DDF de Mathématiques

Contrôle Terminal UE24 EC1

Session 1 Mai 2013

Exercice 1 – Vrai ou Faux.

1) Faux. Dans une division euclidienne, le reste est plus petit que le diviseur. Le diviseur cherché est donc plus grand que 48. Mais le dividende est alors plus grand que $82 \times 48 + 47 = 3936 + 47 > 3000$.

2) Faux. On a $14^2 = 196$ qui ne termine pas par 16.

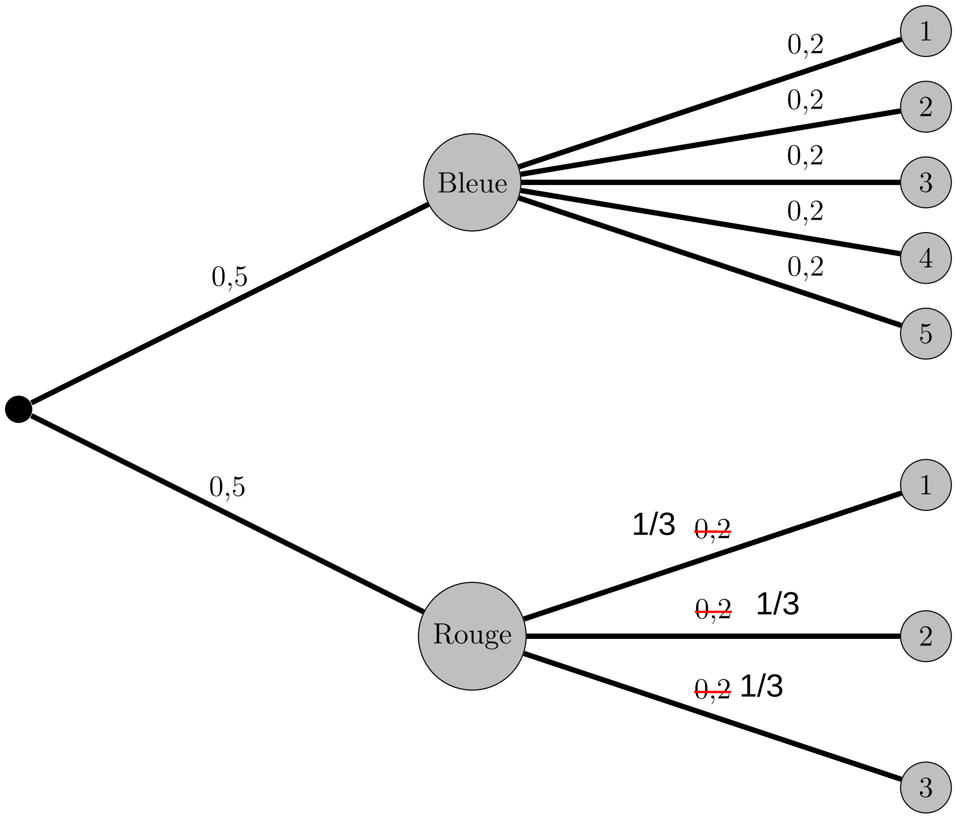
3) Faux. Comme la densité des deux melons est la même, le rapport entre les masses des deux melons est le même que le rapport entre les volumes des deux melons. Mais le rapport entre les volumes des deux melons est $8 = 2^3$ puisque le rapport entre les diamètres des melons est 2 (rappel : le volume d'une boule est $\pi D^3/6$ où D est le diamètre de la boule).

4) Vrai. Il y a $4,5$ fois plus de vaches et $4,5$ fois plus de jours. Comme la production de lait est proportionnelle au nombre de vaches et au nombre de jours, on obtient avec 9 jours et 9 vaches, un production de $200 \times 4,5 \times 4,5 = 4050$ litres

5) Vrai. La masse du « Cullinan » est $3106 \times 2\,\mathrm{dg} = 6212\,\mathrm{dg}$ c'est-à-dire $621,2\,\mathrm{g}$ ou encore $0,6212\,\mathrm{kg}$.

6) Vrai. Parmi deux nombres pairs consécutifs, il y en a un qui est divisible par 4. Comme l'autre nombre est pair (c'est-à-dire divisible par 2), le produit des deux est divisible $2 \times 4 = 8$.

Exercice 2 – Boules et jetons.



1) On obtient l'arbre

2) a) On prélève un jeton dans la boîte n° 1 lorsqu'on tire la boule bleue. On a donc $p_A = 0,5$.

b) Pour prélever un jeton portant le n° 5, il faut d'abord avoir tirer une boule bleue (une chance sur 2) puis tirer le jeton n°5 (une chance sur 5). On a donc $p_B = 0,5 \times 0,2 = 0,1$.

c) Pour prélever un jeton portant le n° 2, il faut soit d'abord avoir tirer une boule bleue (une chance sur 2) puis tirer le jeton n°2 (une chance sur 5), soit soit d'abord avoir tirer une boule rouge (une chance sur 2) puis tirer le jeton n°2 (une chance sur 3). On a donc $p_C = 0,5 \times 0,2 + 0,5 \times 1/3 = 1/10 + 1/6 = 16/60 = 4/15$.

Exercice 3 – Massif de fleurs.

1) a) L'aire d'un rectangle est le produit de sa longueur par sa largeur. On obtient ainsi une aire égale à $\mathrm{L}x$.

b) L'aire de la bordure est la différence entre l'aire du grand rectangle de largeur $x+2$ et de longueur $\mathrm{L}+2$ et l'aire du petit rectangle. On obtient ainsi $(\mathrm{L}+2)(x+2)-\mathrm{L}x = 2(x+\mathrm{L})+4$.

2) Comme $\mathrm{L}x$ est la mesure de la surface en m^2, le nombre total de fleurs jaunes est $60\mathrm{L}x$. Comme le nombre de fleurs jaunes au m^2 et le même que le nombre de fleurs rouges au m^2, le nombre total de fleurs est égal à 60 fois la surface totale c'est-à-dire $60(\mathrm{L}+2)(x+2)$. La proportion de fleurs jaune est donc

$$\mathrm{P} = \frac{60\mathrm{L}x}{60(\mathrm{L}+2)(x+2)} = \frac{\mathrm{L}x}{(\mathrm{L}+2)(x+2)}.$$

3) a) On a $\mathrm{L} = 10\,\mathrm{m}$, en substituant dans la formule de la question précédente, on obtient

$$\mathrm{P} = \frac{10x}{12(x+2)} = \frac{5x}{6(x+2)} = \frac{5x}{6x+12}.$$

b) On cherche la valeur de x tel que $\mathrm{P} = 0,6$. On doit donc résoudre l'équation

$$\frac{5x}{6x+12} = 0,5$$

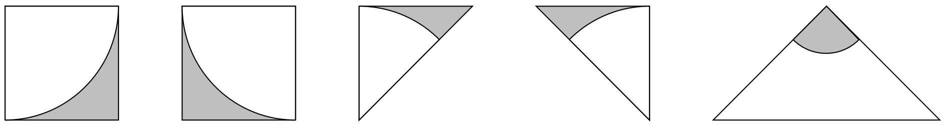
qui se réécrit $5x = 0,5(6x+12)$ puis $5x = 3x+6$ et $2x = 6$ ou encore $x = 3$. On obtient finalement $x = 3\,\mathrm{m}$.

On cherche ensuite la valeur de x pour laquelle $\mathrm{P} = 0,9$. On doit donc résoudre l'équation

$$\frac{5x}{6x+12} = 0,9$$

qui se réécrit $5x = 0,9(6x+12)$ puis $5x = 5,4x+10,8$ et $-0,4x = 10,8$ ou encore $-4x = 108$. On obtient finalement $x = -27$ ce qui bien entendu n'a aucun sens. Ainsi, on ne peut pas atteindre une proportion de 90% de fleurs jaunes. La proportion maximale est en fait 25/36 atteinte lorsque le rectangle est un carré.

Exercice 4 – Aire. On divise la figure en les 5 parties suivantes



En assemblant les parties 3 et 4, on obtient une partie ayant la même forme que les parties 1 et 2 : un carré de côté 5 cm privé d'un quart de disque dont le rayon est le côté du carré.

Une telle figure a pour aire : $5^2 - 5^2\pi/4\,\mathrm{cm}^2$ (l'aire du carré - 1/4 de l'aire du disque).

Il faut à présent évaluer l'aire de la cinquième figure qui est l'aire d'un quart de cercle de rayon $5\sqrt{2}-5$. On obtient une aire de $5^2(\sqrt{2}-1)^2/4\,\mathrm{cm}^2$. Il manque du pi !!!

Finalement, en cm^2, l'aire total de la figure est $25(3-3\pi/4+(\sqrt{2}-1)^2/4) = 25(3-3\pi/4+(3-2\sqrt{2})/4)$

On obtient ainsi la valeur approchée : ~~17,17~~ cm^2. On doit trouver environ 19,47 cm²...

Exercice 5 – Un triangle équilatéral dans un carré.

1) La droite (BD) est axe de symétrie du triangle BEF. En effet, la symétrie par rapport à (BD) envoie le segment [CD] sur le segment [DA]. Comme elle conserve les longueurs, elle envoie le point F de [CD] qui est à la distance x de D sur le point de [DA] qui est à la distance x du symétrique de D c'est-à-dire de D. Ainsi F est envoyé sur E et donc E sur F et bien sûr B sur lui-même. De plus, toujours comme la symétrie conserve les longueurs, on a donc $\mathrm{BE} = \mathrm{BF}$ et donc EBF est isocèle en B.

2) a) Le triangle DEF est rectangle isocèle en D on a donc $\mathrm{EF} = \sqrt{2}x$ (on peut aussi obtenir le résultat grâce au théorème de Pythagore dans le triangle rectangle DEF.

b) Dans le triangle CBF rectangle en C, le théorème de Pythagore donne $\mathrm{BF}^2 = \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CF}^2$ c'est-à-dire $\mathrm{BF}^2 = 5^2+(5-x)^2$. En développant le carré, on obtient $\mathrm{BF}^2 = 25+25-10x+x^2$ et finalement $\mathrm{BF} = \sqrt{50-10x+x^2}$.

3) a) La longueur x désigne la longueur DF avec F qui est sur le segment [DC]. Ainsi x est positif (c'est une longueur) mais x est plus petit que CD. Finalement $0 \leqslant x \leqslant 5$.

b) Lorsque EBF est équilatéral, on a $\mathrm{EF} = \mathrm{BF}$ et donc $\mathrm{EF}^2 = \mathrm{BF}^2$ c'est-à-dire $2x^2 = 50-10x+x^2$ ce qu'on peut réécrire $x^2+10x-50 = 0$. Mais en développant $(x+5)^2$, on obtient que l'équation $(x+5)^2 = 75$ se réécrit $x^2+10x+25 = 75$ c'est-à-dire $x^2+10x-50 = 0$. On obtient ainsi le résultat souhaité.

c) Le nombre x est solution de $(x+5)^2 = 75$ lorsque $x+5 = \sqrt{75}$ ou $x+5 = -\sqrt{75}$ c'est-à-dire $x = \sqrt{75}-5$ ou $x = -\sqrt{75}-5$. Cette deuxième valeur n'est pas possible puisqu'elle est négative. Par ailleurs, on a $75 = 25\times 3$. Ainsi $x = 5(\sqrt{3}-1)$ qui est bien positif (puisque $\sqrt{3} \geqslant \sqrt{1} = 1$) et plus petit que 5 (puisque $\sqrt{3}-1 \leqslant 1 = \sqrt{4}-1$). On obtient donc un triangle équilatéral lorsque $x = 5(\sqrt{3}-1)$ en particulier, il en existe bien un et en plus il n'y en a pas d'autres.

4) a) On a vu que la droite (BD) est axe de symétrie du triangle isocèle EBF. Elle est donc aussi bissectrice de $\widehat{\mathrm{EBF}}$.

b) D'après la question précédente, l'angle $\widehat{\mathrm{DBF}}$ a pour mesure 30°. À l'aide d'un gabarit d'angle de 30° (par exemple obtenu grâce à une équerre 30-60-90 ou en traçant au compas un triangle équilatéral qu'on découpe puis qu'on plie en deux) ou à un rapporteur on trace un angle de 30° dont l'un des côtés est BD, l'autre côté rencontre [DC] en F. En posant le gabarit de l'autre côté de [BD], on obtient E comme point d'intersection de [DA] et du deuxième côté de l'angle.

5) a) Toujours comme la figure est symétrique par rapport à (BD), on a $\widehat{\mathrm{CBF}} = \widehat{\mathrm{ABE}}$. Ainsi, on obtient que $\widehat{\mathrm{ABC}} = \widehat{\mathrm{ABE}} + \widehat{\mathrm{EBF}} + \widehat{\mathrm{CBF}}$ et donc $2\widehat{\mathrm{CBF}} = \widehat{\mathrm{ABC}} - \widehat{\mathrm{EBF}}$. Comme EBF est équilatéral, on a $\widehat{\mathrm{EBF}} = 60°$ et donc $2\widehat{\mathrm{CBF}} = 30°$ et finalement $\widehat{\mathrm{CBF}} = 15°$.

b) On a vu que $x = 5(\sqrt{3} - 1) = \mathrm{BC}(\sqrt{3} - 1)$. Par ailleurs, on a vu que

$$\mathrm{BF}^2 = \mathrm{BC}^2 + (5 - x)^2 = \mathrm{BC}^2 + (\mathrm{BC} - x)^2 = \mathrm{BC}^2 + \mathrm{BC}^2(1 - (\sqrt{3} - 1)) = \mathrm{BC}^2(3 - \sqrt{3})\,.$$

Ainsi $\mathrm{BF} = \mathrm{BC}\sqrt{3 - \sqrt{3}}$.

c) En divisant l'égalité précédente par BF puis par $\sqrt{3 - \sqrt{3}}$, on obtient

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BF}} = \frac{1}{\sqrt{3 - \sqrt{3}}}\,.$$