Eléments de corrigé et BAREME ***indicatif et simplifié*** du CT – M1 (**avril 2015**)

PARTIE 1 (sur **15** points)

EXERCICE 1

1°) Les résultats possibles sont : 345, 354, 435, 453, 534, 543, avec explications ou justifications...

2°) Les six *issues* (ou résultats, ou événements élémentaires, ou …) étant ***équiprobables***, on va déterminer le cardinal de chacun des événements dont on cherche la probabilité, puis on peut appliquer la formule ***p*(E) = card(E)/6**, pour une *issue* **E** déterminée.

- Un nombre est divisible par 5 si et seulement si son écriture se termine par 5, donc **A** = {345,435}, c'est à dire : card(**A**) = 2, d'où : ***p*(A) = 2/6 = 1/3**.
- Un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est multiple de 3 ; or 3+4+5 = 12, multiple de 3, donc toutes les issues le sont, d'où : ***p*(B) = 1**.
- Enfin, un multiple de 3 est divisible par 6 si et seulement si il est pair, donc **C** = {354,534}, c'est à dire : card (**C**) = 2, d'où : ***p*(C) = 2/6 = 1/3**.

BAREME. 0,5 pt (*1)*) + 1,5 pts (*2)*) = **2** pts

EXERCICE 2

1°) a) Un « petit » cube a *au plus trois* faces coloriées (c'est le cas des huit « cubes-coins » ou « sommets") : les valeurs possibles sont donc : 0 ou 1 ou 2 ou 3.

1°) b) Il y a au total **27 «** petits » cubes ($27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$).

Seul le « petit » cube « central » n'est pas colorié, donc ***p*(0) = 1/27** ; les « petits » cubes placés au centre de chacune des six faces du grand cube sont coloriés une fois, donc ***p*(1) = 6/27 = 2/9** ; les « petits » cubes placés au milieu de chacune des douze arêtes du « grand » cube sont coloriés deux fois, donc ***p*(2) = 12/27 = 4/9** ; enfin les « petits » cubes placés aux « coins » des huit sommets du grand cube sont coloriés trois fois, donc ***p*(3) = 8/27**.

2°) a) *<u>Indication</u>* : une *représentation* du « grand » cube coupé en quatre est une bonne idée !

Les valeurs possibles sont toujours *les mêmes* (même raisonnement), mais il y a cette fois **64** « petits » cubes ($64 = 4 \times 4 \times 4 = 4^3$) ; avec cette fois-ci, il y a huit « petits » cubes "centraux" (cube « intérieur » de deux sur deux), donc ***p*(0) = 8/64 = 1/8**. Il y a quatre « petits » cubes « aux centres » de chaque face, soit $24 = 6 \times 4$, d'où : ***p*(1) = 24/64 = 3/8** ; deux « petits » cubes « à l'intérieur » de chaque arête, soit $24 = 12 \times 2$, d'où : ***p*(2) = 24/64 = 3/8** ; et toujours huit « petits » cubes placés aux sommets, donc ***p*(3) = 8/64 = 1/8**.

<u>Indication</u> : Le nombre de « petits » cubes centraux, c'est-à-dire non coloriés peut s'obtenir à la fin des calculs, par soustraction de tous les « petits » cubes coloriés à 64.

2°) b) Dans cette question, on modélise : on généralise les deux situations précédentes dans le cas où on coupe en ***n*** « petits » cubes. *<u>Item très intéressant</u>* ! On applique donc le même raisonnement dans le cas général.

Les valeurs possibles sont encore les *mêmes* ; mais il y a cette fois $n \times n \times n = n^3$ « petits » cubes, dont $(n - 2)^3$ « petits » cubes « centraux » (cube « intérieur » de $(n - 2)$ sur $(n - 2)$), donc **p(0)** = $(n - 2)^3/n^3$; il y a $(n - 2)^2$ « petits » cubes « aux centres » de chaque face, soit $6 \times (n - 2)^2$, d'où : **p(1)** = $6 \times (n - 2)^2/n^3$; il y a $(n - 2)$ « petits » cubes « à l'intérieur » de chaque arête, soit $12 \times (n - 2)$ d'où ***p*(2)** = …; idem pour finir : on retrouve les égalités proposées…

Pour retrouver les résultats de la question 1, on remplace ***n*** par la valeur 3 et on « lance » les calculs… *<u>Note de **PW**</u>* : il est indispensable de ne pas perdre le(s) 0,25 point(s) offert(s) par cet item !

2°)c) Pour le développement de $(\boldsymbol{n} - 2)^3$, on peut proposer plusieurs techniques. Soit on connait la formule qui donne le cube d'une différence et hop, en voiture ; soit on écrit l'égalité : $(\boldsymbol{n} - 2)^3 = (\boldsymbol{n} - 2)^2 \times (\boldsymbol{n} - 2)$ et on utilise une identité remarquable; soit on développe, à la file !, le produit : $(\boldsymbol{n} - 2) \times (\boldsymbol{n} - 2) \times (\boldsymbol{n} - 2)$.

2°)d) *On y va : calcul à donf* !!! On a de la chance : le dénominateur commun est connu = $\boldsymbol{n}^3$.

$(\boldsymbol{n} - 2)^3/\boldsymbol{n}^3 + 6 \times (\boldsymbol{n} - 2)^2/\boldsymbol{n}^3 + 12 \times (\boldsymbol{n} - 2)/\boldsymbol{n}^3 + 8/\boldsymbol{n}^3 = ((\boldsymbol{n} - 2)^3 + 6 \times (\boldsymbol{n}-2)^2 + 12 \times (\boldsymbol{n} - 2) + 8)/\boldsymbol{n}^3 = (\boldsymbol{n}^3 - 6 \times \boldsymbol{n}^2 + 12 \times \boldsymbol{n} - 8 + 6 \times (\boldsymbol{n}^2 - 4 \times \boldsymbol{n} + 4) + 12 \times (\boldsymbol{n} - 2) + 8)/\boldsymbol{n}^3 = \ldots = \boldsymbol{n}^3/\boldsymbol{n}^3 = 1$!

BAREME.
1 pt (*1)a*)) + 2 pts (*1)b*)) + 2 pts (*2(a*)) + 2 pts, *dont* 0,25 (*2(b)*) + 1 pt (*2(c) et 2(d)*) = **8** pts

EXERCICE 3

1°) Construction du triangle isocèle **ABD**, avec **AB = AD =** 8cm, facile, rien de particulier à signaler. Construction du point **C**, symétrique du point **A** : on doit « voir » les arcs de cercle, avec indication du centre, du rayon et de l'intersection de ces deux arcs. Pour la construction du point **M**, plusieurs pistes, mais le mot *médiatrice* doit apparaître au « bon » moment ! *Rappel* : pour ces constructions, il est toujours utile de marquer les codages significatifs.

2°) *Toute bonne démonstration est acceptée*. En voilà une. Comme le point **C** est le symétrique du point **A** par rapport à **(BD)**, on a **BC = BA** et **DC = DA**, mais comme **(ABD)** est isocèle en **A**, c'est-à-dire, **AD** = **AB**, on a finalement : **CD = AD = AB = BC**. **(ABCD)** est un quadrilatère (*convexe*) dont les côtés ont même longueur, c'est donc un losange.

Autre piste : s'intéresser aux diagonales. **M** milieu commun des diagonales qui sont perpendiculaires, conclure…

3°) Le point **M** est le milieu de **[BD**], diagonale de **(ABCD)**, qui est un losange. Dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires, c'est-à-dire : **(AM)** $\perp$ **(MD)** ; d'où : **(AMD)** rectangle en **M**.

4°) D'après l'inégalité triangulaire appliqué au triangle **ABD**, on a : $\boldsymbol{x}$ = **BD ≤ BA + AD**. Donc $\boldsymbol{x}$ appartient à l'intervalle **[0,16]**. Ou, autrement dit : $0 \leq \boldsymbol{x} \leq 16$ (16 = 8 + 8 !).

5°) D'après la question ***3°)***, **(AMD)** est rectangle en **M**, on peut appliquer le théorème de Pythagore à ce triangle. C'est à dire : $\mathbf{AM^2 + MD^2 = AD^2}$, avec **M** milieu de **[BD]** et donc **MD = BD/2**. D'où : $\mathbf{AM^2 = 8^2} - \mathbf{BD^2/2^2} = 64 - \boldsymbol{x}^2/4$. Finalement : **AM** = rac $(64 - \boldsymbol{x}^2/4)$.

6°) En cherchant « le plus haut » **point** de la courbe, on trouve comme **abscisse** une valeur un peu supérieure à 11. Construction (*rapide*) et observation : **(ABCD)** semble alors être un **carré**. *Pour aller plus loin* : on montre qu'à périmètre constant, c'est le carré qui enferme l'aire la plus grande.

BAREME.
1 pt + 1 pt + 0,5 pt + 0,5 pt + 1,5 pt + 0,5 pt = **5** pts

PARTIE 2 (sur **12** points)

EXERCICE 4

1°) a) On a : 2/3***h*** = 2/3 × 3600***s*** = **2400*s***. (<u>*Autre technique*</u> : 1/3***h*** = 20***min*** et donc : 2/3***h*** = 2 × 20 × 60***s*** = **2400*s*** ; ou encore toute autre technique ou méthode correcte).
1°) b) On a : 1,2***h*** = 1,2 × 3600***s*** = **4320*s***. (Ou toute autre technique correcte, of course, bis !).

<u>*Note de **PW***</u>. Là aussi, pour cet item, interdiction de « perdre » des points !

2°) a) On a : 5532 = 1 × 3600 + 1932 et 1932 = 32 × 60 + 12. La référence à la division euclidienne est attendue. D'où : 5532***s*** = 1***h*** + 32 × 60***s*** + 12***s*** = **1*h* 32*min* 12*s***.
2°) b) On a : 1,87***h*** = 1***h*** + 0,87 × 60***min*** = 1***h*** + 52,2**min** = **1*h* 52 *min* 12*s***.
<u>*Note de **PW***</u> : toute autre technique correcte, of course, est acceptée

3°) a) <u>*Enfin une « bonne » question*</u>… <u>*Rappel des formules*</u> : ***d*** = ***v*** × ***t*** ; ***v*** = ***d***/***t*** et ***t*** = ***d***/***v***.

Soit ***d*** la distance parcourue par l'antilope jusqu'à être rattrapée par le vilain prédateur, et soit ***t*** la durée de la poursuite. On a donc les égalités suivantes : ***t*** = **d/**75*(km/h)* (du côté de l'antilope) et ***t*** = (**d** + 50*(m)*)**/**100*(km/h)* (du côté du guépard). D'où : **d/**75*(km/h)* = (**d** + 50*(m)*)**/**100*(km/h)* ; égalité de deux quotients, les ***M1*** aimant, par-dessus tout, les produits en croix, alors allons-y ! On a : ***d*** × 100 = 75 × (***d*** + 50) ; 25***d*** = 3750 d'où ***d*** = 150*(m)*. Donc, l'antilope parcourt 150m et le guépard 200m (150m + 50m).

3°) b) On reprend les formules de la question précédente : **t** = **d/**75*(km/h)* = 0,15*(km)*/75 *(km/h)* = (1/500)***h*** = 3600***s*/**500 = 7,2***s***.
Autre technique, justement très technique : la difference des vitesses est égale à 25km/h et donc, on cherche le temps mis pour parcourir 50m : ***t*** = 0,05*(km)*/25*(km/h)* = 0,002***h*** = 0,002 × 3600***s*** = 7,2***s***.

BAREME. 1 pt + 2 pt + 2 pts = **5** points

EXERCICE 5

1°)a) Dans le triangle **ABC**, on a : **I** milieu de **[AB]** et **J** milieu de **[BC]**, donc, d'après la propriété dite de la *droite des milieux*, on a : **(IJ)//(AC)**.

1°)b) Idem pour les autres parallèles (*inutile de réécrire plusieurs fois la même démonstration*) ; on a donc : **(LK)//(AC)**, et donc **(IJ)//(LK)**. Puis, par le *même raisonnement* (préciser dans quel triangle), on prouve que **(IL)//(JK)**. En réunissant ces *deux parallélismes*, **(IJKL)** est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles, c'est donc un ***parallélogramme***.

2°)a) <u>Réponses</u> : **A** et **C** ; ***2°)b)*** <u>Réponses</u> : **A** et **B** et **C** et **D** ! <u>*Note de **PW***</u> : l'adverbe *nécessairement* est important !

3°) En utilisant la propriété dite du *segment des milieux* ; on a **IJ = AC/2** et aussi **JK** = **BD**/2. De plus, **(ABCD)** est un rectangle, donc ses diagonales ont même longueur, c'est-à-dire : **IJ = JK**. Or, on sait **(IJKL)** est un *parallélogramme*. Il a de plus *deux côtés consécutifs de même longueur* : c'est donc un ***losange***.

<u>Calcul d'aire</u>.***4°)*** Plusieurs techniques ou méthodes…

Première méthode : par la formule de la *diagonale d'un carré* (diagonale = côté × √2) et celle de *l'aire d'un carré : le côté mesure* √a, on applique le théorème de Pythagore et en voiture ! Seconde méthode : par « découpage ».

5°) En fait, on a des carrés emboîtés d'aire moitié à chaque fois qu'on « descend » : **(MNPQ)** est à **(IJKL)** ce que **(IJKL)** est à **(ABCD)**, d'où **aire(MNPQ)** = **a/4**.

BAREME. 1,5 pt + 1,5 pt + 1 pt + 2 pts + 1 pt = **7** points

Partie 3 (sur **13** points)

1°)a) *Au choix,* trois arguments parmi les suivants :

- Difficulté de type « motricité fine » ; dans l'utilisation des instruments, en particulier pour les longueurs ;
- Difficulté de type « reconnaissance - ou non - de sous-figures » ; il est ici plus facile de reproduire la figure si on « voit » les carrés ou les diagonales que si on ne voit que des segments ou des angles ;
- Difficulté d'ordre méthodologique : pour cet item de construction, il faut organiser l'ordre des tracés, et non « tracer au hasard » ;
- Difficulté liée à la possibilité de choix de « la méthode de la construction » ; dans le choix des instruments, en particulier pour les longueurs) ;
- Incontournable, mais pas toujours pertinente(s) : difficulté(s) liée(s) au « vocabulaire » et à la « lecture » ; en particulier compréhension de la consigne « *reproduire à l'identique* ».

1°)b) Oui, car pour « reproduire à l'identique » une figure polygonale, il faut reporter les mêmes longueurs, mais, pour ce faire, il n'est pas nécessaire de mesurer : on peut utiliser le compas.

2°) *Note 1 de **PW***. Important : *en fait les figures **A** et **B** sont rigoureusement identiques, à un quart de tour près. Il n'est pas certain que les élèves le « voient » ! C'est ce qui fait l'intérêt de cette activité.*

Figure **A**, précision(s) sur les INSTRUMENTS	Figure **B**, précision(s) sur les INSTRUMENTS
Etape 1 : tracé du « grand » carré ; *Etape 2 et 3* (*on peut intervertir*) : tracé des diagonales ou marquage des milieux des côtés du « grand » carré ; *Etape 4* : tracé du « petit » carré (*quatre segments joignant deux milieux consécutifs*).	*Etape 1* : tracé de deux segments, l'un « horizontal » et l'autre « vertical », donc perpendiculaires, de même longueur et de même milieu ; *Etape 2* : construction du grand carré ; *Etape 3* : marquage des milieux des côtés du « grand » carré; *Etape 4* : tracé du « petit » carré (*Cf. ci-contre*).

*Note 2 de **PW**. Il y a des variantes pour construire les figures demandées. Par exemple, pour la figure **B**, on peut commencer par le « petit » carré et dans ce cas, tracé des médianes et reports au compas…*

3°) *Note de **PW**. Rigoureusement, dans les deux cas, il ne s'agit pas d'un carré dans un losange ou inversement, mais un carré dans un carré. C'est la position prototypique des carrés en losanges qui « autorise » l'enseignant à utiliser son argument. « Ce qu'on « voit » prime sur ce que « sont » géométriquement les objets ».*

Argument « ***pour*** »	Argument « ***contre*** »
➢ « Commande » aux élèves de penser « sous-figure » ; ➢ Aide à l'organisation et à une chronologie de la construction.	➢ Renforcement des aspects prototypiques liés à l'orientation des figures. ➢ Travail d'élaboration de la démarche presque terminé : un « ordre » de construction est fourni.

4°) *Question générique*. D'autant plus que pour cette activité, on a de quoi dire !

- Les instruments de tracés géométriques à disposition (*avec au moins un exemple : équerre ou pas, règle graduée ou bien compas, possibilité de calque, gabarit, etc. …*) ;
- Le support de travail (papier uni, ou pointé, ou ligné, ou quadrillé) ;
- L'échelle de la reproduction (une échelle autre que 1 oblige au *mesurage* ou au *calcul* ; « à l'identique » permet le calque, le compas, un gabarit, …) ;
- L'orientation (*ici, elle ne peut pas varier : il y a déjà les deux, et il faut les deux*) ;
- Le pliage : les figures proposent beaucoup d'éléments de symétrie. Codages : débat ?

5°) Puisque les deux figures sont « égales » au quart de tour près, chacune d'elle sert alors d'instrument de validation des productions : une fois la construction finie, chaque demi-classe peut vérifier si les productions sont conformes ou pas. En complément, le calque permet aussi de voir l'état d'avancement des constructions : oubli ou sur-figure de la figure ou incitation pour convaincre les élèves que l'orientation est parfois un « piège ». Pour aller plus loin, en groupe classe, on peut, en posant les deux calques l'un sur l'autre, on a une preuve instrumentée de « l'égalité » des deux figures.

6°) *Note de **PW** : des échelles ne sont pas respectées, ce n'est pas essentiel pour l'analyse. Mais, lorsque les figures sont « rikiki », on « voit » moins les erreurs et donc, on ne peut pas savoir ce qui est compris, assimilé ou non. D'où l'intérêt didactique de réaliser des figures non « rikiki ».*

- Production 1. « Grand carré » et diagonales : production correcte ; les milieux (plutôt ceux des demi-diagonales) mal marqués : marquages à la main ou peu soignés aux instruments ? Tracé du « petit » carré très imprécis, car les milieux des côtés du « grand » carré ne sont pas marqués. On est dans une double approche perceptive et instrumentée de la géométrie : il faut que la figure ressemble à l'original, mais comme les propriétés géométriques ne sont pas explicites, l'utilisation des instruments est juste là pour rester dans la ressemblance.
- Production 2. Tracé correct du carré « extérieur », les diagonales sont tracées comme demi-diagonales. On peut faire l'hypothèse que celles-ci ne sont pas repérées. Et du coup, le « grand » carré est un « collage » de quatre triangles rectangles de presque le même sommet-angle droit. Production non conforme.
- Production 3. Tracé du « grand » carré et des diagonales, sans que le « grand » carré en soit un ! Les milieux ne sont pas repérés et la production finale est fausse. Erreur sur la forme et erreurs sur les propriétés géométriques.
- Production 4. Beaucoup d'erreurs dans les tracés et constructions dues à une mis-connaissances des propriétés géométriques en jeu ! d'où finalement, « petits » arrangements géométriques pour que la figure ressemble à l'original. L'élève réalise un « mix » entre perception et réalisation en acte, aux instruments, de figures précises à partir d'informations purement géométriques et pas uniquement graphiques.

*Note de **PW**. Ces productions sont de réelles productions d'élèves ! Ce qui en dit long sur leur rapport à la géométrie et surtout sur l'enseignement de la géométrie !!! A méditer…*

7°) Les élèves n'ont pas perçu que les *sommets* du carré *intérieur* sont *milieux des côtés* du carré *extérieur*. Classique en géométrie : un même objet possède plusieurs rôles ou plusieurs fonctions au sein d'une même configuration. C'est donc un enjeu de l'enseignement : c'est au professeur de faire vivre cette dialectique…
Autre proposition. Certains élèves n'ont pas vu que les segments intérieurs aux deux figures sont en fait les côtés des « petits » carrés et donc : deux à deux parallèles et tous de même longueur, avec un angle droit (dont on ne sait pas s'il a été « repéré » ?). Et donc, c'est la perception, la vue, qui vont contrôler les productions.

BAREME.
1,5 pts + 0,5 pt + 3 pts + 1 pt + 1 pt + 1 pt + 4 pts + 1 pt = **13** points