GCD de Mathématiques

Sujet d'entraînement

Hiver 2014

Le sujet est composé de 9 exercices. Il comporte 4 pages et doit être traité en quatre heures.

Il sera tenu compte de la qualité des raisonnements produits tout autant que du soin apporté à la rédaction des réponses, sans oublier l'orthographe. Il est rappelé que tout résultat produit devra être justifié.

L'utilisation du matériel dit « usuel » de géométrie plane (compas, règle graduée, équerre, rapporteur, gabarits divers, ...) et des calculatrices dites de « poche », y compris les programmables, alphanumériques ou à écran graphique est autorisée. (Il est rappelé que ces calculatrices, strictement personnelles, doivent être autonomes, sans possibilité d'usage d'une imprimante).

Exercice 1 – Vrai ou Faux. Pour chacune des six affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier.

1) **Affirmation 1 :** On peut déterminer le dividende et le diviseur d'une division euclidienne sachant que le dividende est plus petit que 3000, le quotient est 82 et le reste est 47.

2) **Affirmation 2 :** Si l'écriture en base dix d'un nombre entier possédant plus de deux chiffres se termine par 4 alors l'écriture en base dix du carré de ce nombre se termine par 16.

3) Deux melons (de même « densité ») sont tels que l'un d'eux a un diamètre double de l'autre. Le plus petit pèse 100 grammes. **Affirmation 3 :** Le plus gros pèse donc 400 grammes.

4) Deux vaches produisent 200 litres de lait en deux jours. **Affirmation 4 :** Neuf vaches produisent alors 4 050 litres en neuf jours.

5) Le carat vaut deux décigrammes ; c'est une unité de masse utilisée pour peser les pierres précieuses. Le « Cullinan » est le plus gros diamant du monde jamais découvert ; il pesait 3 106 carats (avant d'être taillé). **Affirmation 5 :** Le « Cullinan » ne pesait pas plus qu'une paire de baskets de masse approximative égale à 0,620 kilogramme.

6) **Affirmation 6 :** Le produit de deux nombres entiers naturels pairs consécutifs est multiple de 8.

Exercice 2 – 3 points. On rappelle la propriété P suivante :

« *Un nombre entier naturel et la somme de ses chiffres ont le même reste dans la division euclidienne par 9* »

1) Quel est le reste de la division de 164 234 330 258 647 par 9 ?

2) L'objet de cette question est de démontrer la propriété P pour un nombre entier strictement inférieur à 10 000. On considère un nombre entier naturel strictement inférieur à 10 000 et on note $\overline{abcd}$ son écriture en base dix.

- **a)** Montrer qu'il existe un entier naturel k tel que $\overline{abcd} = a + b + c + d + 9k$.
- **b)** On note r le reste de la division euclidienne de $\overline{abcd}$ par 9 et r' le reste de la division euclidienne de $a+b+c+d$ par 9. Montrer que $r = r'$.

3) **a)** Déduire de la propriété P un critère de divisibilité par 9 d'un nombre entier naturel, utilisant la somme de ses chiffres.

- **b)** Déterminer le plus grand diviseur commun de 18 et 164 234 330 258 643.

Exercice 3 – Boules et jetons. On dispose d'une urne et de deux boîtes numérotées A et B. L'urne contient deux boules indiscernables au toucher : une rouge et une bleue. On prélève une boule de l'urne. Si c'est la bleue, on prélève un jeton dans la boîte A qui en contient 5, indiscernables au toucher et numérotés de 1 à 5. Si c'est la rouge, on prélève un jeton dans la boîte B qui en contient 3, indiscernables au toucher et numérotés de 1 à 3.

1) Proposer un arbre modélisant cette situation.

2) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

- **a)** $\mathrm{E_A}$: « on a prélevé un jeton dans la boîte A »
- **b)** $\mathrm{E_5}$: « on a prélevé un jeton portant le n°5 »
- **c)** $\mathrm{E_2}$: « on a prélevé un jeton portant le n°2 »

Exercice 4 – Différence.

1) Proposer deux procédures de calcul réfléchi pour obtenir la différence entre 653 et 271. Justifier les étapes en citant les propriétés algébriques utilisées.

2) Proposer un énoncé de problème relevant de chacune des quatre typologies de Vergnaud dont la procédure experte de résolution consisterait à faire le calcul $653 - 271$.

3) Proposer deux techniques opératoires pour effectuer le calcul $653 - 271$. Justifier les étapes de ces techniques opératoires en citant les propriétés algébriques utilisées.

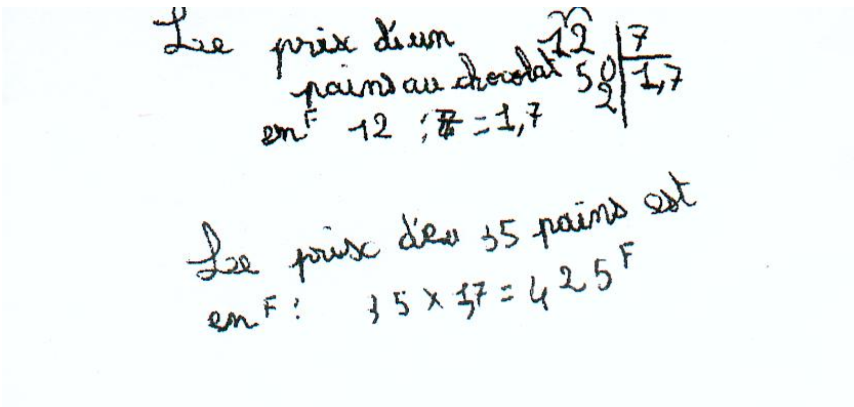
Exercice 5 On s'intéresse au problème suivant : Hélène empile des briques identiques d'un jeu de construction. Avec 7 briques, elle obtient une hauteur de 12cm, Hélène empile 35 briques. Quelle hauteur obtient-elle ?

1) Quelle est la connaissance mise en jeu ?

2) Envisager quatre procédures correctes susceptibles d'être mises en œuvre par des élèves de CM2.

3) Citer 3 variables didactiques de la situation.

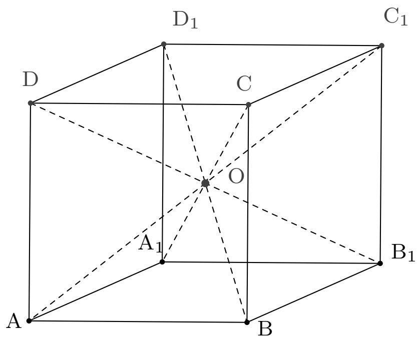
4) Rédiger un problème ressemblant au problème d'Hélène qui pourrait être celui qui a été proposé à l'élève dont la production est jointe.



5) Identifier la procédure mise en œuvre par cet élève.

6) Relever et analyser ses erreurs, formuler des hypothèses sur leur origine.

Exercice 6 – Cube et pyramide. Soit $\mathrm{ABB_1A_1D_1DCC_1}$ un cube de côté 4cm. Le point O est le centre de ce cube.



1) Dessiner en vraie grandeur un patron de la pyramide $\mathrm{OABB_1A_1}$. (Préciser les longueurs des segments tracés.)

2) Sans utiliser de formule de calcul de volume autre que celle qui donne le volume d'un cube, calculer le volume de la pyramide $\mathrm{OABB_1A_1}$. (En donner une valeur approchée au mm^3 près.)

Exercice 7 – Décagone. Dans un plan, on considère un décagone régulier convexe $\mathrm{A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}}$ inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R. On s'intéresse aux deux longueurs : $x = \mathrm{A_1A_2}$ et $y = \mathrm{A_1A_4}$, et on veut établir les égalités : $y - x = \mathrm{R}$ et $xy = \mathrm{R}^2$.

1) Calculez les angles des triangles $\mathrm{OA_1A_2}$ et $\mathrm{OA_1A_4}$.

2) Soit B l'intersection des droites $(\mathrm{OA_2})$ et $(\mathrm{A_1A_4})$. Calculez aussi les angles des triangles $\mathrm{OA_1B}$, $\mathrm{BA_1A_2}$ et $\mathrm{OBA_4}$.

3) Justifiez l'égalité des trois longueurs OB, $\mathrm{BA_1}$ et $\mathrm{A_1A_2}$ ainsi que celle des deux longueurs $\mathrm{OA_4}$ et $\mathrm{BA_4}$. Déduisez-en la différence $y - x$.

4) Justifiez le parallélisme des droites $(\mathrm{OA_4})$ et $(\mathrm{A_1A_2})$ ainsi que l'égalité :

$$\frac{\mathrm{R} - x}{x} = \frac{x}{\mathrm{R}}$$

Déduisez-en la valeur de xy.

Exercice 8 – Pourcentage. En janvier 2014, la TVA est passée de 19,60 % à 20%.

1) Un véhicule coûtait, toutes taxes comprises, 11000€ avant la hausse de TVA. Combien coûtait-il après ?

2) Peut-on dire que le prix du véhicule, toutes taxes comprises, a augmenté de 0,4 % ?

Exercice 9 Sur la page suivante, on trouvera quatre productions d'élèves d'une classe de CE1. Les élèves ont pour consigne de chercher individuellement des solutions aux deux problèmes donnés. Ils doivent expliquer par un ou des schémas la méthode suivie, donner le calcul fait, ainsi que le résultat trouvé.

Problème 1. À la piscine, il y a douze nageurs. Trois de ces nageurs sont dans le petit bain et les autres sont dans le grand bain. Combien de nageurs y a-t-il dans le grand bain ?

Problème 2. Un soir, la famille Fontaine ouvre une boîte de 50 petits gâteaux et mange 38 petits gâteaux. Combien de petits gâteaux reste-t-il dans la boîte ?

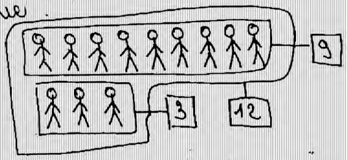
1) Quelle compétence mathématique est évaluée par ces deux problèmes ?

2) Analyser les productions des élèves en donnant des hypothèses sur les procédures utilisées.

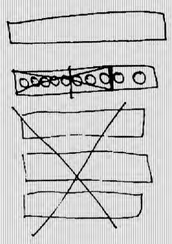
3) Les nombres utilisés ont-ils une influence sur le choix des schémas ou/et sur les procédures mises en œuvre ?

Elève 1

Julie



Je cherche le nombre de nageurs qu'il y a dans le grand bain. $\boxed{3+9=12}$. Il y a 9 nageurs dans le grand bain.



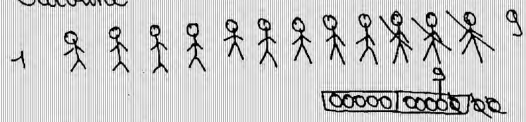
Je cherche le nombre qui reste de gâteaux.

$\boxed{50-38=12}$

Il y a plus que 12 gâteaux

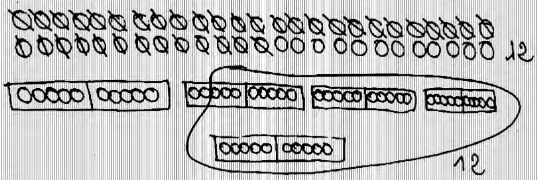
Elève 2.

Caroline



$12-3=9$

Il y a 9 nageurs qui vont dans le grand bain.

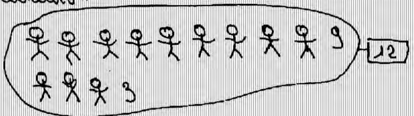


Il reste 12 petits gâteaux.

$50-38=12$

Elève 3.

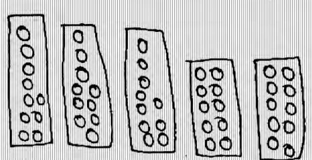
Edouard



Je cherche le nombre de nageurs

$12-3=9$

Il y a 9 nageurs dans le grand bain



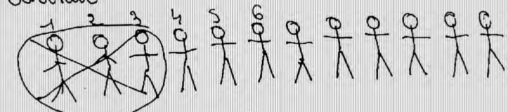
Je cherche le nombre de petits gâteaux.

$50-38=12$

Dans la boîte il reste 12 gâteaux

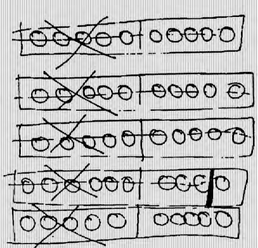
Elève 4.

Arthur



dans le grand bain

$3-12=9$



Il reste 11 petits gâteaux dans la boîte.

$50-38=11$