École supérieure du professorat et de l'éducation
Académie d'Orléans-Tours

UNIVERSITE D'ORLEANS

~~GCD DE *MATHÉMATIQUES*~~
CC – M1 ; 12/2016
SITE DE BLOIS. *PW*

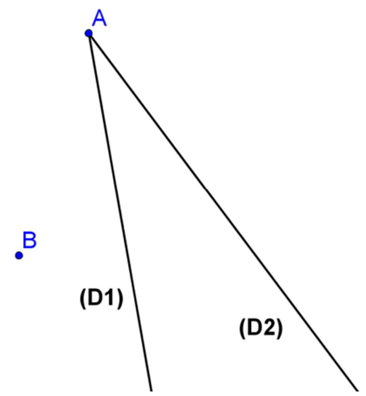
NOM et PRENOM :
GROUPE : ***M1A***, ***M1B***, ***M1C***, ~~*M2PFE*~~ *DUREE* : une heure. **Calculatrice autorisée**.

1. Quatre points. L'égalité 2386 = 41 × 57 + 49 traduit-elle une division euclidienne ? Si oui, préciser laquelle et rédiger un énoncé « simple » de problème dont la solution se traduit par cette égalité.

Attention : il y deux cas à étudier ! (*Cas 1*) le diviseur est 57, dans ce cas, on a : 2386 = 57 × 41 + 49, avec 49 < 57, on a bien une division euclidienne. (*Cas 2*) le diviseur est 41, dans ce cas, on a 49 > 41 et on peut « poursuivre » la division et donc, c'est faux. On a : 2386 = 41 × 58 + 8, avec 8 < 41. Note de ***PW*** : *il faut avoir explicité les deux cas pour avoir un ou des points…*

Enoncé de problème : n'importe quel problème de partage (*équitable*) convient, avec 57 comme diviseur. *Deux cas possibles* : soit on cherche *la valeur d'une part* ; soit on cherche *un nombre de parts.*
(i) *Division partition = valeur d'une part*. On partage équitablement 2386 zloteks entre 57 personnes. Quelle somme, en zloteks, est alors distribuée à chaque personne ?
(ii) *Division quotition = nombre de parts*. On découpe un ruban de longueur 2386 metryards en rubans plus petits, ayant tous une longueur de 57 metryards. Combien de rubans peut-on obtenir ?

2. Deux points + deux points. Une construction. *Matériel autorisé* : compas, règle graduée, équerre.



Construire le triangle **ABC**, en complétant la figure ci-contre.

Informations. On sait que la droite (**D1**) est la hauteur issue de **A** relative à **(BC)** et on sait que (**D2**) est la médiane issue de **A** relative à **[BC]**.

Construire le sommet **C** et tracer le triangle.

Laisser les traces de construction et rédiger un programme de construction dans le cadre ci-dessous.

*Programme (succinct) de construction du point **C**. Justifications…*
Rappel : qui dit « *hauteur* » doit penser « *perpendiculaire* » et qui dit « *médiane* » doit penser « *milieu* ». D'où le programme (succinct) ci-dessous :
1) Tracer la droite (△), perpendiculaire à (**D1**) passant par **B** (*instrument(s) : au choix…*) et appeler **H** le point d'intersection de (△) avec (**D1**). *Marquer le codage en **H**…*
2) Appeler **M** le point d'intersection de (△) avec (**D2**).
3) Sur (△) marquer le point **C** tel que **BM** = **MC** (*instruments : au choix…*). *Marquer le codage (égalité des longueurs)…* « Finir » la figure, ç'est à dire, tracer (**ABC**).

3. Un point. Le nombre 2 est-il solution de l'équation (***E***) : $7\boldsymbol{x} - 3 = \dfrac{5}{(\boldsymbol{x}+3)} + 4\boldsymbol{x}^2$?

Tâche très, trop ?, facile : on remplace x par 2 dans chacun des membres de l'égalité, on lance les calculs et on teste s'il y a égalité ou pas.

(i) Pour $\boldsymbol{x} = 2$, on a : $7\boldsymbol{x} - 3 = 7 \times 2 - 3 = 14 - 3 = 11$;

(ii) Pour $\boldsymbol{x} = 2$, on a : $\dfrac{5}{(\boldsymbol{x}+3)} + 4\boldsymbol{x}^2 = 5/(2+3) + 4 \times 2^2 = 5/5 + 4 \times 4 = 1 + 16 = 17$. Conclure…

4. Un point. Observer les « résultats » ci-contre : $1^2 - 0^2 = 1 = 0 + 1$; $2^2 - 1^2 = 3 = 1 + 2$; $3^2 - 2^2 = 5 = 2 + 3$; $4^2 - 3^2 = 7 = 3 + 4$; $2017^2 - 2016^2 = 4033 = 2016 + 2017$… Tiens, tiens, tiens !
Les égalités ci-dessus permettent de conjecturer une propriété. Deux sont proposées ci-dessous, laquelle est la « bonne » (*rayer la mauvaise et entourer la bonne propriété*) :

*1- Si **a** et **b** sont deux nombres consécutifs, alors leur somme est égale à la différence de leurs carrés.*

~~*2- Si **a** et **b** sont deux nombres consécutifs, alors leur somme est égale au carré de leur différence.*~~

Pour aller plus loin : cette propriété se démontre. Non demandé dans ce contrôle, mais à chercher quand même ! *Piste* : $\boldsymbol{n}$ et ($\boldsymbol{n}$ + 1) désignent deux entiers consécutifs, on a : $(\boldsymbol{n} + 1)^2 - \boldsymbol{n}^2$ = (*différence de deux carrés* ou *carré d'une somme à laquelle on retranche un carré*) = $2\boldsymbol{n} + 1 = \boldsymbol{n} + (\boldsymbol{n} + 1)$.

5. Deux points. En versant sept volumes de sirop d'anis étoilé dans treize volumes d'eau, on dégustera une boisson plus anisée que si on verse cinq volumes du même sirop dans neuf volumes d'eau. ~~***VRAI***~~ ou ***FAUX*** ? Item tout à fait intéressant… *Attention à ne pas se tromper dans les quotients* !!!

Et oui, comparer 7/13 et 5/9 est *FAUX* : ces quotients n'expriment pas la qualité de l'anisisation du *MELANGE* ! *Donc cela ne rapporte pas de point, hihihi…*
Il faut comparer 7/20 et 5/14 (en effet, 20 = 7 + 13 et 14 = 5 + 9). Techniques de comparaison au choix. *Une solution* : 7/20 = 49/140 et 5/14 = 50/140, 50 > 49 d'où la boisson plus anisée se trouve dans le deuxième mélange. Autre technique (qualifiée de la technique « *brute épaisse* ») : utilisation de la caltoss, 7/20 = 0,35 et 5/14 ≈ 0,357, conclure !

6. Deux Points + un point. Déterminer les diviseurs de 72. On note ***D***(72) l'ensemble de ces diviseurs. Trouver le nombre ***n***, tel que le produit des trois nombres : ***n***, le suivant de ***n*** et le double de ***n*** vaut 72.

On a ***D***(72) = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 ; 12 ; 18 ; 24 ; 36 ; 72} 72 possède douze diviseurs : on peut savoir si on n'en a pas oublié. On a : $72 = 2^{\boldsymbol{3}} \times 3^{\boldsymbol{2}}$; il existe une propriété qui dit que le nombre de diviseurs de 72 est alors égal à : $(\boldsymbol{3} + 1)\times(\boldsymbol{2} + 1) = 4 \times 3 = 12$, propriété « prouvée » en ***TD***…
On demande ensuite de trouver un nombre ***n***, tel que : $\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} + 1) \times 2\boldsymbol{n} = 72$. On ne va surtout pas s'embarquer dans une équation avec un « ***n*** au cube ». Il suffit de regarder parmi les diviseurs de 72, si des fois, y n'en aurait-y pas un qui vérifie les conditions ? Soit ***n*** = 3, dans ce cas, ($\boldsymbol{n}$ + 1) = 3 + 1 = 4 et 2$\boldsymbol{n}$ = 6. Produit : 3 × 4 × 6 = 72. Et voilà !

7. Ecrire **A**, **B** et **C** sous forme d'une fraction irréductible : $\mathbf{A} = \frac{2}{11} + \frac{27}{44}$; $\mathbf{B} = 3{,}5 - 5 \times \frac{1{,}2}{7}$; $\mathbf{C} = \frac{17}{100 \times (1 + \frac{2}{3})}$

$\mathbf{A} = \frac{2}{11} + \frac{27}{44} = \frac{8}{44} + \frac{27}{44} = \frac{8 + 27}{44} = \frac{\mathbf{35}}{\mathbf{44}}$. Fraction irréductible, car 35 et 44 sont premiers entre eux.
$\mathbf{B} = \frac{7}{2} + \frac{6}{7}$. Et oui : 3,5 = 7/2 et $5 \times \frac{1{,}2}{7} = \frac{5 \times 1{,}2}{7} = \frac{6}{7}$. *C'est kan même pas hype complicate* !!!
$\mathbf{B} = \frac{7}{2} + \frac{6}{7} = \frac{7\times7}{2\times7} + \frac{6\times2}{7\times2} = \frac{49}{14} + \frac{12}{14} = \frac{49 + 12}{14} = \frac{\mathbf{61}}{\mathbf{14}}$. ($\frac{\mathbf{37}}{\mathbf{14}}$, zut, erreur de signe !) Voir calcul **A** (*barème* = **3 points**)
$\mathbf{C} = \frac{17}{100 \times (1 + \frac{2}{3})} = \frac{17}{100 \times \frac{5}{3}} = \frac{17}{\frac{500}{3}} = 17 \times \frac{3}{500} = \frac{17 \times 3}{500} = \frac{\mathbf{51}}{\mathbf{500}}$. Idem : voir conclusion du calcul **A**.

8. Deux points. Une cave obscure renferme de très nombreuses (*et bonnes*) bouteilles d'un breuvage rabelaisien de *cinq* cuvées (*millésimées !*) distinctes. Combien doit-on remonter de bouteilles, *une par une*, pour être sûr d'avoir *au moins* trois bouteilles de la même cuvée ? (*Justifier dans le cadre ci-dessous*).

Pas facile de bien raisonner et de ne pas se laisser emballer par le contexte. Si on veut être certain d'avoir au moins trois bouteilles de la même cuvée, il faut d'abord être certain d'en avoir deux pour toutes les cuvées (5 × 2 = 10 !) ; dans ce cas, une ***onzième*** remontée de cave suffira pour nous fournir une troisième bouteille d'une cuvée et ce, quelle que soit la cuvée. *Hihihi : problème(s) de lecture et NON, ce n'est pas du tout dans cette direction qu'il faut chercher…*