École supérieure du professorat et de l'éducation Académie d'Orléans-Tours

UNIVERSITE D'ORLEANS

Pistes de correction du « ***Partiel M1*** », Janvier 2016. Eléments de barème…

EXERCICE 1. Excellent exercice dans « l'esprit » du CRPE ! Barème indicatif : 12/28

Partie 1 : Étude du quadrilatère AMBN

a) Condition(s) sur h et k pour que le quadrilatère AMBN soit un losange.

Pour que le quadrilatère AMBN soit un losange, il suffit que ses diagonales se coupent en leur milieu (*parallélogramme*) et qu'elles soient perpendiculaires.

On sait déjà que les diagonales sont perpendiculaires et que O est le milieu de [AB]. Il suffit donc que le point O soit également le milieu de [MN], c'est-à-dire que : OM = ON.

Par conséquent, pour que le quadrilatère AMBN soit un losange, il suffit que $h = k$. (*Sans nécessairement, l'égalité des deux diagonales : justement, voir item suivant !*)

b) Condition(s) sur h et k pour que AMBN soit un carré.

Pour que le quadrilatère AMBN soit un carré, il suffit qu'il soit un losange et que ses diagonales soient de même longueur. Il suffit donc que $h = k$ (question ***a)***), et que : OM = ON = OA = OB = 3.

Pour que le quadrilatère AMBN soit un carré, il suffit que $h = k = 3$.

c) AMBN peut-il être un parallélogramme sans être un losange ?

Par hypothèse, les diagonales du quadrilatère AMBN sont perpendiculaires.

Si AMBN est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu perpendiculairement, c'est nécessairement un losange.

Ainsi AMBN ne peut pas être un parallélogramme sans être un losange.

Partie 2 : Périmètre et Aire

Du côté du PERIMETRE ***P***

On fait d'abord le point sur les triangles particuliers de cette configuration, ça peut servir : il y a mucho mucho triangles rectangles ! *It smell's good Pythagoras…*

(i) Les triangles rectangles en O, superposables, dont un des sommets est le point M : (MOA) et (MOB).

(ii) Les triangles rectangles en O, superposables, dont un des sommets est le point N : (NOA) et (NOB).

On a ensuite : ***P*** = MA + AN + NB + MB = 2 × (MA + AN), car MA = MB et NA = NB.

- Dans le triangle MOA, rectangle en O, on a, par l'égalité de Pythagore, $MA^2 = OA^2 + OM^2$; c'est-à-dire : $MA^2 = 3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58$, d'où $\boxed{MA = \sqrt{58}\ (cm)}$: valeur exacte.
- Dans le triangle NOA, rectangle en O, on a, par l'égalité de Pythagore, $NA^2 = OA^2 + ON^2$; c'est-à-dire : $NA^2 = 3^2 + 11^2 = 9 + 121 = 130$, d'où $\boxed{NA = \sqrt{130}\ (cm)}$: valeur exacte.

D'où $\boxed{\boldsymbol{P} = 2 \times (\sqrt{58} + \sqrt{130})\ (cm)}$: valeur exacte et $\boxed{\boldsymbol{P} \approx 38{,}0\ (cm)}$: valeur décimale arrondie au mm.

Du côté de l'AIRE ***W*** = aire du quadrilatère AMBN en fonction de h et k.

Le quadrilatère AMBN est « formé » des deux triangles AMB et ANB. Il est aussi « formé » des deux triangles MAN et MBN. On a le choix…

D'où : ***W*** = Aire (AMBN) = Aire (AMB) + Aire (ANB) (*Additivité disjointe des aires*) ; ou ***W*** = Aire(MAN) + Aire (MBN).

Si on prend la deuxième formule ci-dessus ; on a Aire(MAN) = Aire (MBN) = MN × hauteur/2 = $((h + k) \times 3)/2$. D'où $\boldsymbol{W} = 2 \times ((h + k) \times 3/2) = (h + k) \times 3$. Or : $(h + k)$ = MN et hauteur = 3 = AB/2. Et donc $\boxed{\boldsymbol{W} = {}^1/_2 \times MN \times AB}$ ou $\boxed{2\boldsymbol{W} = MN \times AB}$, c'est-à-dire : L'aire ***W*** du quadrilatère AMBN est la moitié de l'aire du rectangle ayant pour longueur MN et pour largeur AB. *Ouf, on le savait, mais encore fallait-il qu'on retrouve ce résultat !*

Partie 3 : les triangles de la figure

a) Les huit triangles du « *cerf-volant* ».

- (AOM) ; (BOM) ; (BON) ; (AON) sont des triangles rectangles en O (car (Δ1) et (Δ2) sont perpendiculaires en O).
- (AMB) et (ANB) sont des triangles respectivement isocèles en M et N ; en effet, le point O est le milieu du segment [AB], donc la droite (Δ1), perpendiculaire à [AB] en O, est la médiatrice de [AB] ; les points M et N sont équidistants de A et de B.
- (MBN) et (MAN) sont deux triangles quelconques ou scalènes (dans le cas général). Total : huit.

b) Nombre de triangles dont les sommets sont trois de cinq points D, E, F, G et H. *D'après corrigé COPIRELEM… Hypothèse implicite : les triangles sont effectivement constructibles.*

Méthode 1 : un peu de combinatoire, oui, mais je ne m'en souviens plus…
Le nombre de triangles correspond au nombre de combinaisons de trois points pris parmi cinq. On applique la formule : $\frac{5!}{3! \times (5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(3 \times 2 \times 1) \times (2 \times 1)} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$. Bon d'accord, mais il n'y a pas de méthodes plus « *simples* », yes, of course ! On a quand même la réponse : il y a donc dix triangles possibles.

Méthode 2 : on cherche à établir « à la main » la liste de tous les triangles différents possibles, sans en oublier, ce qui va déboucher sur la méthode 3 ! Liste « à la main » : (DEF) ; (DEG) ; (DEH) ; (DFG) ; (DFH) ; (DGH) ; (EFG) ; (EFH) ; (EGH) ; (FGH). Idem ci-dessus : il y a donc dix triangles possibles, ouf !

Méthode 3 : on améliore la méthode 2. On fixe un premier sommet (par exemple D) et on cherche combien de triangles différents on peut « faire » avec ce premier sommet : il suffit alors de prendre deux autres points parmi les points E, F, G et H (par exemple, E et F, ce qui va nous donner (DEF), idem avec E et G, idem avec E et H, idem avec F et G, idem avec F et H et enfin, idem avec G et H. On peut donc dénombrer six triangles en fixant un sommet.
On passe alors en revue les cinq points, ce qui donne : 6 × 5 = 30 triangles.
Oui, mais, chaque triangle a été compté trois fois (*une fois pas sommet*), donc au total, il reste : $^{30}/_{3} = 10$ triangles.

c) Pourquoi n'y a-t-il que huit triangles dans la figure du problème, car il y a bien cinq sommets distincts possibles et on vient de démontrer que dans ce cas, il y en a dix ?

Oui, mais, dans le cas de la figure du problème, il y a huit triangles au lieu de dix, car il y a des *alignements* : les points M, O, N et A, O, B sont alignés. De fait, les deux triangles MON et AOB sont des triangles aplatis ou « plats », qu'on ne décompte pas dans le dénombrement. *Il ne faut pas hésiter à faire une figure !*

EXERCICE 2. Facile !!! Barème indicatif : 6/28

Item 1. Traduction de la situation : on pose **N** = $(\boldsymbol{cdu})_{10}$, avec les deux informations (i) $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} + \boldsymbol{u} = 16$ (somme des *CHIFFRES* égale à 16 et (ii) $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{u} = 120$ (produit des *CHIFFRES* égal à 120). Sans oublier que les lettres ***c***, ***d*** et ***u*** désignent des CHIFFRES !

1) Le nombre **N** ne contient pas 0 : en effet, si oui, le produit vaut 0 ≠ 120. Le nombre **N** ne contient pas 1 : en effet, si oui le produit le plus grand avec des CHIFFRES vaut 81 = 9 × 9 × 1 < 120. Le nombre **N** ne contient pas 2 : en effet, si oui, le produit des deux autres chiffres vaut 60 ($^{120}/_{2} = 60$) et 60 n'appartient pas à une table de multiplication « chiffre par chiffre ». *Tout autre argument correct est accepté !*
2) Le nombre **N** ne contient pas 7 : en effet, 7 ne divise pas 120. Le nombre **N** ne contient pas 9 : en effet, 9 ne divise pas 120.

On vient donc de se débarrasser de cinq chiffres : le « 0 », le « 1 », le « 2 », le « 7 » et le « 9 ». Il reste donc les chiffres « 3 », « 4 », « 5 », « 6 » et « 8 ». En suivant les questions de l'exercice, on va maintenant chercher une « bonne » réponse et on va chercher à la généraliser. Remarque : dès qu'on a trouvé une bonne réponse, on a des chances d'en d'autres par permutation circulaire des chiffres.

3) Une solution, sans méthodologie particulière, en prenant en compte la remarque de la page précédente concernant les chiffres possibles ; viva la tecnica « ***e*** – ***e*** – ***a*** », si chère à ***PW*** ! Soit **N** = 538 ; on a 5 + 3 + 8 = 16 et 5 × 3 × 8 = 120. Cool ! Et donc, les nombres 358, 385, 583, 835 et 853 conviennent aussi (*méthodes* : arbre ou énumération « à la main » ou technique algébrique ou ...). On vient donc de trouver six solutions.

Technique générique ou modélisation : étude exhaustive des tous les cas, en affectant à ***c***, ou à ***d*** ou à ***u*** une valeur possible parmi les cinq chiffres qui restent. Il y a d'autres techniques… On travaille avec le chiffre des centaines, c'est-à-dire ***c***. (Même raisonnement si on travaille avec ***d*** ou avec ***u***).

Soit ***c*** = 3, dans ce cas, on doit résoudre le système suivant : $\begin{cases} d+u=13 \\ d\times u=40 \end{cases}$. Solutions déjà trouvées : 5 et 8, d'où les six solutions de la question précédente. Même raisonnement si on affecte à ***c*** la valeur 5 ou la valeur 8. Pourquoi ?

Soit ***c*** = 4, dans ce cas, on doit résoudre le système suivant : $\begin{cases} d+u=12 \\ d\times u=30 \end{cases}$. Pas de solution (*entière*) ; en effet, 5 × 6 = 30, mais 5 + 6 = 11 ≠ 12.

Soit ***c***= 6, dans ce cas, on doit résoudre le système suivant : $\begin{cases} d+u=10 \\ d\times u=20 \end{cases}$. Pas de solution (*entière*) ; en effet, 5 × 4 = 20, mais 5 + 4 = 9 ≠ 10.

Conclusion : il y a six solutions à ce problème. Cf. question 3) !

Item 2. On doit remonter onze bouteilles. (En effet, avec dix bouteilles remontées, on peut avoir deux bouteilles de chaque sorte, et donc, la onzième bouteille remontée donne la troisième !).

PW s'interroge et ne comprend pas pourquoi cet exercice pose tant de soucis !

Item 3. Soient ***J*** le nombre de bonnes réponses et ***F*** le nombre de mauvaises réponses.

On a : 7 × ***J*** – 2 × ***F*** = 87. *Une très bonne piste* : 7 × ***J*** est un multiple de 7, on cherche alors un multiple de sept « voisin » de 87, puis on joue avec les points négatifs.
On peut commencer avec 84 = 7 × 12 ; 91 = 7 × 13 ; 98 = 7 × 14 ; 105 = 7 × 15 ; 112, …

(i) 84 ou 12 bonnes réponses ne convient pas, 84 < 87.

(ii) 91 correspond à 13 bonnes réponses et 91 – 87 = 4, ce qui correspond à 2 mauvaises réponses et voilà, une première solution : Patrick a répondu à 15 questions.

(iii) 98 correspond à 14 bonnes réponses et 98 – 87 = 11, nombre impair, donc impossibilité.

(iv) 105 correspond à 15 bonnes réponses et 105 – 87 = 18, ce qui correspond à 9 mauvaises réponses et voilà, une deuxième solution : Patrick a répondu à 24 questions.

(v) *Généralisation* : à chercher… De l'égalité 7***J*** – 2***F*** = 87, on peut exprimer ***F*** en fonction de ***J***. On a : 7***J*** + 87 = 2***F***, idem 2***F*** = 7***J*** + 87 ou ***F*** = 3,5***J*** + 43,5.

Et là, un petit coup de ***tableur***, *why not*, ou à l'aide d'une représentation graphique de la fonction affine *f* définie par *f*(***x***) = 3,5***x*** + 43,5 et on s'intéresse alors dans les deux cas aux ***solutions entières***…

EXERCICE 3. Barème indicatif : 10/28

1) a). Avant de répondre à cette question, il semble pertinent de trouver la valeur des différents jetons. Pour ce faire, on étudie l'item ① de la page **8** ! On applique donc la règle d'échanges « du ***n*** contre 1 ».
Il y a 31 jetons dans l'item ② : 2 ■, 2 □, 10 △, 17 ○. Quelle règle d'échanges ?

20 013	2 ■ 1 □ 3 △	Valeurs attribuées à chaque « style » de jeton : △ = 1 ; ○ = 100 ; □ = 10 ; ■ = 10 000 ; ● = 100 000 et ▲ = 1 000. D'où la « règle d'échanges » : 10 △ contre 1 □ ; 10 □ contre 1 ○ ; … (*à terminer !*).
1 204	1 ▲ 4 △ 2 ○	
4 030	4 ▲ 3 □	
400 010	4 ● 1 □	
1 000	10 ○	
302	3 ○ 2 △	

En appliquant les échanges et la règle mis en évidence dans le tableau, la collection peut donc être remplacée par la « somme » : 2 ■, 1 ▲, 7 ○, 3 □, ce qui fait utiliser 13 jetons.

1) b). Une piste de solution : se ramener à la base dix. Mais ce n'est pas la seule idée…
Calculo possède ainsi 1 304 « unités », Numérix en possède 40 000 et Géomette en possède 1 520.
On a : 1 304 < 1 520 < 40 000, d'où le rangement : 1) Calculo, 2) Géomette et 3) Numérix. *Toute autre « bonne » idée est acceptée.*

2) a). Il s'agit de revenir essentiellement sur deux points : (i) la compréhension du système de numération décimal ; en particulier sur les notions d'échanges et de groupements à partir d'un matériel (*plutôt ludique*) et (ii) la signification d'un chiffre en fonction de sa position dans l'écriture usuelle d'un nombre.
Il s'agit aussi de montrer qu'un même nombre peut s'écrire de façons différentes à l'aide des nombres 10, 100, 1 000, … étape-clef dans la compréhension du système de numération : il n'y a pas que la *décomposition canonique* !

2) b). Le travail de groupe permet de diminuer les risques de blocage en facilitant la confrontation des idées et offre une plus grande possibilité de validation des conjectures (*Hypothèse générique* : on a plus de « facilité » pour valider ou invalider la production d'un camarade que sa propre production).
La mise en commun des valeurs trouvées pour chaque type de jeton entraîne une confrontation des valeurs trouvées et permet d'engager un débat dans la classe. Cette mise en commun permet aussi de finaliser le travail de groupe.
On peut ajouter que l'explicitation des méthodes de recherche permet de faire le lien entre notre système de numération et en particulier ici le sens de la position des chiffres dans un nombre et la valeur des jetons. Certains groupes qui n'ont pas trouvé n'auront peut-être pas perçu ce lien. Ce moment est bien sûr essentiel pour l'objectif visé.

*Commentaire **PW**. Le dispositif de travail en classe est, **par définition**, au service du **savoir**, c'est-à-dire des compétences et des connaissances visées et non pas le contraire ! On ne fait pas du travail en groupes parce qu'il faut en faire. Pas de position idéologique sur ce point. De fait, le PE doit ainsi soigner ce qu'on appelle « l'analyse a priori » de la situation « d'enseignement-apprentissage » à présenter.*

Se pose donc le problème de la culture disciplinaire, didactique et pédagogique du PE !

2) c). Par procédure, on entend « technique », « démarche », « savoir-faire », … non nécessairement expertes, mais (*suffisamment*) explicites, permettant de répondre à la consigne.

- Procédure 1. Les élèves peuvent revenir au nombre d'unités représenté par la collection de jetons en base 10, puis transformer ce nombre en jetons en jouant sur la position des chiffres dans le nombre ainsi obtenu.

- Procédure 2. En partant des jetons unités, puis en continuant par les jetons dizaines, centaines, … effectuer des regroupements et des échanges avec des jetons d'unités supérieures, si la quantité ou le nombre dépasse 10.

2) d). Un point de vocabulaire : notion de **variable didactique**. Se reporter aux ***CM*** !

- Variable 1. *Le nombre de jetons représentés*. Plus ce nombre est important, plus les élèves ont des chances de faire des erreurs de dénombrement, quelle que soit la procédure utilisée.
- Variable 2. *Le nombre de catégories de jetons*. Plus ce nombre est important, plus il y a risque d'erreurs de toute sorte.
- Variable 3. *La disposition des jetons*. Si ces jetons sont regroupés par catégorie, la mise en œuvre des procédures 1. et 2. (Voir **2) c)**) sont facilitées. Si les jetons sont disposés aléatoirement (*comme c'est le cas ici*) la tâche est plus complexe pour l'élève dans la mesure où il risque plus de faire une erreur de dénombrement.
- Variable 4. *Le nombre de catégories de jetons pour lesquels il y a plus de 10 unités*. On suppose bien sur ici qu'il y a au moins une catégorie de jetons pour lesquels leur nombre dépasse 10 sinon la question n'a pas de sens. De fait, chaque fois qu'il y a des échanges à effectuer cela « complexifie » la tâche de l'élève, mais c'est le but du jeu !

2) e).

- Procédure 1. Pour chaque enfant (Calculo, Numérix et Géomette), passer par un retour au nombre d'unités en base 10 et comparer deux à deux ces nombres, puis les ranger.
- Procédure 2. Effectuer les groupements et échanges pour chaque unité puis effectuer la comparaison deux à deux en commençant par les jetons de plus grande valeur. Ne pas oublier de « ranger » !

On n'a pas complètement exploité le document figurant en **ANNEXE B**. *La partie* $\boxed{\textit{Exercices}}$ *mérite qu'on s'y attarde. Quelques exemples de questions à prendre en charge.*

- *Comment justifier que les comparaisons sont correctes ou pas pour l'item ①. Rôle et décisions du PE en cas d'erreurs significatives ? … Mêmes types de questions pour l'item ②.*
- *Que fait écrire le PE sur le cahier ou sur le Mémo pour décrire une ou des techniques de comparaison, de rangement. …*
- *Concernant l'item ③, comment être certain qu'on a obtenu TOUS les nombres répondant à la question ? Quels contrôles ou vérifications peut-on faire ? …*