École supérieure du professorat et de l'éducation
Académie d'Orléans-Tours

Université ORLEANS
Université TOURS
Site ESPE de BLOIS
GCD de MATHEMATIQUES

MATHEMATIQUES. **Contrôle Continu 1**, *<u>durée</u> : une heure, quatre exercices.*
Calculatrice autorisée, en sus du matériel « usuel » de géométrie.

EXERCICE 1. QCM, justifier les réponses. *Pas de calculatrice pour cet exercice !*

1) Je suis un nombre décimal écrit sous sa forme décimale usuelle. On sait que mon chiffre des centièmes est 5, mon nombre de dixièmes est 35. Quelle est la proposition vraie parmi les cinq propositions écrites ci-dessous ?

a. 3,557	**b.** 0,357	**c.** 0,35	**d.** 5,35	**e.** Les quatre réponses sont fausses

2) Quelle fraction de dénominateur 50 est comprise entre $\frac{74}{101}$ et $\frac{75}{101}$?

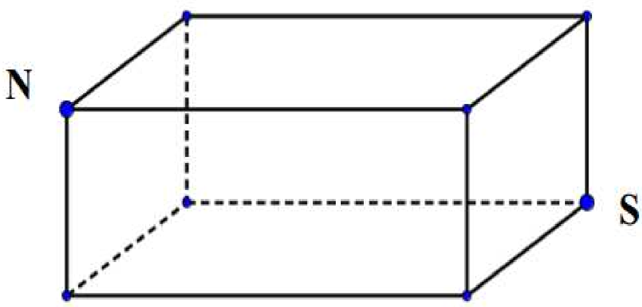
a. $\frac{35}{50}$	**b.** $\frac{36}{50}$	**c.** $\frac{37}{50}$	**d.** $\frac{38}{50}$	**e.** $\frac{39}{50}$

3) Une fraction a pour dénominateur 95. On sait de plus qu'elle désigne et représente un nombre rationnel NON décimal de la forme $\frac{\boldsymbol{n}}{95}$, avec $\boldsymbol{n}$ entier. Parmi les cinq nombres entiers ci-dessous, quel est celui qui convient pour le numérateur $\boldsymbol{n}$?

a. 5	**b.** 95	**c.** 57	**d.** 665	**e.** 19

4) Un petit QCM déjà vu ! Ah bon ? *Et oui, le questionnaire de début d'année…*

Les points **N** et **S** sont deux sommets opposés d'un pavé droit. *Cf. figure ci-contre.*



On s'intéresse aux « chemins » qui partent du sommet **N** et qui arrivent au sommet **S** ; chaque chemin doit respecter les deux contraintes suivantes :
1) le chemin doit suivre les arêtes du cube,
2) le chemin doit passer obligatoirement une et une seule fois par chacun des six autres sommets. Combien de chemins respectent ces contraintes ? *Justifier.*

A : 3 **B** : 6 **C** : 12 **D** : 18

5) Un triangle **PSG** est rectangle en **S**. Parmi les trois propositions ci-dessous, quelle est celle qui est vraie ? Corriger celles qui sont fausses.

a. On a l'égalité : $\mathbf{PG^2 + PS^2 = SG^2}$
b. Le centre du cercle circonscrit à **(PSG)** est le milieu de **[PS]**
c. Les angles $\widehat{\mathbf{SPG}}$ et $\widehat{\mathbf{SGP}}$ sont complémentaires.

EXERCICE 2

On note **W** = (***cdu***)$_{dix}$ un nombre entier composé de trois chiffres. On donne les quatre contraintes suivantes :

(i) La somme des trois chiffres de **W** est égale à 14.

(ii) **W** est plus grand que son nombre « retourné », noté **P**. (*Exemple* : le nombre « retourné » de 651 est 156).

(iii) La différence **W** – **P** = 99.

(iv) La différence entre le double du chiffre des dizaines et le triple du chiffre des centaines est égale à 2.

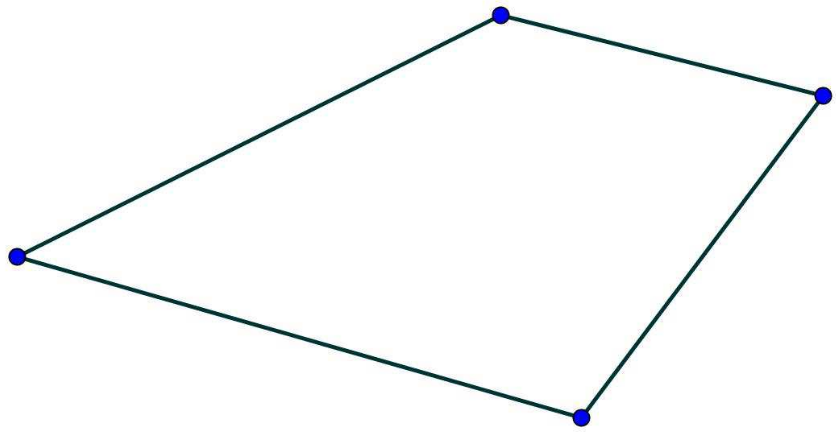
Trouver **W** ; après avoir « exploité » chacune des quatre contraintes ci-dessus. Justifier

EXERCICE 3 (*facultatif « = » non obligatoire, donc « = » bonus !*)

Reproduire sur la copie, à l'échelle 1, à ***la règle non graduée*** et ***au compas*** le quadrilatère proposé ci-contre.

Laisser les traces de construction.

Indication : à quoi pourrait bien servir une ***diagonale*** ?



EXERCICE 4

D'après sujet CRPE (2008) et revue Grand N « ***Points de départ*** », IREM de Grenoble.

Le document proposé en annexe 1, page 3, présente un problème tiré de la revue référencée ci-dessus.

Un Professeur des Ecoles souhaite faire travailler cette fiche par ses élèves de cycle III.

1) Proposer deux procédures-élèves possibles permettant de répartir 17 jetons entre deux boîtes grises et trois boîtes blanches. (*Cas n°1 du document annexe*). Donner toutes les répartitions possibles dans le cas n°1.

2) Argumenter sur le fait que ce problème est proposé en cycle III, plutôt qu'en cycle II.

3) La fiche propose trois cas successifs. Expliquer l'intérêt de la « progression » ainsi choisie par le Professeur des Ecoles.

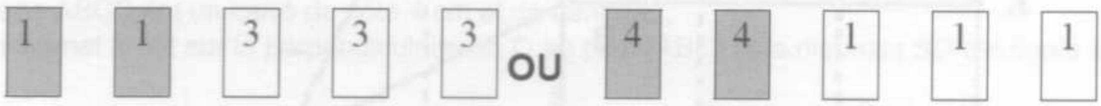
ANNEXE 1

Extrait de Spécial Grand N Points de départ

Répartition

On a 2 boîtes grises, 3 boîtes blanches et 11 jetons. Il s'agit de mettre les 11 jetons dans les boîtes de façon à ce qu'il y ait le même nombre de jetons dans les boîtes de même couleur.

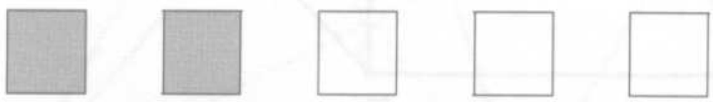
Il y a deux répartitions possibles :



A toi de trouver toutes les façons possibles de répartir les jetons dans les trois cas suivants.

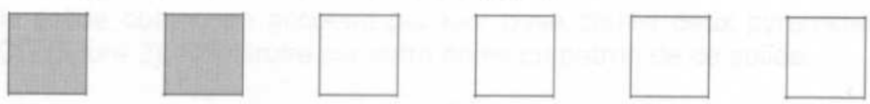
Cas n°1

2 boîtes grises, 3 boîtes blanches et **17** jetons



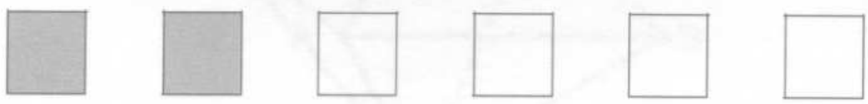
Cas n° 2

2 boîtes grises, **4** boîtes blanches et **17** jetons



Cas n°3

2 boîtes grises, 4 boîtes blanches et **20** jetons



Pistes de correction et barème INDICATIF !

EXERCICE 1. QCM, justifier les réponses. ***Pas de calculatrice pour cet exercice !***

Item 1. Bonne réponse : **a** = 3,557

Le chiffre des centièmes est 5 : les réponses qui peuvent convenir sont donc les cases **a**, **b** ou **c**. Le nombre de dixièmes est 35 s'écrit $35 \times 0{,}1 = 3{,}5$ ou $35 \times \frac{1}{10} = 3{,}5$.

Donc la solution est la réponse **a**.

Item 2. Bonne réponse :**c** = $\frac{37}{50}$

Une piste : réduire toutes les fractions au même dénominateur qui est $50 \times 101 = 5050$.

On a : $\frac{74}{101} = \frac{3700}{5050}$ et $\frac{75}{50} = \frac{3750}{5050}$.

On écrit toutes les fractions proposées avec ce même dénominateur et on range… Calculs à effectuer. On trouve : $\frac{37}{50} = \frac{3737}{5050}$.

Item 3. Bonne réponse :**a** = 5

Une piste : écrire les cinq fractions 5/95, 95/95, 57/95, 665/95 et 19/95. Chercher à les simplifier, sachant que $95 = 5 \times 19$. D'où les fractions simplifiées : $5/95 = 5 \times 1/5 \times 19 = 1/19$, nombre non décimal ; $95/95 = 1$, nombre entier donc décimal ; $57/95 = 3 \times 19/5 \times 19 = 3/5 = 6/10 = 0{,}6$, nombre décimal ; $665/95 = 7 \times 5 \times 19/5 \times 19 = 7$, nombre entier, donc décimal et $19/95 = 1/5 = 2/10 = 0{,}2$, nombre décimal. Conclusion : le seul numérateur qui convient est 5.

Item 4. Pour ceux qui ont travaillé de test de rentrée !!! Bonne réponse : **b** = 6.

Raisonnement : il y a trois départs possibles, puis à chaque point de première arrivée, il n'y a plus que deux choix et après un seul. Le nombre de chemins possibles respectant les contraintes est donc égal à : $3 \times 2 \times 1 = 6$.

Item 5. Le triangle **PSG** est rectangle en **S**, on a donc : $\widehat{\mathbf{S}} = 90°$ et **[PG]** est l'hypoténuse. Ce triangle est inscriptible dans un cercle de centre le milieu de l'hypoténuse et de diamètre l'hypoténuse.

Proposition **a**. Fausse, l'égalité est : $\mathbf{PS^2 + SG^2 = PG^2}$.
Proposition **b**. Fausse, le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse **[PG]**, pas **[SG]** qui est un des deux côtés de l'angle droit.

Proposition **c**. Vraie. Comme $\widehat{\mathbf{S}}$ est un angle droit, la somme des deux autres angles du triangle vaut 90°, c'est à dire qu'ils sont complémentaires.

BAREME indicatif : 5×2 points.

EXERCICE 2

En base dix, le nombre $\mathbf{W} = (\boldsymbol{cdu})_{\text{dix}}$ s'écrit : $\mathbf{W} = 100 \times \boldsymbol{c} + 10 \times \boldsymbol{d} + 1 \times \boldsymbol{u}$ (décomposition canonique !). Ecriture des quatre contraintes.

(i) Somme des chiffres égale à 14, c'est-à-dire : $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} + \boldsymbol{u} = 14$.

(ii) Le « retourné » de W est le nombre $\mathbf{P} = (\boldsymbol{udc})_{\text{dix}} = 100 \times \boldsymbol{u} + 10 \times \boldsymbol{d} + 1 \times \boldsymbol{c}$, avec $\mathbf{W} > \mathbf{P}$.

(iii) $\mathbf{W} - \mathbf{P} = 99$ s'écrit : $(100\boldsymbol{c} + 10\boldsymbol{d} + \boldsymbol{u}) - (100\boldsymbol{u} + 10\boldsymbol{d} + \boldsymbol{c}) = 99$; on supprime les parenthèses, les « $\boldsymbol{d}$ » s'annulent et on obtient : $99\boldsymbol{c} - 99\boldsymbol{u} = 99$, d'où $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{u} = 1$.

(iv) La contrainte s'écrit : $2\boldsymbol{d} - 3\boldsymbol{c} = 2$.

<u>Résumé des contraintes</u> : **W** > **P**, $c + d + u = 14$, $c - u = 1$ et $2d - 3c = 2$. On a ce qu'il faut !

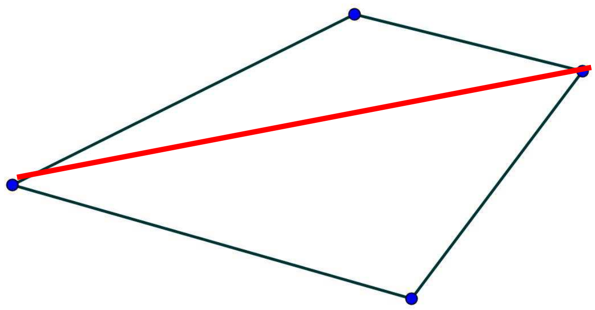
De l'égalité $c - u = 1$, on peut exprimer u en fonction de c : $c - 1 = u$. On substitue u par $(c - 1)$ dans l'égalité $c + d + u = 14$, c'est-à-dire : $c + d + c - 1 = 14$, c'est-à-dire : $2c + d = 15$. Normalement, il nous reste un (petit) système de deux équations à deux inconnues à résoudre :

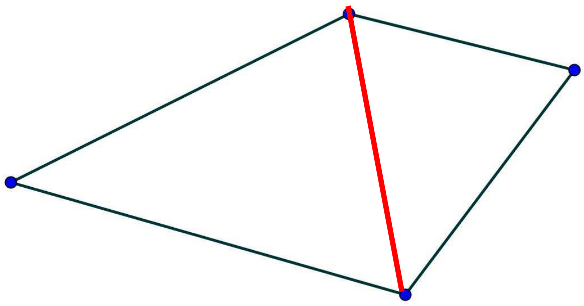
$\begin{cases} 2d - 3c = 2 \\ 2c + d = 15 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2d - 3c = 2 \\ d + 2c = 15 \end{cases}$. A résoudre. Au choix, combinaison ou substitution.

Substitution. Par exemple, de l'équation $d + 2c = 15$, on exprime d en fonction de c, c'est-à-dire : $d = 15 - 2c$, on substitue d par $(15 - 2c)$ dans l'autre équation du système ; on trouve : $2 \times (15 - 2c) - 3c = 2$, petit « bricolage » algébrique : $30 - 4c - 3c = 2$, d'où $-7c = -28$, d'où $c = 4$, on remplace c par 4 dans les autres équations pour déterminer les valeurs de d et u !!! On trouve : $c = 4$, $d = 7$ et $u = 3$, c'est-à-dire : **W** = 473.
Etape indispensable : vérifier que 473 convient !

<u>BAREME indicatif</u> : 5 points. Décomposition canonique de **W** = 1 point ; traduction des contraintes : 2 points ; résolution du système : 1 point et valeur de **W** = 1 point.

EXERCICE 3





Une « clef » : tracer une diagonale. Du coup, le quadrilatère est le « collage » de deux triangles ayant un côté commun (*la diagonale*). Donc, construction facile : on construit un premier triangle par report au compas de ses trois côtés et on construit le deuxième triangle « collé » par report successifs des deux autres côtés restants. Elémentaire, au sens de Watson !

<u>BAREME indicatif</u> : 2 points.
Construction : 1 point et éléments de justification : 1 point.

EXERCICE 4

Recommandé, mais pas obligatoire ! Pour bien « prendre en mains » le problème, on peut parfois chercher à le résoudre « pour soi » sans répondre directement à la liste des questions. Par exemple, « répartir 17 jetons dans deux boîtes grises et trois boîtes blanches » admet trois solutions distinctes :

(i) Un jeton dans chaque boîte grise et cinq jetons dans chaque boîte blanche : $2 + 5 \times 3 = 2 + 15 = 17$.

(ii) Quatre jetons dans chaque boîte grise et trois jetons dans chaque boîte blanche : $4 \times 2 + 3 \times 3 = 8 + 9 = 17$.

(iii) Sept jetons dans chaque boîte grise et un jeton dans chaque boîte blanche : $7 \times 2 + 3 = 14 + 3 = 17$.

1. Deux procédures possibles pour placer les jetons dans les boîtes.

➢ (*Presque dans tous les cas !*). Répartir un par un les jetons dans les cases, sans nécessairement s'occuper des couleurs et ajuster en cours de répartition. Il s'agit plutôt d'une procédure non numérique simulant une distribution. (Dessins ou réalisations effectives).

➢ Procédure numérique basée sur la connaissance des doubles. On place un jeton dans chaque boîte blanche, il reste alors quatorze jetons à placer dans deux boîtes blanches et quatorze est le double de sept.

➢ Procédure numérique utilisant le répertoire multiplicatif. On place un jeton dans chaque boîte grise, il reste alors quinze jetons et quinze = cinq × trois.

*Note de **PW***. Toute procédure « correcte » en termes d'argumentations et de justifications sera examinée…

Pour toutes les répartitions possibles, voir le début du corrigé de l'exercice.

2.

Le saut cycle II – cycle III vient surtout du fait que la consigne demande TOUTES les solutions possibles. Les nombres en jeu sont des variables qui minimisent les difficultés liées aux calculs. Résoudre des problèmes ayant plusieurs solutions ne relève pas d'un enseignement-apprentissage structuré au cycle II.

3.

Progression plutôt bien conçue.
Cas 1. Dévolution du problème, mise en évidence de plusieurs procédures ou stratégies, nécessité d'organisation pour trouver l'ensemble des solutions, …
Cas 2. Nombre pair de boîtes de chaque couleur, donc impossibilité de réussir à répartir un nombre impair de jetons. Important de proposer ce genre de situation, pour que les élèves e posent plus la question du pourquoi que celle du comment.
Cas 3. Réinvestissement des cas précédents, surtout le cas 1., et répartitions possibles, car nombre pair de jetons. *Note de **PW*** : quatre solutions, notées sous forme de couples, (2 ; 4), (4 ; 3), (6 ; 2) et (8 ; 1).

BAREME indicatif : 8 points. Question 1. (2 + 2) points : un point par procédure et deux points pour toutes les solutions. Question 2. 1 point. Question 3. 3 points, un point par cas, « bien » argumenté !

Exercice **1**	2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10	*Total* = 10 + 5 + 8 = 23 23 + 2 = 25 (avec exercice **3**)
Exercice **2**	1 + 2 + 1 + 1 = 5	
Exercice **3**	*Facultatif* : 2	
Exercice **4**	2 + 2 + 1 + 3 = 8	