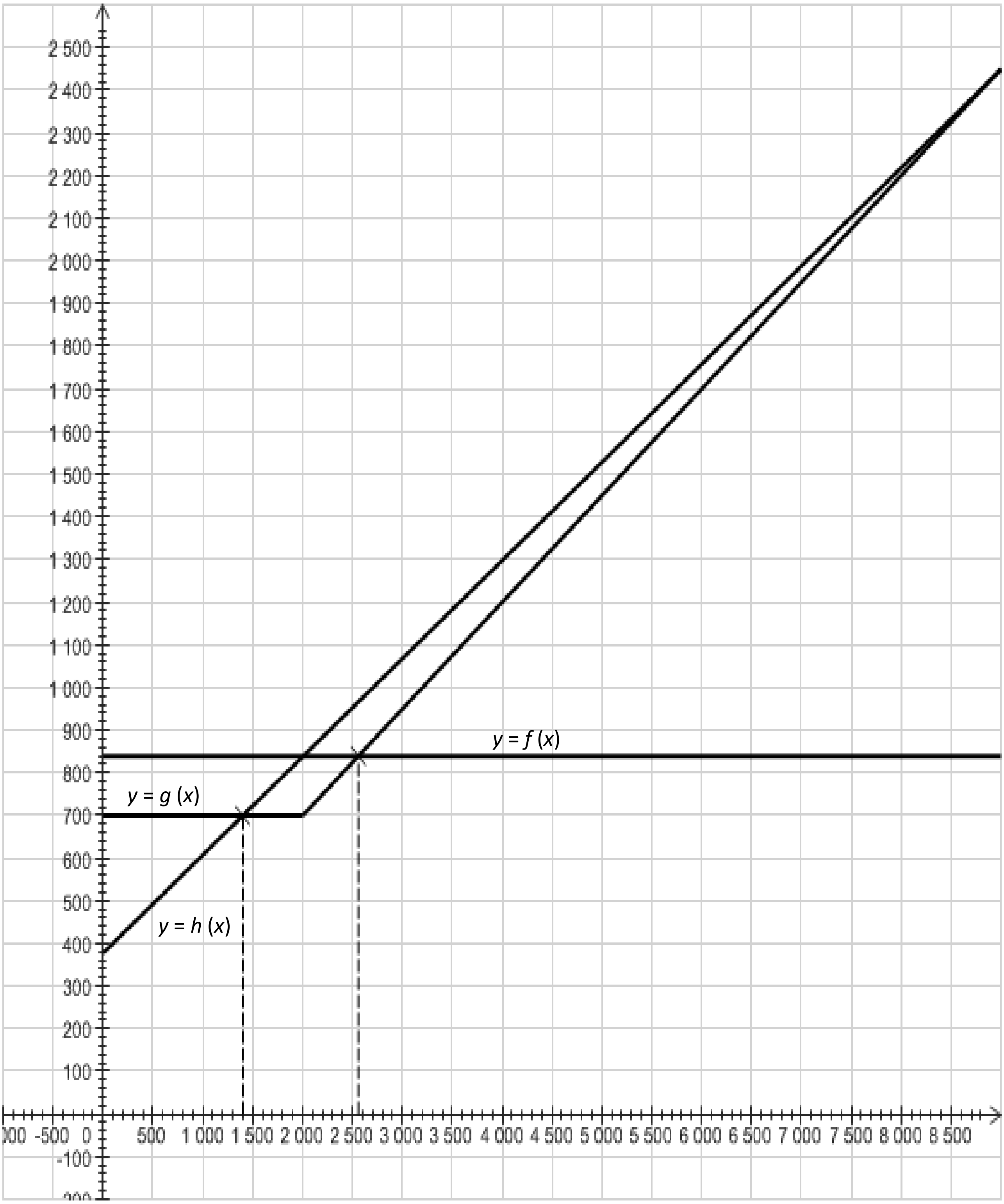
$$\begin{cases} a - c = 3 \\ a + b + c = 11 \\ 3a + 2b = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a - 3 \\ a + b + a - 3 = 11 \\ 3a + 2b = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a - 3 \\ 2a + b = 14 \\ 3a + 2b = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a - 3 \\ 4a + 2b = 28 \\ 3a + 2b = 22 \end{cases}$$

Par soustraction, on obtient $a = 6$. Par suite, $b = 2$ et $c = 3$.
Ainsi, le nombre recherché est 623, c'est la seule solution.

Exercice 2

1) Formule 1 : $y = f(x) = 840$.
   Formule 2 : si $x < 2000$, $y = g(x) = 700$
   si $x \geq 2000$, $y = g(x) = 700 + (x - 2000) \times 0{,}25$
   $y = g(x) = 700 + 0{,}25x - 500 = 200 + 0{,}25x$.
   Formule 3 : $y = h(x) = 7 \times 54 + 0{,}23x$
   $y = (h(x) = 378 + 0{,}23x$

2) Représentations graphiques des trois formules. *Quelques « critères » écrits sur la copie ayant autorisés les tracés étaient implicitement demandés !*



3) (i) <u>A l'aide du graphique</u> : « lecture » graphique. On demande quand même les « conclusions » de cette lecture ! Par exemple :

De 0 à 1400 km, la formule 3 est la plus avantageuse.

De 1400 km à 2560 km, la formule 2 est la plus avantageuse.

Ensuite, la formule 1 est la plus avantageuse.

(ii) <u>Par le calcul</u> : on doit donc résoudre des inéquations qui modélisent les conditions.

Résolvons l'inéquation $378 + 0{,}23x < 700$:

$378 + 0{,}23x < 700 \Leftrightarrow 0{,}23x < 322 \Leftrightarrow x < \dfrac{322}{0{,}23} \Leftrightarrow x < 1400$

Résolvons l'inéquation $200 + 0{,}25x < 840$:

$200 + 0{,}25x < 840 \Leftrightarrow 0{,}25x < 640 \Leftrightarrow x < 2560$

Résolvons l'inéquation $378 + 0{,}23x < 840$:

$378 + 0{,}23x < 840 \Leftrightarrow 0{,}23x < 462 \Leftrightarrow x < \dfrac{462}{0{,}23}$ $\qquad \left(\dfrac{462}{0{,}23} \approx 2008{,}7\right)$

Résolvons l'inéquation $200 + 0{,}25x < 378 + 0{,}23x$:

$200 + 0{,}25x < 378 + 0{,}23x \Leftrightarrow 0{,}02x < 178 \Leftrightarrow x < \dfrac{178}{0{,}02} \Leftrightarrow x < 8900$

Conclusion :

De 0 à 1400 km, la formule 3 est la plus avantageuse.
De 1400 km à 2560 km, la formule 2 est la plus avantageuse.
Ensuite, la formule 1 est la plus avantageuse. *Evidemment, les « calculs » confirment la lecture !*

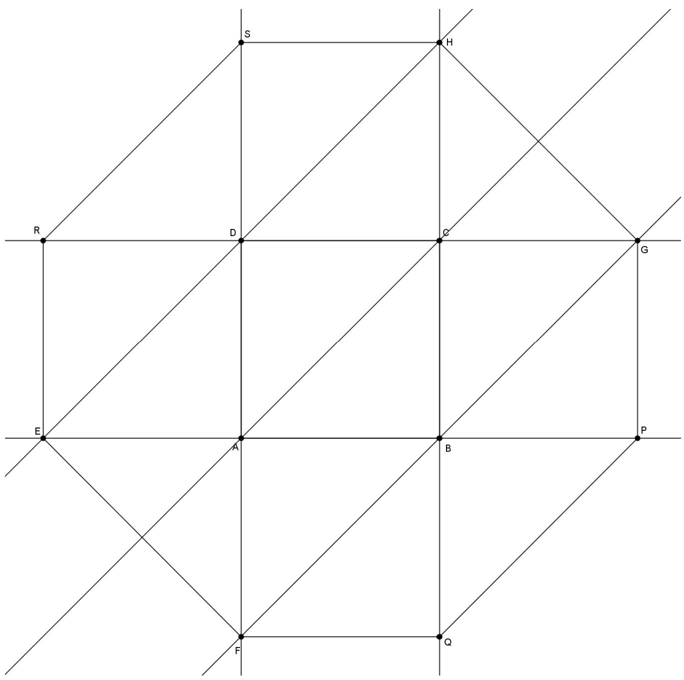
4) Coût pour deux semaines de vacances : calculs…

Formule 1 : $2 \times 840\ euros = 1680\ euros$;
Formule 2 : $2 \times 700\ euros + 500\ \times 0{,}25\ euros = 1525\ euros$;
Formule 3 : $54\ euros \times 14 + 4500 \times 0{,}23\ euros = 1791\ euros$.

Le client n'a pas fait le choix le moins cher. La formule 2 est la formule la moins coûteuse.

<u>Exercice 3</u>

<u>Figure « définitive » :</u>



1) Le quadrilatère ABCD est un carré, donc le triangle GCB est rectangle en C.
   Les droites (AC) et (BG) sont parallèles, donc les angles $\widehat{\mathrm{ACB}}$ et $\widehat{\mathrm{CBG}}$ sont alternes-internes. Ainsi, $\widehat{\mathrm{CBG}} = 45°$. Par suite, $\widehat{\mathrm{CGB}} = 45°$. On en déduit que le triangle GCB est rectangle isocèle en C.

   ABCD est un carré, donc le triangle DCH est rectangle en C.
   Les droites (EH) et (AC) sont parallèles donc les angles $\widehat{\mathrm{HDC}}$ et $\widehat{\mathrm{DCA}}$ sont alternes-internes. Ainsi $\widehat{\mathrm{HDC}} = 45°$. Par suite, $\widehat{\mathrm{DHC}} = 45°$. On en déduit que le triangle DCH est rectangle isocèle en C.

   Comme DC = CB, on en déduit HC = CG. Donc le triangle HCG est isocèle rectangle en C.
   Ainsi $\widehat{\mathrm{DHG}} = \widehat{\mathrm{DHC}} + \widehat{\mathrm{CHG}} = 45° + 45° = 90°$ et $\widehat{\mathrm{BGH}} = \widehat{\mathrm{BGC}} + \widehat{\mathrm{CGH}} = 45° + 45° = 90°$.

   De la même manière, on montre que : $\widehat{\mathrm{BFE}} = 90°$ et $\widehat{\mathrm{FEH}} = 90°$. Le quadrilatère EFGH est donc un rectangle.

2) D'après la démonstration ci-dessus, les triangles BCG, GCH, HCD et DCB sont rectangles isocèles et isométriques (ou superposables). Il en est de même pour les triangles ABD, ADE, EAF et FAB.
   Ces huit triangles sont des triangles isocèles rectangles isométriques ou superposables.
   Ainsi : Aire(EFGH) = 8 × Aire(DCB) = 4 × Aire(ABCD) = 100 cm².

3) La droite (AC) est parallèle à la droite (FG) et la droite (FG) est perpendiculaire à la droite (HG).
   Donc la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (GH).
   Ainsi, dans le triangle isocèle GCH, (AC) est la hauteur issue de G et donc la médiatrice de [HG].
   On en déduit que le point O est équidistant des points H et G (le point O appartient à la médiatrice de [HG]).
   On démontre de la même manière que O est équidistant des points E et F.
   O est donc le centre du cercle circonscrit au quadrilatère EFGH.

4) ABCD est un carré donc les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires.
   L'image de la droite (AC) par la symétrie de centre B est la droite (PQ). Donc les droites (AC) et (PQ) sont parallèles. Ainsi les droites (PQ) et (BD) sont perpendiculaires.
   L'image du triangle ABC par la symétrie de centre B est le triangle PBQ. Donc le triangle PBQ est isocèle rectangle en B.
   On en déduit que (BD) est la hauteur de PBQ issue de B et donc la médiatrice de [PQ].
   Ainsi, le point O qui appartient à la médiatrice de [PQ] est équidistant de P et Q.
   On démontre de la même manière qu'il est équidistant des points R et S.
   Soit I le milieu de [AD]. Dans le triangle isocèle rectangle AOD, (OI) est une hauteur. Donc OIF est un triangle rectangle en I. Ainsi, en appliquant le théorème de Pythagore à ce triangle, on a : OF² = OI² + IF² = 2,5² + 7,5² = 62,5. De même, OQ² = 62,5². Donc O est équidistant de F et Q.
   On démontre de la même manière : le point O est équidistant des points E et R, le point O est équidistant des points S et H, le point O est équidistant des points G et P.
   Conclusion : les points P, Q, R et S sont sur le cercle circonscrit au quadrilatère EFGH.

5) Les triangles FBQ et GBC sont symétriques par rapport à B. Les triangles QBP et CBA sont symétriques par rapport à B. Les triangles GBP et FBA sont symétriques par rapport à B.

   Les triangles EDA et HDS sont symétriques par rapport à D. Les triangles EDR et HDC sont symétriques par rapport à D. Les triangles RDS et CDA sont symétriques par rapport à D.
   On en déduit que le polygone EFQPGHSR est la juxtaposition de quatorze triangles rectangles isocèles isométriques (« = » superposables) au triangle ABC.
   Ainsi, Aire(EFQPGHSR) = 14 × Aire(ABC) = 7 × Aire(ABCD) = 7 × 25cm² = 175 cm².

Partie 2

Exercice 4 – QCM

1) Le volume d'un container cubique d'arête 30cm est : 30cm $\times$ 30cm $\times$ 30cm = 27000 cm^3.
   27000cm^3 = 27dm^3 = 27L. Or,$27 \div 1{,}5 = 18$, donc la réponse est 18 bouteilles.

2) Trois boulangers produisent 60 croissants en 6 minutes.
   Donc quatre boulangers produisent 80 croissants en 6 minutes $(4 \times (60 \div 3) = 80)$.
   Donc quatre boulangers produisent 240 croissants en 18 minutes $(80 \times 3 = 240)$.

Exercice 5 – Géométrie dans l'espace

a) Affirmation fausse. Un cube possède moins de faces (six) que d'arêtes (douze).

b) Affirmation vraie. (Quatre + quatre) arêtes pour la pyramide et huit sommets pour le cube.

c) Affirmation vraie. Six arêtes pour l'octaèdre régulier et six faces pour le cube

Exercice 6 – Analyse de travaux d'élèves

1) Production A.

   Erreur : erreur dans la transcription d'une retenue : elle vaut 2 dans la « colonne du milieu » au lieu de 1, après avoir additionné les unités dans les calculs par « colonne ».

   Hypothèse : l'élève associe retenue avec le « chiffre » « 1 » ; ou pour cet élève, la retenue (*additive*) vaut *toujours* 1.

   Production B

   Erreur : après avoir additionné les trois chiffres, colonne par colonne, l'élève met en retenue le chiffre des unités et écrit le chiffre des dizaines sous le trait horizontal.

   Hypothèse : mauvaise compréhension de la technique ou mauvaise compréhension du système décimal (« inversion » des unités et des dizaines) ; ou pour cet élève, l'addition posée relève d'un algorithme à appliquer qui ne fait pas sens.

   Production C

   Réponse correcte. *Attention aux extrapolations abusives : la production est correcte, mais rien dans ce travail ne permet d'affirmer que cet élève maîtrise la compétence : « sait effectuer à la main une addition posée « .de trois termes.*

   Production D

   Erreur : l'élève additionne les retenues aux chiffres des centaines.

   Hypothèse : mauvaise compréhension de la technique de l'addition. (Idem production B).

   Production E

   Erreur : erreur de calcul en additionnant les chiffres des dizaines.

   Hypothèse : erreur d'étourderie, à analyser plus finement.

Production F

Erreur : l'élève écrit les retenues mais il n'en tient pas compte dans ses calculs.

Hypothèse : mauvaise compréhension de la technique de l'addition posée. (Idem productions B et D).

Production G

Erreur : oubli d'une retenue en additionnant les dizaines.

Hypothèse : pour l'addition des chiffres des dizaines, l'élève écrit la retenue 2 mais fait comme si la retenue était 1. Il associe retenue et chiffre « 1 ».

Production H

Erreur : l'élève additionne les chiffres des unités, écrit la réponse sous le trait horizontal, puis fait de même pour les chiffres de dizaines et les chiffres des centaines. Les retenues ne sont pas apparentes.

Hypothèse : mauvaise compréhension de la technique de l'addition posée, notamment en ce qui concerne les retenues. (Idem productions B, D et F).

2) *Compétence* : effectuer, à la main, une « addition posée » de trois nombres supérieurs à 100.
Connaissances : les nombres supérieurs à 100 (du système décimal usuel) ; les tables d'addition ; *FONDAMENTAL* : le principe d'équivalence (et même d'égalité) par regroupements : dix unités d'un rang n valent une unité du rang (n + 1).
Capacités : tenir compte des retenues : savoir que ce n'est pas toujours « 1 », savoir les placer dans la bonne colonne et ne pas oublier d'additionner ces retenues avec les chiffres de la colonne idoine.

Partie 3

Exercice 7 – Pourcentage

1) Expressions, équivalentes à 78%, qu'il est possible de reconnaître après lecture de cette partie : soixante-dix-huit pour cent ; $\frac{78}{100}$; ... $+\frac{21}{100}+\frac{1}{100}=\frac{100}{100}$.

2) Trois égalités que pourraient écrire les élèves : $\frac{78}{100}+\frac{21}{100}+\frac{1}{100}=1$; $\frac{78}{100}+\frac{21}{100}+\frac{1}{100}=\frac{100}{100}$;
$78\%+21\%+1\%=100\%$.

3) La question **a-** de l'exercice **1** n'est pas en adéquation avec la partie précédente car elle fait référence à 100 ; il faut comprendre que « n% » signifie « n pour cent », il faut mettre le nombre en rapport avec 100 ce qui n'est pas exprimé dans la partie « *Cherchons ensemble* ». En fait, il faut mettre en rapport ce que dit Jules avec ce qui se trouve dans la partie gauche de l'étiquette.

4) a) Pour aider un élève qui aurait su résoudre la question **a-** mais pas la question **b-**, un enseignant pourrait lui demander : « Comment ferais-tu si au lieu de 200 billes, il n'y avait que 100 billes ? ». Le but est d'amener l'élève à revenir à 100 billes de façon qu'il puisse déduire la relation arithmétique pour 200 billes. Puis de faire agir « en acte » la proportionnalité implicite.

b) Soit l'élève va écrire $\frac{80}{200}$ (respectivement $\frac{120}{200}$) ; il s'agit d'une mise en rapport à l'aide de l'expression « 80 billes rouges sur 200 billes » ; puis il faut mettre en œuvre des connaissances sur la simplification des fractions. Soit l'élève reconnaît qu'il y a proportionnalité entre le nombre de billes rouges et le nombre total de billes ; alors les connaissances sont de l'ordre de la mise en œuvre d'une procédure de calculs pour résoudre ce type de problème (nécessitant des connaissances sur les doubles et les moitiés).

5) a) Pour être écrite sous la forme d'un pourcentage, la fraction $\frac{3}{10}$ nécessite des connaissances sur les écritures équivalentes de fractions décimales $\left(\frac{3}{10} = \frac{30}{100}\right)$, ce qui est au programme du cycle III.

b) Pour être écrite sous la forme d'un pourcentage, la fraction $\frac{60}{200}$ nécessite des connaissances sur les règles de simplification des fractions, ce qui n'est pas au programme de l'école primaire.

c) Pour $\frac{45}{100}$, il n'y a pas de connaissance mathématique supplémentaire par rapport à la partie « Cherchons ensemble ». Pour être écrite sous la forme d'un pourcentage, la fraction $\frac{60}{1000}$ nécessite des connaissances sur les écritures équivalentes de fractions décimales $\left(\frac{60}{1000} = \frac{6}{100}\right)$, ce qui est au programme du cycle 3.

6) Une procédure possible : prendre « tant de pour cent de … » : 60% de 400 ou $\frac{60}{100} \times 400 = 240$. Procédure experte, s'il en est ! Déterminer « tant de % de… », c'est « multiplier par la fraction décimale tant/100 ». Une question, hors barème : quelle justification de cette procédure ?

Autre procédure possible utilisable par un élève de CM2 : retour à la définition ou à un tableau de proportionnalité en utilisant un coefficient. 60 pains vendus pour 100 pains produits, 4×60 pains vendus pour 4×100 pains produits. *Réponse* : 240 pains vendus.

7) Deux arguments pour expliquer que le problème est plus difficile à résoudre que l'exercice **5** :

- Le contexte est moins familier et plus complexe à s'approprier ;
- Les données numériques font que le passage de « 5 pour cent » à « ? pour 250 » est plus difficile car 250 n'est pas un multiple de 100.

8) Cet encadré est relié à l'exercice **3**, en effet il s'agit de reconnaître des équivalences « simples » concernant les pourcentages exprimés sous forme fractionnaire et les pourcentages exprimés sous forme usuelle.

Analyse critique :

- Ecrire sous forme de fraction en centièmes (application directe de la partie « *Cherchons ensemble* ») ;
- « Simplification » d'une fraction, même « simple » (hors programme) ;
- Notion implicite de fraction irréductible (programme du collège) ; …

9) Le travail sur le changement d'écriture à partir de $\frac{78}{100} = 78\%$ est demandé en exercice **2** avec $\frac{45}{100}$ et en exercice **3** pour la première partie de la tâche. Ce travail ne permet pas de résoudre des problèmes liés à la proportionnalité, ni de comprendre le lien entre « % » et « … pour cent ». On est simplement dans un registre de changement d'écritures : insuffisant pour comprendre ce qu'est un pourcentage. Un pourcentage traduit une proportion deux et pas simplement un quotient de deux nombres (ou grandeurs) dont l'un des deux, celui qui est écrit au dénominateur est obligatoirement 100.