EXERCICE 1. *Vrai* ou *Faux* ? Justifier les réponses.
Pas de calculatrice pour cet exercice !

1) *Une définition*. Un polygone est inscriptible s'il existe un cercle passant par TOUS les sommets de ce polygone.

a. TOUS les triangles sont des polygones inscriptibles.
b. TOUS les rectangles sont des polygones inscriptibles.
c. TOUS les quadrilatères « non particuliers » sont des polygones inscriptibles.
d. Il existe des polygones possédant deux angles droits qui sont inscriptibles.
e. Il existe des losanges qui sont inscriptibles.

2) Du côté des nombres entiers naturels, en base 10 ou en base $\boldsymbol{b}$.

a. L'écriture en base trois du nombre 74 est : $(2202)_{\mathit{trois}}$
b. L'écriture en base cinq du nombre 421 est : $(3161)_{\mathit{cinq}}$
c. Le nombre $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{n}^2 + \boldsymbol{n} + 41$ est un nombre premier, quelle que soit la valeur de $\boldsymbol{n}$.

EXERCICE 2 Division euclidienne, *d'après CRPE*

(*Calculatrice autorisée*). Déterminer les restes dans la division par 13 des cinq nombres ci-dessous. Justifier les réponses.

100	13 011	26 001	1 456 795	$5^3 + 7^8$

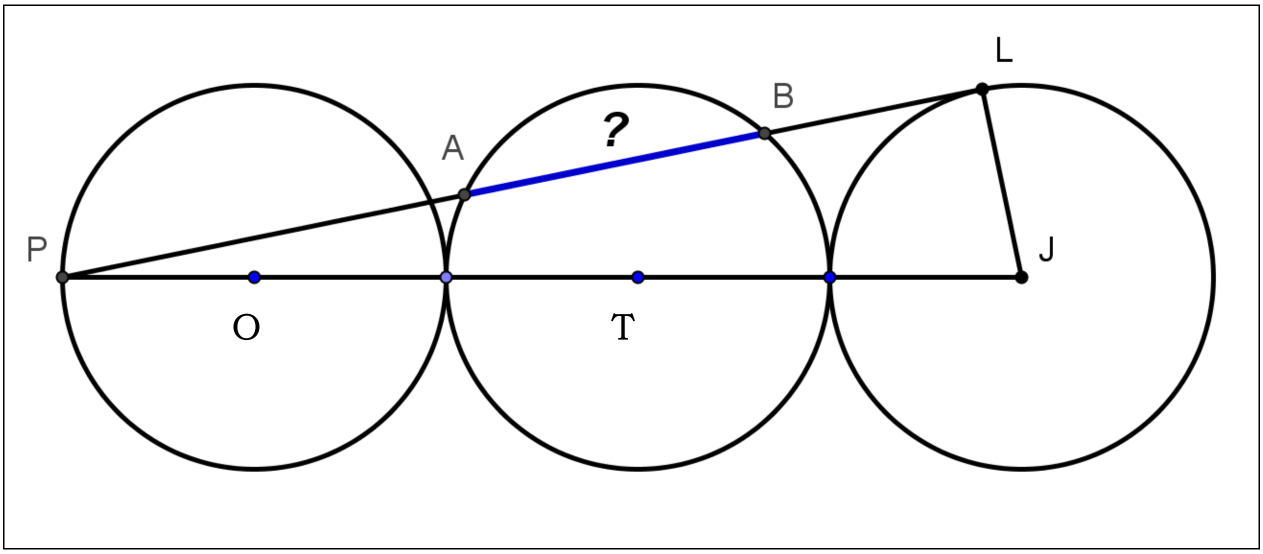
1) Soient $\mathbf{r_1}$ et $\mathbf{r_2}$ les restes respectifs des divisions par 13 de deux nombres entiers quelconques **a** et **b**. Montrer que les nombres $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ et $\mathbf{r_1} \times \mathbf{r_2}$ ont le même reste dans la division euclidienne par 13. (*Indication* : $\mathbf{a} = 13 \times \mathbf{q} + \mathbf{r_1}$ et $\mathbf{b} = 13 \times \mathbf{k} + \mathbf{r_2}$; $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \ldots$ (un produit à développer), conclure…).

2) Déduire de ce qui précède le reste de la division euclidienne par 13 du nombre $\mathbf{W} = 1\,456\,795 \times 13\,011$. Vérifier à la calculatrice que le reste ainsi déterminé est correct. *Bonus*. Rédiger (*éventuellement*) les séquences – calculatrices.

EXERCICE 3

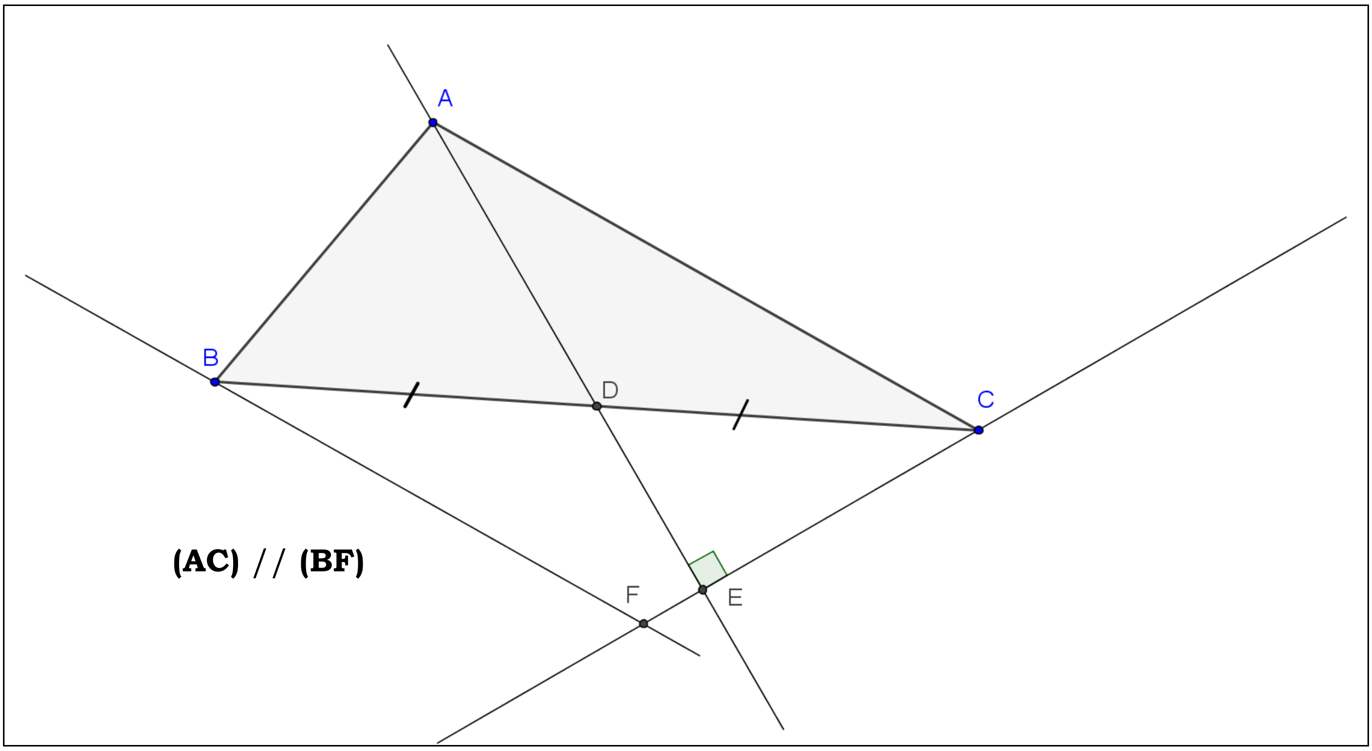
(*Calculatrice autorisée*). On s'intéresse à la figure de la page suivante, *à ne pas reproduire sur la copie*. Le cercle de centre **O** est tangent avec celui de centre **T**. Le cercle de centre **T** est tangent au cercle de centre **J**. Les trois cercles ont même rayon égal à 5cm. La droite **(PL)** est tangente au cercle de centre **J**. Le but de l'exercice est de calculer la valeur exacte de la longueur **AB**.

1) Tracer la perpendiculaire à **(AB)** passant par **T**. Cette perpendiculaire coupe **[AB]** en **W**. En appliquant le théorème de Thalès au triangle **PJL**, calculer la valeur exacte de la longueur **TW**. *Préciser les conditions d'application du théorème.*
2) Tracer **[TA]** et **[TB]**. Préciser la nature du triangle **TAB**. Que représente **(TW)** pour ce triangle ?
3) En appliquant le théorème de Pythagore au triangle **TWA**, calculer la valeur exacte de **AW**. *Préciser les conditions d'application du théorème.* Conclure.



EXERCICE 4

Rédiger un programme de construction communicable à un étudiant qui doit reproduire la figure ci-dessous, sachant que le triangle, *scalène*, **ABC** est donné « au départ ». (*Pas d'instruction demandée pour construire **ABC** : la construction se fait donc à partir de ce triangle*).



Pistes de correction et barème INDICATIF !

EXERCICE 1. Vrai ou Faux, justifier les réponses. ***No calculatrice pour cet exercice !***

1) Question de cours !
Item **a**. **VRAI**. Tout triangle possède un cercle circonscrit. (*Construction* : médiatrices, …)
Item **b**. **VRAI**. Le centre du cercle est le centre du rectangle et le diamètre de ce cercle est la diagonale du rectangle.
Item **c**. **FAUX**. Une précision. On entend par « non particulier », un quadrilatère ne possédant aucune propriété métrique ou géométrique remarquable. Le dessin d'un contre-exemple suffit !
Item **d**. **VRAI**. Le carré est un losange, le carré est inscriptible dans un cercle de centre le centre du carré et de diamètre la diagonale, donc il existe des losanges inscriptibles. Attention, un losange non-carré n'est pas inscriptible, voir item c.

2) Question de cours, bis !
Item **a**. **VRAI**. On a le choix, soit on convertit 74 en base trois ; soit on part de (2202)trois et on convertit ce nombre en base 10.

(i) 74 en base trois. On a : $27 < 74 < 108$, c'est-à-dire : $3^3 < 74 < 3^4$, donc l'écriture en base trois de 74 contient quatre chiffres. Ensuite, on peut poser la file des divisions euclidiennes par 3. On trouve : 2 (dernier quotient inférieur à trois), et les restes, <u>en remontant</u> : 2, 0 et 2, d'où : 74 = (2202)*trois*

(ii) Conversion inverse. On a : (2202)*trois* $= 2 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 2 \times 3^0 = 2 \times 27 + 2 \times 9 + 0 \times 3 + 2 \times 1 = 54 + 18 + 0 + 2 = 74$.

Item **b**. **FAUX**. Un peu de lecture sur l'écriture proposée suffit à infirmer la proposition. En effet, le « chiffre » 6 n'existe pas en base cinq, donc c'est faux !

Item **c**. **FAUX**. En affectant plusieurs valeurs à $\boldsymbol{n}$ et en calculant **N**, on conjecture que la proposition semble vraie. Oui, mais il faut aller jusqu'au Loir et Cher (41 !) pour invalider la proposition. En effet, pour $\boldsymbol{n} = 41$, on a $\mathbf{N} = 41^2 + 41 + 41 = 41^2 + 2 \times 41 = 41 \times (41 + 2) = 41 \times 43 = 1763$. Donc **N** possède ainsi d'autres diviseurs que 1 et 1763, puisque **N** s'écrit comme produit de deux nombres entiers autres que 1 et 1763.

<u>Intermède culturel</u> ; 1763 est une grande année historique. En effet, le Traité de Paris met fin à la Guerre de Sept Ans. Cette guerre a pu être considérée comme une première « petite » guerre mondiale, de part les « états » belligérants (Royaume de France vs Royaume d'Angleterre, Archiduché d'Autriche vs Royaume de Prusse, …) et les « lieux » des conflits (Europe, Amérique du Nord, Silésie, …). Ah oui ! C'est donc depuis cette année 1763 qu'on a perdu l'Amérique !!!

EXERCICE 2. Division euclidienne

0) Pas le choix : on pose les divisions à la main ! Ou on exploite habilement la caltoss !
<u>Résultats</u> : $100 = 13 \times 7 + \mathit{9}$, avec $9 < 13$; $13\,011 = 13 \times 1\,000 + \mathit{11}$, avec $11 < 13$; $26\,001 = 13 \times 2\,000 + \mathit{1}$, avec $1 < 13$; $1\,456\,795 = 13 \times 112\,061 + \mathit{2}$, avec $2 < 13$ et $5^3 + 7^8 = 125 + 5764801 = 5764926$ et $5764926 = 13 \times 443455 + \mathit{11}$, avec $11 < 13$. Ouf !!!

1) On a : $\boldsymbol{a} = 13 \times \boldsymbol{q} + \boldsymbol{r1}$ et $\boldsymbol{b} = 13 \times \boldsymbol{k} + \boldsymbol{r2}$, avec les conditions sur les restes, ne pas oublier ! On calcule le produit $\mathbf{P} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (13 \times \boldsymbol{q} + \boldsymbol{r1}) + (13 \times \boldsymbol{k} + \boldsymbol{r2})$. Rien de compliqué si on applique la double distributivité. On a donc : $\mathbf{P} = 13 \times \boldsymbol{q} \times 13 \times \boldsymbol{k} + 13 \times \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{r2} + \boldsymbol{r1} \times 13 \times \boldsymbol{k} + \boldsymbol{r1} \times \boldsymbol{r2} = 13 \times \mathbf{T} + \boldsymbol{r1} \times \boldsymbol{r2}$ (On peut mettre 13 en facteur dans les trois premiers termes de la somme ci-dessus, pour la commodité de lecture, on note **T** le nombre (*dividende*) multiplié par 13). Donc le reste de $\mathbf{P} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ est : $\boldsymbol{r1} \times \boldsymbol{r2}$. Maintenant, le produit $\boldsymbol{r1} \times \boldsymbol{r2}$ peut être supérieur à 13 (*par exemple*, on peut avoir : $\boldsymbol{r1} = 8$ et $\boldsymbol{r2} = 3$, avec $8 \times 3 = 24 > 13$). Le reste de la division euclidienne de $\boldsymbol{r1} \times \boldsymbol{r2}$ par 13 est donc celui de la division euclidienne de **P** par 13.

2) *<u>Application</u>* : le reste de la division de $1\,456\,795 \times 13\,011$ par 13 est donc égal au reste de la division de 2×11 (= 22) par 13 ; or $22 = 13 \times 1 + 9$. D'où le reste de la division euclidienne de **W** par 13 est égal à 9. <u>Preuve calculatoire</u> : retrouver ce reste à la caltoss !

EXERCICE 3. Exercice « bateau » et très facile !!!

Une remarque préliminaire ! Le bandeau de l'exercice <u>annonce</u> qu'on va calculer la valeur exacte de **AB**. A priori, sans avoir répondu aux questions de l'exercice, on ne peut donc pas calculer cette valeur. C'est ce qu'on appelle « un problème de lecture » (*un peu léger comme analyse !*) lorsqu'on cherche à calculer **AB**, sans dérouler les questions de l'exercice ! De fait, c'était impossible. Donc, on va « dérouler » les questions les unes après les autres…

1) On trace la perpendiculaire demandée. Du coup, on a **(TW)** // **(LJ)** car toutes deux perpendiculaires à **(PL)**.

Dans le triangle **PLJ**, les droites **(TW)** et **(LJ)** sont parallèles avec **W** $\in$ **[PL]** et **T** $\in$ **[PJ]**. Par application de l'énoncé direct du théorème de Thalès à ce triangle, on a :

$\frac{\mathbf{PT}}{\mathbf{PJ}} = \frac{\mathbf{PW}}{\mathbf{PL}} = \frac{\mathbf{TW}}{\mathbf{LJ}}$, c'est-à-dire : $\frac{15}{25} = \frac{\mathbf{PW}}{\mathbf{PL}} = \frac{\mathbf{TW}}{5}$. On s'intéresse à l'égalité : $\frac{15}{25} = \frac{\mathbf{TW}}{5}$.

D'où **TW** $= \frac{5 \times 15}{25} = 3$ (cm).

2) et **3)** Le triangle est isocèle en **T**, en effet, **[TA]** et **[TB]** sont des rayons. (*Même si cela ne sert à rien dans cet exercice, on rappelle que dans ce cas, la hauteur **[TW]**, issue du sommet principal **T** est aussi médiatrice de **[AB]**, bissectrice de $\widehat{\mathbf{ATB}}$ et médiane issue de **T***).

On se place dans le triangle **ATW**, rectangle en **W** (ou **TWB**), on peut donc appliquer l'énoncé direct du théorème de Pythagore ; on a : $\mathbf{TB}^2 = \mathbf{TW}^2 + \mathbf{WB}^2$, c'est-à-dire : $5^2 = 3^2 + \mathbf{WB}^2$, d'où $WB^2 = 25 - 9 = 16$, c'est-à-dire **WB** = 4 (cm).

D'où **AB** = **AW** + **WB** = 4 + 4 = 8 (cm). Et voilà, facile !

EXERCICE 4. Exercice « bateau », classique et aussi très facile !!!

Il y a plusieurs organisations des instructions du programme de construction. L'essentiel, c'est de bien écrire et de bien rédiger les instructions, dans un langage précis et approprié.

<u>Un exemple de programme</u>. (*Soit on commence par la **perpendiculaire**, soit on commence par la **parallèle***).

(i) Tracer la médiane relative à **[BC]**, issue de **A**. Appeler **D** le pied de cette médiane.

(ii) Tracer la perpendiculaire à **(AD)** passant par **C**. Appeler **E** le point d'intersection de ces deux droites. (Marquer le codage).

(iii) Tracer la parallèle à **(AC)** passant par **B**. Appeler **F** le point d'intersection de cette parallèle avec **(CE)**.

BAREME indicatif

Exercice **1**	4 × 1 point + 3 × 1 point. <u>*Total*</u> : 7 points.
Exercice **2**	2 points (*en tout*) + 3 points + 1 point. <u>*Total*</u> : 6 points.
Exercice **3**	3 points + 3 points + 1 point. <u>*Total*</u> = 7 points.
Exercice **4**	2 points (*ou zéro, pas sympa !*).

<u>Total général</u> = 7 points + 6 points + 7 points + 2 points = 22 points.