École supérieure du professorat et de l'éducation Académie d'Orléans-Tours — UNIVERSITE D'ORLEANS

MATHEMATIQUES
M1,S1, SESSION 2
Mars 2016

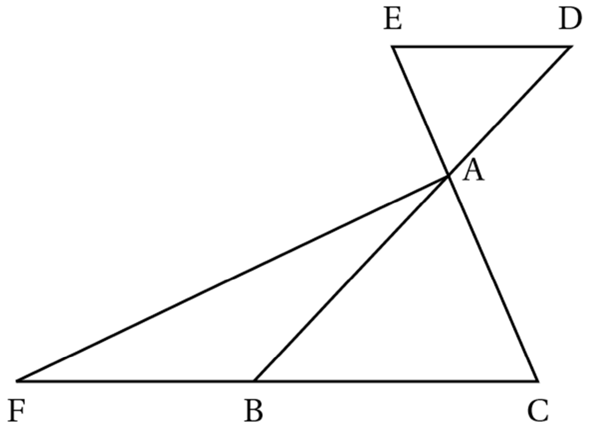
EXERCICE **1**

QCM : une seule réponse est correcte pour chaque item. Expliquer, justifier…

		Réponse A	Réponse B	Réponse C
1.	$\sqrt{32}$ est égale à :	$16\sqrt{2}$	$8\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$
2.	$\sqrt{9+16}$ est égale à :	7	5	$\sqrt{3}+\sqrt{4}$
3.	Pour tout nombre x, x^2-100 est égale à :	$(x+10)(x-10)$	$(x-10)^2$	$(x-50)^2$
4.	L'équation $(x-4)(2x+5)=0$ a pour solutions :	4 et $\frac{5}{2}$	-4 et $-\frac{5}{2}$	4 et $-\frac{5}{2}$
5.	Si $x=\sqrt{5}$ alors l'expression x^2+3x-1 vaut :	$4+3\sqrt{5}$	$7\sqrt{5}$	$24+3\sqrt{5}$
6.	Si le côté d'un carré est multiplié par 3 alors son aire est multipliée par :	3×4	3^2	3

EXERCICE **2**

La figure suivante n'est pas réalisée en vraie grandeur.
L'unité de longueur est le centimètre.
On donne :
AB = 8 ; BC = 9 ; AC = 6 ; AE = 4



1. Les droites (DE) et (BC) sont parallèles.

   Calculer AD.

   On donnera sa valeur exacte puis sa valeur arrondie au dixième de centimètre.

2. Soit F le point tel que C, B et F sont alignés dans cet ordre, avec BF = 6.

   Démontrer que les droites (EF) et (AB) sont parallèles.

3. On fait l'hypothèse que (AFC) est rectangle en A, calculer la valeur exacte de AF. Justifier.

EXERCICE ***3***

Cette question est la question **2.** d'un problème portant sur des durées et des prix, dont la modélisation aboutit à l'étude de trois fonctions *f*, *g* et *h.*

2. On considère les fonctions f, g et h définies de la façon suivante :

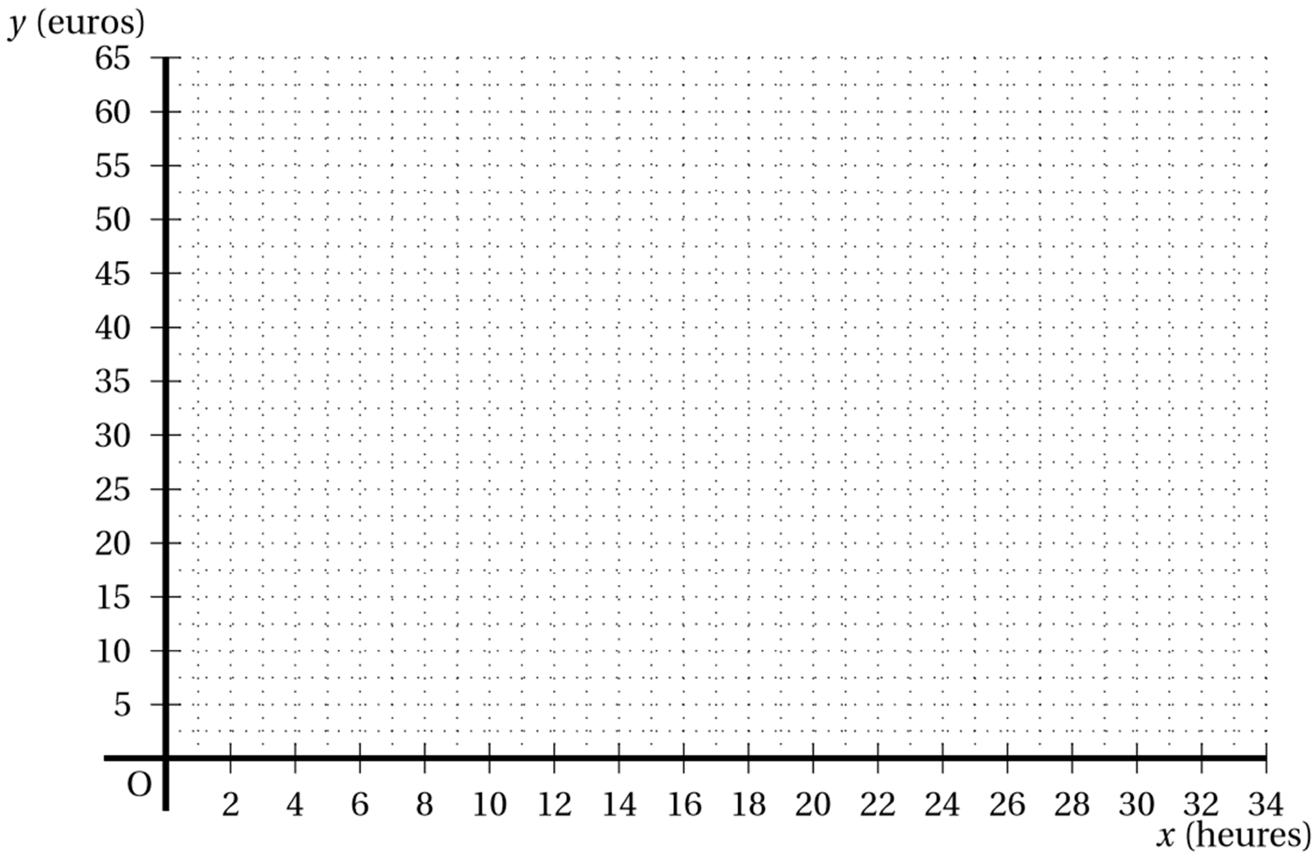
$f(x) = 25$

$g(x) = 1,5x$

$h(x) = 0,5x + 14$

Tracer les représentations graphiques de ces trois fonctions dans le repère orthogonal ci-dessous.

Unités graphiques : 1 cm pour 2 heures en abscisse, 1 cm pour 5 € en ordonnée.



Préciser la nature de chacune de ces fonctions.

EXERCICES ***4-1*** *et* ***4-2***

4-1. Un nombre entier naturel de trois chiffres augmente de 540 lorsqu'on permute les deux chiffres de gauche ; il diminue de 27 lorsqu'on permute les deux chiffres de droite. La somme des chiffres de ce nombre est 15. Quel est ce nombre ? Justifier…

4-2. Un supermarché reçoit une livraison de bouteilles. Si l'on compte les bouteilles par trois, par cinq ou par sept, il en reste toujours deux.

Sachant que le nombre de bouteilles livrées est compris entre 1 500 et 1 600, combien de bouteilles le supermarché a-t-il reçues ?

EXERCICES **5**

Langues en voie de disparition, d'après sujet DNB.

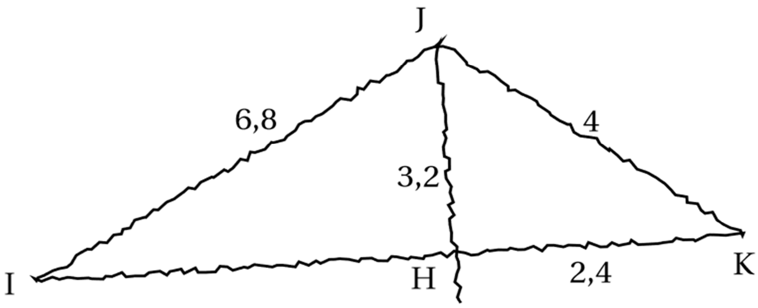
En 2010, l'UNESCO [1] a dressé un inventaire des langues en danger dans le monde. Il vise à susciter une prise de conscience sur la nécessité de préserver une diversité linguistique mondiale. Voici un tableau récapitulatif du nombre de langues en voie de disparition ou déjà éteintes :

Niveau de vitalité	En voie de disparition	Déjà éteintes	Total
Nombres de langues	...	231	2 580

1. Sur 6 000 langues répertoriées, 43 % sont soit en voie de disparition, soit déjà éteintes.
   Montrer, par un calcul, que cela représente un total de 2 580 langues.
2. En déduire le nombre de langues qui sont en voie de disparition.
3. Calculer le pourcentage de langues qui sont déjà éteintes sur les 6 000 langues répertoriées dans le monde.

EXERCICES **6.** Matériel « usuel » de géométrie autorisé…

On considère la figure ci-contre dessinée à main levée.
L'unité utilisée est le centimètre.
Les points I, H et K sont alignés.



1. Construire la figure ci-dessus en vraie grandeur.
2. Démontrer que les droites (IK) et (JH) sont perpendiculaires.
3. Démontrer que IH = 6 cm.
4. ~~Calculer la mesure de l'angle $\widehat{HJK}$, arrondie au degré.~~
5. La parallèle à (IJ) passant par K coupe (JH) en L. Compléter la figure.
6. Expliquer pourquoi $LK = 0,4 \times IJ$.

Pour la construction demandée en **1.**, laisser les traces de construction. *Instruments autorisés* : compas, règle graduée, équerre.

EXERCICES **7**

Le but de l'exercice est de trouver une *règle de calcul mental* qui permette de calculer le produit de deux nombres entiers naturels strictement inférieurs à 100 tels que :

- leur chiffre des dizaines soit le même
- la somme de leurs chiffres des unités soit 10. *Faire muchosss essais…*

Enoncer cette règle, justifier ou prouver.

EXERCICES ***8-1***

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse.
On rappelle que les réponses doivent être justifiées.

Affirmation 1 : n désigne un nombre entier naturel.
L'expression $n^2 - 6n + 9$ est toujours différente de 0.

Affirmation 2 : Un faucon pèlerin vole vers sa proie à une vitesse de 180 km/h. Il est plus rapide qu'un ballon de football tiré à la vitesse de 51 m/s.

EXERCICES ***8-2***

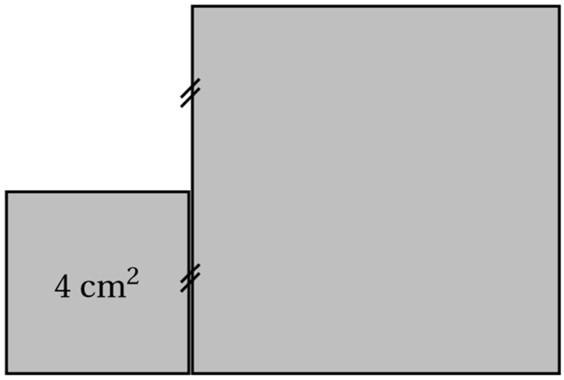
$$A = \frac{12}{5} - \frac{3}{5} \times \frac{7}{9} \qquad B = \left(\frac{2}{3} - 3\right) \div \frac{1}{9}$$

1. Calculer A et écrire la réponse sous forme de fraction irréductible.

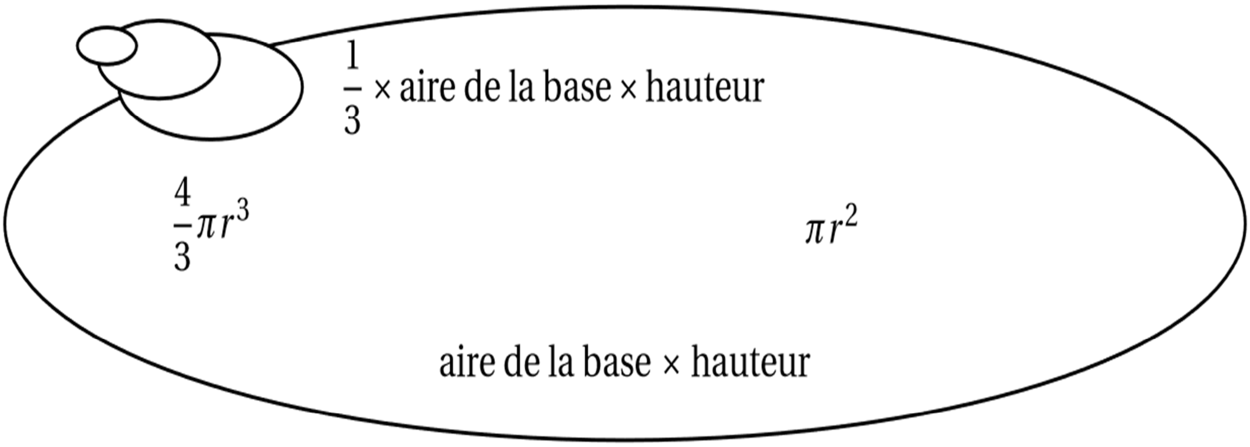
2. Calculer B et écrire la réponse sous forme d'un entier relatif.

EXERCICES ***8-3***

Construire un carré dont l'aire est égale à la somme des aires des deux carrés représentés ci-contre.
Vous laisserez apparentes toutes vos recherches. Même si le travail n'est pas terminé, il en sera tenu compte dans la notation.



EXERCICES ***8-4***



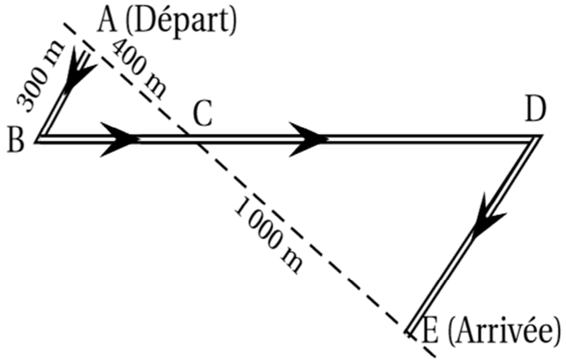
La « bulle » ci-dessus contient quatre formules. Au fait, elles servent à quoi ces formules ? Préciser alors le contexte dans lequel elles sont employées et inventer un problème SIMPLE, SIMPLE ! où chacune de ces formules est nécessaire…

*EXERCICES **9**, d'après sujet DNB*

Des élèves participent à une course à pied.
Avant l'épreuve, un plan leur a été remis.
Il est représenté par la figure ci-contre.
On convient que :

- Les droites (AE) et (BD) se coupent en C.
- Les droites (AB) et (DE) sont parallèles.
- ABC est un triangle rectangle en A.

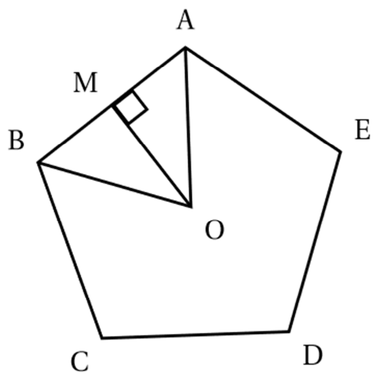
Calculer la longueur réelle du parcours ABCDE.



Si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de la recherche. Elle sera prise en compte dans la notation.

*EXERCICES **10**, d'après sujet DNB*

Le Pentagone est un bâtiment hébergeant le ministère de la défense des Etats-Unis.
Il a la forme d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon OA= 238 m.
Il est représenté par le schéma ci-contre.



1. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.

2. La hauteur issue de O dans le triangle AOB coupe le côté [AB] au point M.

a. Justifier que (OM) est aussi la bissectrice de $\widehat{AOB}$ et la médiatrice de [AB].

b. Prouver que [AM] mesure environ 140 m.

c. En déduire une valeur approchée du périmètre du Pentagone.

*EXERCICES **11***

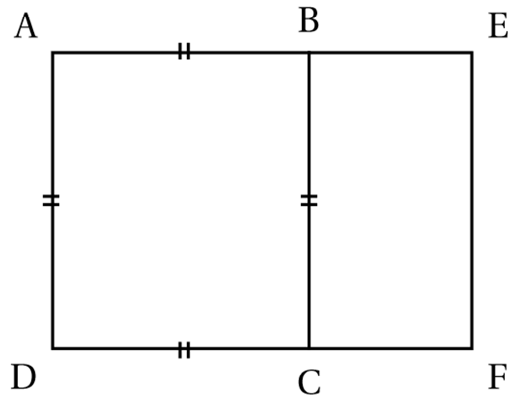
Le responsable commercial d'un grand magasin achète un lot d'ordinateurs de même prix. Il en vend le tiers avec un bénéfice de 20 %, le quart avec un bénéfice de 16 % puis le reste avec une perte de 7 %.

1) Calculer en pourcentage le bénéfice réalisé sur la totalité de la vente.

2) Sachant que le bénéfice réalisé est de 2 976 €, calculer le montant des achats du responsable commercial.

EXERCICES **12-1**

On considère la figure ci-dessous où AEFD est un rectangle avec $AB = \sqrt{15} - 1$ et $BE = 2$.



L'aire du rectangle AEFD est :

a. $2\sqrt{15} - 2$ **b.** 29 **c.** 14

EXERCICES **12-2**

EXERCICE 2

1. -2 est-il solution de l'inéquation : $3x + 12 < 4 - 2x$? Justifier.
2. -2 est-il solution de l'équation : $(x-2)(2x+1) = 0$? Justifier.
3. -2 est-il solution de l'équation : $x^3 + 8 = 0$? Justifier.
4. Le couple $(-2\ ;\ 1)$ est-il solution du système $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ x + 5y = 3 \end{cases}$? Justifier.

EXERCICE 3

1. Déterminer le PGCD de 238 et 170 par la méthode de votre choix. Faire apparaître les calculs intermédiaires.
2. En déduire la forme irréductible de la fraction $\dfrac{170}{238}$.

EXERCICES **13**

On s'intéresse au *quotient* et au *reste* de la *division euclidienne* de 40 626 par 12. Voici quatre résultats, tous erronés.

N° du résultat	Quotient	Reste
(1)	348	8
(2)	3 384	18
(3)	3 382	6
(4)	3 383	0

Sans s'appuyer sur le calcul effectif du *quotient* et du *reste*, expliquez pourquoi ces résultats ne sont pas corrects.

Pour cela, on utilisera un argument mathématique pour justifier l'erreur dans chacun des résultats ; ces quatre arguments doivent être de nature différente.

*EXERCICES **14***

Anatole, Basile et Casimir versent respectivement 60 000 €, 43 200 € et 46 800 € pour acheter un bateau. Lors de l'achat à l'étranger, le vendeur leur fait une remise de 20% sur le prix initial.

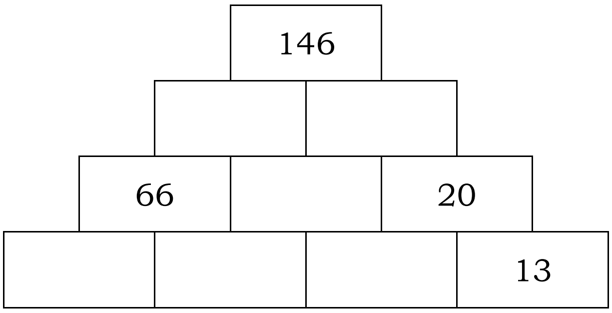
1) Calculer le prix réel payé par chaque associé, si la remise s'applique sur chaque part ?

2) Le coût de gardiennage et d'entretien s'élève à 5 000 € par an ; sachant qu'il est réparti proportionnellement aux parts, calculer la contribution de chacun ?

*EXERCICES **15***

Compléter les valeurs qui manquent dans le mur, sachant que le nombre écrit sur chaque brique est la somme des nombres écrits sur les deux briques sur lesquelles elle repose.

Expliciter la procédure de résolution utilisée et fournir le détail des calculs.



*EXERCICES **16***

Soit ABC un triangle tel que AB = 13cm , BC = 14cm , AC = 15cm. On considère la hauteur issue de A qui coupe (BC) en H.

Le but de cette question est de calculer AH connaissant les longueurs respectives des côtés du triangle.

a. Réaliser une figure à l'échelle $\frac{1}{2}$, sans utiliser l'équerre pour le point H.

b. On pose HC = $\boldsymbol{x}$; exprimer BH en fonction de $\boldsymbol{x}$.

c. Prouver que $\boldsymbol{x}$ vérifie l'équation $15^2 - \boldsymbol{x}^2 = 13^2 - (14 - \boldsymbol{x})^2$

d. En déduire la valeur exacte de la longueur AH.

*EXERCICES **17***

Soit un cercle ($\mathcal{C}$) de centre O et de rayon 4 cm, [AB] un diamètre de ce cercle et C un point du cercle tel que AC = 4 cm.

1. Quelle est la nature du triangle AOC ? Justifier. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

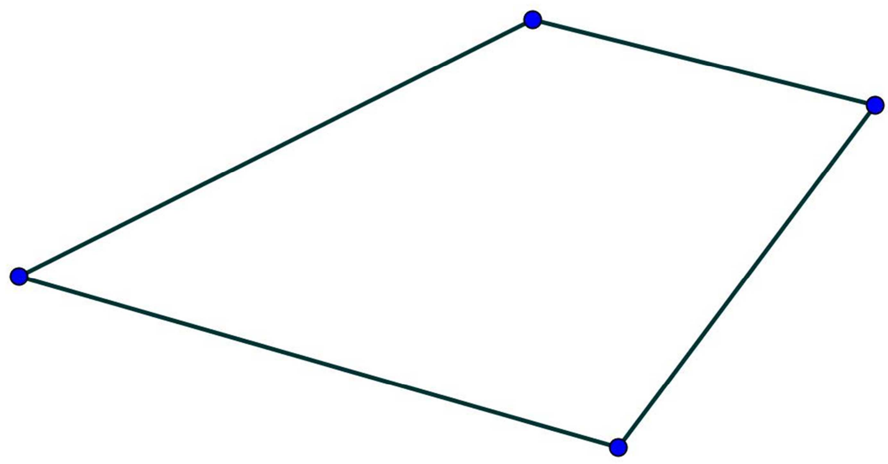
2. Soit H le milieu du segment [CB]. Démontrer que la droite (OH) est parallèle à la droite (AC).

3. Le point I désignant le milieu du segment [AO], la droite (CI) recoupe le cercle ($\mathcal{C}$) en D. Démontrer que le quadrilatère CADO est un losange, puis que les points D, H et O sont alignés.

4. Démontrer que la droite (CO) est perpendiculaire à la droite (BD).

EXERCICES **18**

Une tâche de reproduction. Reproduire, ***à l'échelle 1***, à la règle non graduée et au compas le quadrilatère proposé ci-dessous.



Indication : à quoi peut bien servir une diagonale ? Ah oui, mais c'est bien sûr !!!

EXERCICES **19**

(CALCULETTE ou CALCULATRICE non autorisées pour cet exercice)

On considère les quatre nombres ci-dessous, écrits sous forme fractionnaire :

$$\mathbf{A} = \frac{146}{113}\ ; \qquad \mathbf{B} = \frac{32}{25}\ ; \qquad \mathbf{C} = \frac{31}{24}; \qquad \mathbf{D} = \frac{195}{150}$$

1. Quelles sont les fractions décimales parmi les nombres **A**, **B**, **C** et **D** ? Justifier.

2. Ranger les quatre nombres **A**, **B**, **C** et **D** dans l'ordre croissant. Justifier ce rangement.

3. Trouver une fraction décimale, différente de **A**, **B**, **C** ou **D**, strictement comprise entre **A** et **C**.

4. Trouver une fraction non décimale, différente de **A**, **B**, **C** ou **D**, strictement comprise entre **B** et **D**.

EXERCICES **20**

On désigne par ***W*** un nombre entier naturel de quatre chiffres (*sachant qu'aucun des chiffres n'est égal à 9*). On note ***P*** le nombre obtenu en remplaçant chacun des chiffres de ***W*** par le chiffre qui le suit dans la liste : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. *Par exemple*, si le nombre W s'écrit avec les chiffres ***a***, ***b***, ***c*** et ***d***, alors son transformé ***P*** est écrit avec les chiffres (***a*** + 1), (***b*** + 1), (***c*** + 1) et (***d*** + 1).

1. Donner ***P*** lorsque ***W*** = 3241. Donner ***W*** lorsque ***P*** = 9193.

2. a) Pour un nombre ***W*** de quatre chiffres quelconques, exprimer ***P*** en fonction de ***W***. En déduire la différence ***d*** = ***P*** – ***W***.

b) Ecrire ***d*** comme un produit de deux nombres premiers.

EXERCICES **21**

On se donne un triangle ABC, à construire en suivant les consignes ci-après. On appelle H le pied de la hauteur issue de A. Le triangle ABH est isocèle en H, avec AH = 14cm et BC = 16cm.

1) Rédiger un programme de construction de cette figure, à réaliser à l'échelle 1.
2) Une droite parallèle à la droite BC coupe [AB] en J, coupe [AC] en K et coupe [AH] en L. Préciser alors la nature du triangle AJL. Justifier.

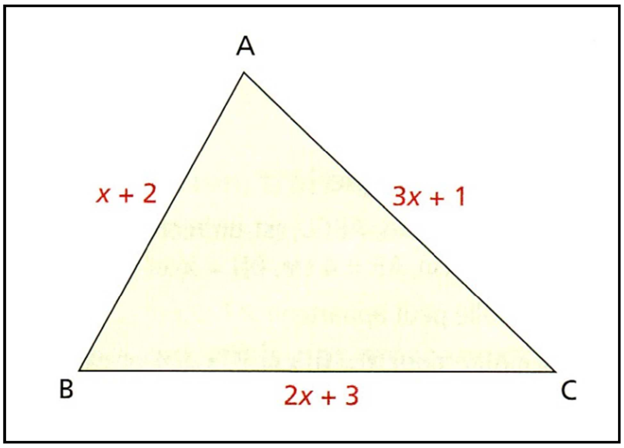
3) On pose AL = $\boldsymbol{x}$. Démontrer l'égalité : JK = $\frac{8}{7} \times \boldsymbol{x}$**.**

4) Calculer l'aire du triangle AJK en fonction de $\boldsymbol{x}$. Déterminer alors la valeur de $\boldsymbol{x}$ pour laquelle l'aire du triangle AJK est égale au quart de l'aire du triangle ABC.

EXERCICES **22**

Pour cet exercice, une unité de mesure des longueurs est fixée.

Dans la figure ci-dessous, on admet que les expressions ($\boldsymbol{x}$ +2), (3$\boldsymbol{x}$ + 1) et (2$\boldsymbol{x}$ + 3) sont les longueurs des côtés du triangle ABC, où $\boldsymbol{x}$ désigne un nombre réel positif.



1. Déterminer la valeur de $\boldsymbol{x}$ pour que le périmètre du triangle ABC soit égal à 54,6.
2. Déterminer la ou les valeurs de $\boldsymbol{x}$ pour que le triangle ABC soit isocèle en ?.
3. Pour cette question, on suppose que le triangle est rectangle en A. Etablir alors l'égalité : $3\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{x} - 2 = 0$.
4. Développer le produit : $(\boldsymbol{x} - 1) \times (3\boldsymbol{x} + 2)$. En déduire la ou les valeurs de $\boldsymbol{x}$ qui rendent le triangle effectivement rectangle en A.

EXERCICES **23**

Rédiger un programme de construction communicable à un étudiant M1 qui doit reproduire la figure ci-dessous, sachant que le triangle, *quelconque ou scalène*, ABC est donné « au départ ».